普通高等教育“十二五”规划教材

线性代数

主 编 周保平

Xianxing Daishu

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

普通高等教育“十二五”规划教材

线性代数

主　编　周保平

副主编　蒋青松　杜　刚　齐立美

赵翠新　胡汉涛

北京邮电大学出版社

·北京·

内容简介

本书是为贯彻教育部“十二五”教材建设规划精神而编写的高等学校本科系列教材之一.全书内容包括行列式、矩阵、向量空间、线性方程组、矩阵的特征值和特征向量、二次型以及数学实验.书中各章节融入了数学历史和数学文化教育等内容,数学实验融入了数学建模思想并与相应章节同步配套,同时为了便于教师授课和学生自主学习,本书各章节均配有小结.

本书结构严谨,逻辑性强,解释清晰,例题丰富,习题数量、难易适中,可作为高等院校线性代数课程的教材,也可供理、工、农林、经管等各专业的学生和相关领域技术人员作为参考书使用.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/周保平主编.--北京:北京邮电大学出版社,2011.8

ISBN 978-7-5635-2670-3

Ⅰ.①线… Ⅱ.①周… Ⅲ.①线性代数—高等学校—教材 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 132328 号

书　　名	线性代数
主　　编	周保平
责任编辑	张保林
出版发行	北京邮电大学出版社
社　　址	北京市海淀区西土城路 10 号(100876)
电话传真	010-82333010　62282185(发行部)　010-82333009　62283578(传真)
电子信箱	ctrd@buptpress.com
经　　销	各地新华书店
印　　刷	北京市梦宇印务有限公司
开　　本	787 mm×960 mm　1/16
印　　张	13.5
字　　数	277 千字
版　　次	2011 年 8 月第 1 版　2011 年 8 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5635-2670-3　　定价:27.00 元

编　委　会

前　言

本书是根据教育部“十二五”教材建设规划精神与质量工程建设所需以及塔里木大学“线性代数”教学体系改革与实践的要求编写而成的.线性代数课程是本科专业的一门重要基础理论课,它对提高学生的科学文化素质,为学生学习后续课程,从事科学研究工作,以及为进一步获得现代科学知识奠定必要的数学基础.

本书内容翔实,通俗易懂,主要具有以下特点:

1.遵循教师的教学规律,同时便于学生自主学习提高.在保证知识体系完整的前提下,书中融入了适当的数学历史和数学文化,以加强学生的综合素质培养.

2.便于学生自主复习和归纳总结,重点突出,注重解释,在每章节后均有小结.

3.根据循序渐进的学习原则,对各章节的基本概念、基本理论、基本方法,作了深入浅出的介绍,并配备了不同难度的例题和总复习题,适合不同层次的学生学习和提高.

4.在附录中设置了与相应章节同步配套的实验内容,编写了实验指导并选择部分综合实验,将数学建模的思想融入其中,加强学生的实际动手能力,增强学生学以致用的意识.

本书由周保平担任主编,蒋青松、杜刚、齐立美、赵翠新、胡汉涛为副主编.全书共五章,第 1 章主要介绍了行列式的定义、性质及其计算;第 2 章主要介绍了矩阵的概念、运算及其应用;第 3 章主要介绍了向量空间、向量间的线性相关性、线性方程组的解法、解的结构及其应用;第 4 章主要介绍了矩阵的特征值、特征向量及其应用;第 5 章主要介绍了二次型的标准化及定性理论.其中,第 5 章作为选学内容,在学时有限的情况下,可以酌情增减,不影响整体内容的学习和授课.全书第 1 章由周保平、杜刚、朱夺宝、王伟、赵翠新编写;第 2 章由胡汉涛、朱丙元、蔡白光、董建德、吐尔洪江编写;第 3 章由周保平、齐立美、赵翠新、韩天红、王兴鹏编写;第 4 章由张吉林、晁增福、张立欣、杜刚、赵翠新、王书华编写;第 5 章由蒋青松、江伟、伏春玲、赵翠新、薛妮妮编写;数学实验由蒋青松、晁增福、刘婵、王兴鹏编写.全书由周保平审阅全稿,蒋青松、胡汉涛、齐立美对全稿进行了排版校对.

由于编者水平有限,时间仓促,书中不当之处在所难免,恳请同仁和读者批评、指正.

编　者
2011 年 5 月

目　　录

第 1 章　行列式 ………… 1

§1.1　二阶、三阶行列式 ………… 1

§1.2　n 阶行列式 ………… 3

§1.3　行列式的性质 ………… 9

§1.4　行列式按行(列)展开 ………… 16

§1.5　克莱姆法则 ………… 23

小结 ………… 27

行列式的由来 ………… 29

习题一 ………… 30

第 2 章　矩阵 ………… 33

§2.1　矩阵的概念 ………… 33

§2.2　矩阵的运算 ………… 35

§2.3　几种特殊的矩阵 ………… 45

§2.4　分块矩阵 ………… 48

§2.5　逆矩阵 ………… 51

§2.6　矩阵的初等变换 ………… 56

§2.7　矩阵的秩 ………… 62

小结 ………… 65

矩阵的产生与发展 ………… 67

习题二 ………… 68

第 3 章　线性方程组 ………… 72

§3.1　线性方程组的消元解法 ………… 72

§3.2　n 维向量空间 ………… 81

§3.3　向量间的线性关系 ………… 83

§3.4　线性方程组解的结构 ………… 96

§3.5　投入产出数学模型 ………… 104

小结 …… 111
线性方程组的源与流 …… 113
习题三 …… 115
第 4 章 矩阵的特征值与特征向量 …… 119
§4.1 矩阵的特征值与特征向量 …… 119
§4.2 相似矩阵 …… 124
§4.3 实对称矩阵的特征值和特征向量 …… 129
*§4.4 矩阵级数的收敛性 …… 135
小结 …… 139
名人简介 …… 141
习题四 …… 142
***第 5 章 二次型** …… 145
§5.1 二次型与对称矩阵 …… 145
§5.2 二次型与对称矩阵的标准形 …… 149
§5.3 二次型与对称矩阵的有定性 …… 156
§5.4 正定和负定性的一个应用 …… 161
小结 …… 163
二次型简介 …… 165
习题五 …… 166
附录:数学实验 …… 169
项目一 Mathematica 入门 …… 169
项目二 矩阵运算与方程组求解 …… 172
项目三 矩阵的特征值与特征向量 …… 185
习题答案 …… 201
参考文献 …… 208

第 1 章　行　列　式

§1.1　二阶、三阶行列式

在中学时，已通过解二元、三元线性方程组引出了二阶、三阶行列式的定义. 在此，再进行简单的复习.

(一)二阶行列式

用记号$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$表示代数和 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，称为二阶行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}. \tag{1.1}$$

二阶行列式表示的代数和，可以用画线(见图 1-1)的方法记忆，即实线连接的两个元素的乘积减去虚线连接的两个元素的乘积.

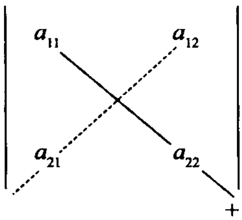

图 1-1

例 1　$\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=5\times2-(-1)\times3=13.$

例 2　设
$$D=\begin{vmatrix} \lambda^2 & \lambda \\ 3 & 1 \end{vmatrix},$$
问：(1)当 λ 为何值时，$D=0$；

(2)当 λ 为何值时，$D\neq0$.

解

$$D=\begin{vmatrix}\lambda^2 & \lambda\\ 3 & 1\end{vmatrix}=\lambda^2-3\lambda,$$

令 $\lambda^2-3\lambda=0$，则 $\lambda=0,\lambda=3$.

由此可得：

(1)当 $\lambda=0$ 或 $\lambda=3$ 时，$D=0$；

(2)当 $\lambda\neq0$ 且 $\lambda\neq3$ 时，$D\neq0$.

(二)三阶行列式

用记号

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

表示代数和

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31},$$

称为三阶行列式，即

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}. \tag{1.2}$$

三阶行列式表示的代数和，也可以用画线(见图 1-2)的方法记忆，其中各实线连接的三

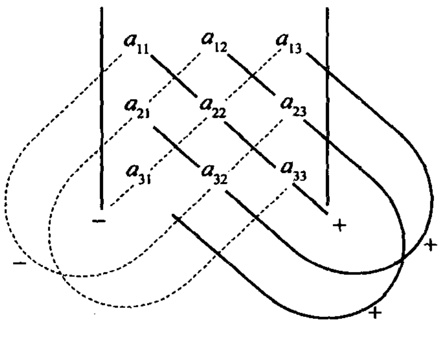

图 1-2

个元素的乘积是代数和中的正项,各虚线连接的三个元素的乘积是代数和中的负项.

例 3 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 1\times0\times6+2\times5\times(-1)+3\times4\times0-1\times5\times0-$

$2\times4\times6-3\times0\times(-1)$

$=-10-48=-58.$

例 4 a,b 满足什么条件时有 $\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0.$

解 $\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=a^2+b^2.$

若要 $a^2+b^2=0$,则 a 与 b 须同时为零.因此,当 $a=0$ 且 $b=0$ 时,给定的行列式等于零.

例 5 $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}>0$ 的充分必要条件是什么?

解 $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}=a^2-1.$

故 $a^2-1>0$,当且仅当 $|a|>1$.

因此可得

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}>0 \text{ 的充分必要条件是 } |a|>1.$$

§1.2 n 阶行列式

(一)排列与逆序

由 n 个不同数码 $1,2,\cdots,n$ 组成的有序数组 $i_1i_2\cdots i_n$,称为一个 n 级排列.

例如,1234 及 2431 都是 4 级排列,25413 是一个 5 级排列.

定义 1.1 在一个 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中,如果有较大的数 i_t 排在较小的数 i_s 前面($i_s<$

i_t)，则称 i_s 与 i_t 构成一个逆序. 一个 n 级排列中逆序的总数，称为它的逆序数，记为

$$N(i_1 i_2 \cdots i_n).$$

如果排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 的逆序数 $N(i_1 i_2 \cdots i_n)$ 是奇数则称为奇排列；反之，如果其逆序数是偶数则称为偶排列.

例如，排列 23154 中，2 在 1 前面，3 在 1 前面，5 在 4 前面，共有 3 个逆序，即 $N(23154)=3$，所以 23154 为奇排列. 排列 $12\cdots n$ 的逆序数为零，是偶排列.

例如，由 1,2,3 这 3 个数码组成的三级排列共有 $3!=6$ 种，其排列情况如表 1-1 所示.

表 1-1

排列	逆序	逆序数	排列的奇偶性
1 2 3	无	0	偶排列
1 3 2	32	1	奇排列
2 1 3	21	1	奇排列
2 3 1	21,31	2	偶排列
3 1 2	31,32	2	偶排列
3 2 1	21,31,32	3	奇排列

在一个排列 $i_1 \cdots i_s \cdots i_t \cdots i_n$ 中，如果仅将它的两个数码 i_s 与 i_t 对调，其他数码不变，得到另一个排列 $i_1 \cdots i_t \cdots i_s \cdots i_n$，这样的变换，称为一个对换，记为对换 (i_s, i_t).

例如，对排列 21354 施以对换(1,4)后得到排列 24351.

定理 1.1 任意一个排列经过一个对换后奇偶性改变.

证 (1)首先讨论对换相邻两个数码的特殊情形，设排列为 $AijB$，其中 A,B 表示除 i，j 两个数码，其余的数码，经过对换 (i,j)，变为排列 $AjiB$. 比较上面两个排列中的逆序，显然，A,B 中数码的次序没有改变，并且 i,j 与 A,B 中数码的次序也没有改变，仅仅改变了 i 与 j 的次序，因此，新排列仅比原排列增加了一个逆序(当 $i<j$ 时)，或减少了一个逆序(当 $i>j$ 时)，所以它们的奇偶性相反.

(2)在一般情形，设原排列为 $A\,ik_1k_2\cdots k_sjB$，经过对换 (i,j)，变为新排列 $A\,jk_1k_2\cdots k_si\,B$，由原排列中将数码 i 依次与 $k_1,k_2,\cdots,k_s,j$ 作 $s+1$ 次相邻对换，变为 $A\,k_1k_2\cdots k_sjiB$，再将 j 依次与 $k_s,\cdots,k_2,k_1$ 作 s 次相邻对换得到新排列，即新排列可以由原排列经过 $2s+1$ 次相邻对换得到. 由(1)的结论可知它改变了奇数次奇偶性，所以它与原排列的奇偶性相反.

定理 1.2 n 个数码$(n>1)$共有 $n!$ 个 n 级排列，其中奇偶排列各占一半.

证 n 级排列的总数为 $n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1=n!$，设其中奇排列为 p 个，偶排列为 q 个. 设想将每一个奇排列都施以同一的对换，如都对换(1,2)，则由定理 1.1 可知 p 个奇排列全部变为偶排列，于是有 $p\leqslant q$；同理如将全部偶排列也都施以同一对换，则 q 个偶排列全

部变为奇排列，于是又有 $q\leqslant p$，所以得出 $p=q$，即奇偶排列数相等，各为$\frac{n!}{2}$个.

用三级排列验证，见表 1-1，奇偶排列各 3 个.

(二)n 阶行列式的定义

观察二阶行列式和三阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

(1)二阶行列式表示所有不同的行不同的列的两个元素乘积的代数和. 两个元素的乘积可以表示为 $a_{1j_1}a_{2j_2}$，j_1j_2 为二级排列，当 j_1j_2 取遍了二级排列(12,21)时，即得到二阶行列式的所有项(不包括符号)，共为 2！=2 项.

三阶行列式表示所有位于不同的行不同的列的 3 个元素乘积的代数和. 3 个元素的乘积可以表示为 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$，$j_1j_2j_3$ 为三级排列，当 $j_1j_2j_3$ 取遍了三级排列时，即得到三阶行列式的所有项(不包括符号)，共为 3！=6 项.

(2)每一项的符号是，当这一项中元素的行标按自然数顺序排列后，如果对应的列标构成的排列是偶排列则取正号，是奇排列则取负号. 如在上述二阶行列式中，当 $N(j_1j_2)$ 为偶数时取正号，为奇数时取负号；在上述三阶行列式中，当 $N(j_1j_2j_3)$ 为偶数时取正号，为奇数时取负号.

根据这个规律，可给出 n 阶行列式的定义.

定义 1.2 用 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 组成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式，其中横排称为行，纵排称为列. 它表示所有可能取自不同的行不同的列的 n 个元素乘积的代数和. 各项的符号是：当这一项中元素的行标按自然数顺序排列后，如果对应的列标构成的排列是偶排列则取正号，是奇排列则取负号. 因此，n 阶行列式所表示的代数和中的一般项可以写为

$$(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1.3}$$

其中，$j_1j_2\cdots j_n$ 构成一个 n 级排列，当 $j_1j_2\cdots j_n$ 取遍所有 n 级排列时，则得到 n 阶行列式表

示的代数和中所有的项.

显然,一阶行列式$|a|$就是a.

行列式有时简记为$|a_{ij}|$.

由定理1.2可知:n阶行列式共有$n!$项,且冠以正号的项和冠以负号的项(不算元素本身所带的负号)各占一半.

例如,四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

所表示的代数和有$4!=24$项.

例如,$a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$行标排列为1234,元素取自不同行;列标排列为1234,元素取自不同列,且逆序数$N(1234)=0$,即元素乘积$a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$前面应冠以正号,所以$a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$为D的一项.

再例如,$a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$行标排列为1234,元素取自不同行;列标排列为4312,元素取自不同列,且逆序数$N(4312)=5$,即4312为奇排列,所以元素乘积$a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$前面应冠以负号,即$-a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$为$D$的一项.

$a_{11}a_{24}a_{33}a_{44}$有两个元素取自第四列,所以它不是D的一项.

例1 计算n阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的值,其中$a_{ii}\neq 0(i=1,2,\cdots,n)$.

解 记行列式的一般项为

$$(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

D中有很多项为零,现在考察有哪些项不为零.一般项中第一个元素a_{1j_1}取自第一行,但第一行中只有a_{11}不为零,因而$j_1=1$,即D中只有含a_{11}的那些项可能不为零,其他项均为零;一般项中第二个元素a_{2j_2}取自第二行,第二行中有a_{21}和a_{22}不为零,因第一个元素a_{11}已取自第一列,因此第二个元素不能再取自第一列,即不能取a_{21},所以第二个元素只能取a_{22},从而$j_2=2$,即D中只有含$a_{11}a_{22}$的那些项可能不为零,其他项均为零;这样推下去,可得$j_3=3$,$j_4=4,\cdots,j_n=n$.因此,D中只有$a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$这一项不为零,其他项均为零.由于$N(12\cdots n)=0$,

因此这一项应取正号，于是可得

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}.$$

称上面形式的行列式为下三角形行列式.

同理可得上三角形行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn},$$

其中 $a_{ii}\neq 0(i=1,2,\cdots,n)$.

特殊情况：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn},$$

其中 $a_{ii}\neq 0(i=1,2,\cdots,n)$.

这种行列式称为对角形行列式.

行列式中从左上角到右下角的对角线称为主对角线.

三角形行列式及对角形行列式的值，均等于主对角线上元素的乘积. 这一结论在以后行列式计算中可直接应用.

由行列式定义不难得出：一个行列式若有一行(或一列)中的元素皆为零，则此行列式必为零.

n 阶行列式定义中决定各项符号的规则还可由下面的结论来代替.

定理 1.3 n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 的一般项可以记为

$$(-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)+N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}, \tag{1.4}$$

其中 $i_1i_2\cdots i_n$ 与 $j_1j_2\cdots j_n$ 均为 n 阶排列.

证 由于 $i_1i_2\cdots i_n$ 与 $j_1j_2\cdots j_n$ 都是 n 级排列，因此，式(1.4)中的 n 个元素是取自 D 的

不同的行不同的列.

如果交换式(1.4)中两个元素 $a_{i_sj_s}$ 与 $a_{i_tj_t}$,则其行标排列由 $i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$ 换为 $i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$,由定理 1.1 可知其逆序数奇偶性也改变;列标排列由 $j_1\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n$ 换为 $j_1\cdots j_t\cdots j_s\cdots j_n$,其逆序数奇偶性也改变. 但对换后两下标排列逆序数之和的奇偶性则不改变,即有

$$(-1)^{N(i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n)+N(j_1\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n)}=(-1)^{N(i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n)+N(j_1\cdots j_t\cdots j_s\cdots j_n)},$$

所以交换式(1.4)中元素的位置,其符号不改变. 这样总可以经过有限次交换式(1.4)中元素的位置,使其行标 $i_1i_2\cdots i_n$ 换为自然数顺序排列,设此时列标排列变为 $k_1k_2\cdots k_n$,则式(1.4)变为

$$(-1)^{N(12\cdots n)+N(k_1k_2\cdots k_n)}a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n}=(-1)^{N(k_1k_2\cdots k_n)}a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n},$$

上式结果即为定义中 D 的一般项,也就是说 D 的一般项也可以记为式(1.4)的形式.

例 2　若 $(-1)^{N(i432k)+N(52j14)}a_{i5}a_{42}a_{3j}a_{21}a_{k4}$ 是五阶行列式 $|a_{ij}|$ 的一项,则 i,j,k 应为何值? 此时该项的符号是什么?

解　由行列式定义,每一项中的元素取自不同行不同列,故有 $j=3$,且有 $i=1$ 时 $k=5$,或 $i=5$ 时 $k=1$.

当 $i=1,j=3,k=5$ 时,$N(14325)+N(52314)=9$,该项前应冠以负号,所以 $-a_{15}a_{42}a_{33}a_{21}a_{54}$ 为 $|a_{ij}|$ 的一项.

当 $i=5,j=3,k=1$ 时,$N(54321)+N(52314)=16$,该项前应冠以正号,所以 $a_{55}a_{42}a_{33}a_{21}a_{14}$ 也为 $|a_{ij}|$ 的一项.

例 3　用行列式定义计算行列式

$$\begin{vmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\end{vmatrix}.$$

解　用(i,j)表示行列式中第 i 行第 j 列交叉点处元素的位置,考察给定行列式的非零项,第三行和第一列均只有一个非零元素,因此非零项必取(2,1)和(3,2)处元素. 取(2,1)和(3,2)后,即不能取(2,3)和(1,2). 因此,如取(2,3),则有两个元素取自第二行. 如取(1,2),则有两个元素取自第二列;不取(2,3)和(1,2),则只有取(4,3)和(1,4). 这样(1,4),(2,1),(3,2),(4,3)处 4 个“1”取自不同行不同列,其乘积 1 构成行列式的一项. 因 $N(4123)=3$ 为奇数,故该项前应冠以负号,其他项至少含有一个零元素,因此其他项皆为零. 故有

$$\begin{vmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\end{vmatrix}=-1.$$

§1.3 行列式的性质

将行列式 D 的行与列互换后得到的行列式，称为 D 的转置行列式，记为 D^{T} 或 D'. 即如果

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 1 将行列式转置，行列式的值不变，即 $D^{\mathrm{T}}=D$.

证 记 D 的一般项为 $(-1)^{N(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}$，它的元素在 D 中位于不同的行不同的列，因而在 D^{T} 中位于不同的列不同的行. 所以这 n 个元素的乘积在 D^{T} 中应为 $a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$，由定理 1.3 可知其符号也是 $(-1)^{N(i_1 i_2 \cdots i_n)}$.

因此，D 与 D^{T} 是具有相同项的行列式，所以 $D=D^{\mathrm{T}}$.

由此性质可知，行列式的行具有的性质，它的列也具有相同的性质.

性质 2 交换行列式的两行(列)，行列式的值变号.

证 设

$$D=\begin{array}{c} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ (i\ 行) \\ \\ (s\ 行) \\ \\ \\ \end{array},$$

交换 D 的第 i 行与第 s 行，得到行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ (i\text{ 行}) \\ \\ (s\text{ 行}) \\ \\ \\ \end{array}.$$

记 D 的一般项中 n 个元素的乘积为 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$，它的元素在 D 中位于不同的行不同的列，因而在 D_1 中也位于不同的行不同的列，所以也是 D_1 的一般项的 n 个元素乘积. 由于 D_1 是交换 D 的第 i 行与第 s 行，而各元素所在的列并没有改变，所以它在 D 中的符号为

$$(-1)^{N(1\cdots i\cdots s\cdots n)+N(j_1\cdots j_i\cdots j_s\cdots j_n)},$$

在 D_1 中的符号则为

$$(-1)^{N(1\cdots s\cdots i\cdots n)+N(j_1\cdots j_i\cdots j_s\cdots j_n)}.$$

由于排列 $1\cdots i\cdots s\cdots n$ 与排列 $1\cdots s\cdots i\cdots n$ 的奇偶性相反，所以

$$(-1)^{N(1\cdots i\cdots s\cdots n)+N(j_1\cdots j_i\cdots j_s\cdots j_n)}=-(-1)^{N(1\cdots s\cdots i\cdots n)+N(j_1\cdots j_i\cdots j_s\cdots j_n)}.$$

因而 D_1 中的每一项都是 D 的相应项的相反数，所以 $D_1=-D$.

推论 如果行列式中有两行(列)的对应元素相同，则此行列式的值为零.

因为将行列式 D 中具有相同元素的两行互换，其结果仍是 D，但由性质 2 可知其结果应为 $-D$，因此 $D=-D$，所以 $D=0$.

性质 3 用数 k 乘行列式的某一行(列)，等于以数 k 乘此行列式. 即如果设 $D=|a_{ij}|$，则

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=kD.$$

证 因为行列式 D_1 的一般项为

$$(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots(ka_{ij_i})\cdots a_{nj_n}=k[(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n}],$$

上面等号右端方括号内是 D 的一般项，所以 $D_1=kD$.

由性质 1 可知，对列的情形也成立.

同样，行列式的其他性质都只对行的情形加以证明就够了.

推论 1 如果行列式某行(列)的所有元素有公因子，则公因子可以提到行列式外面.

推论 2 如果行列式有两行(列)的对应元素成比例，则行列式的值等于零.