

国家自然科学基金资助项目 (51174209)

行为安全管理中的 数学模型及应用

XINGWEI ANQUAN GUANLI ZHONG DE
SHUXUE MOXING JI YINGYONG

● 主 编 张江石
副主编 许素睿 冯太琴 闫 波



煤炭工业出版社

国家自然科学基金资助项目 (51174209)

行为安全管理中的数学 模型及应用

主 编 张江石

副主编 许素睿 冯太琴 闫 波

煤炭工业出版社

· 北 京 ·

图书在版编目 (CIP) 数据

行为安全管理中的数学模型及应用 / 张江石主编. -- 北京: 煤炭工业出版社, 2016

ISBN 978 - 7 - 5020 - 5144 - 0

I. ①行… II. ①张… III. ①数学模型—应用—安全管理 IV. ①X92

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2015) 第 300544 号

行为安全管理中的数学模型及应用

主 编 张江石
责任编辑 肖 力
编 辑 郭玉娟
责任校对 孔青青
封面设计 安德馨

出版发行 煤炭工业出版社 (北京市朝阳区芍药居 35 号 100029)
电 话 010 - 84657898 (总编室)
010 - 64018321 (发行部) 010 - 84657880 (读者服务部)
电子信箱 cciph612@126.com
网 址 www.cciph.com.cn
印 刷 北京玥实印刷有限公司
经 销 全国新华书店

开 本 787mm × 1092mm¹/₁₆ 印张 12³/₄ 字数 304 千字
版 次 2016 年 2 月第 1 版 2016 年 2 月第 1 次印刷
社内编号 7995 定价 40.00 元

版权所有 违者必究

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,本社负责调换,电话:010 - 84657880

内 容 提 要

本书主要介绍了行为安全管理中常用的数学模型及其应用，包括分析类模型，预测分析类模型，因素分析类模型，结构分析类模型，判别、灵敏度分析模型，决策分析类模型，传染病模型等。

本书可供研究行为安全管理的研究人员、企业管理人员以及高等院校相关专业高年级的学生参考。

前 言

行为安全科学侧重研究个人不安全动作的方法、关系和规律等，目前研究热点集中于跨行业、跨文化间的安全氛围、管理体系及执行、行为动作、安全指标等，难点是用数学方法揭示相关因素与个体客观动作的关系和动态演化过程。

本书编写的出发点和目的是通过系统梳理行为安全领域中常用的 21 个数学模型，介绍其使用方法，以提高安全科学与工程专业高年级本科生或研究生在行为安全研究方面的数学思维能力。

本书的编写思路按提出定义、理论释义、建模步骤、实例介绍等逐步展开，尽可能做到通俗易懂、深入浅出。

本书第二章、第三章由北京化工大学的冯太琴编写，其他各章由中国矿业大学（北京）的闫波、中国劳动关系学院的许素睿等协助张江石完成。书中所引用的实例，除编者的设计和计算外，还借鉴引用了他人文献，在此表示感谢！

编 者

2015 年 12 月

目 次

第一章 关联分析类模型	1
第一节 层次分析模型	1
第二节 网络层次分析模型	8
第三节 模糊综合评判模型	17
第四节 T型关联度及其演化模型	21
第五节 灰色关联模型	25
第六节 可拓综合评价模型	30
第二章 预测分析类模型	41
第一节 灰色预测模型	41
第二节 马尔可夫预测模型	48
第三节 BP神经网络模型	54
第四节 时间序列预测模型	70
第三章 因素分析类模型	75
第一节 信息熵模型	75
第二节 主成分分析模型	78
第三节 因素重构分析模型	84
第四章 结构分析类模型	89
第一节 系统动力学模型	89
第二节 结构方程模型	119
第三节 回归分析模型	134
第五章 判别、灵敏度分析模型	149
第一节 判别分析模型	149
第二节 灵敏度分析模型	161
第六章 决策分析类模型	173
第一节 博弈论	173
第二节 多属性决策模型	185
第七章 传染病模型	191

第一章 关联分析类模型

第一节 层次分析模型

一、层次分析模型的定义

利用定性与定量相结合、系统化、层次化分析方法所建立的模型，称为层次分析模型（AHP）。它是分析多目标、多准则复杂系统强有力的工具，具有思路清晰、方法简便、使用面广、系统性强等特点。它使人们的思维过程层次化，通过逐层比较多种关联因素来为分析、决策、预测或控制失误的发展提供定量依据。

层次分析法在分析行为安全主要因素及因素的相对重要性、综合评价生产系统、合理选择安全措施、比较安全决策方案和合理利用安全投入等方面发挥着重要作用。

二、建模基本步骤

1. 建立层次结构模型

深入分析面临的问题后，将决策问题分成3个层次。最上层为目标层 O ，最下层为方案层 P ，中间层为准则层 C （准则层又可分为若干个子层），各层次之间的联系用相连的直线表示。

2. 构造判断矩阵

通过比较确定各层次中的因素对于上一层次中每一因素的所有判断矩阵。在层次结构中，对从属于（或影响）同一上层的每个因素进行两两比较，比较其对于准则的重要程度，并按事前规定的标度定量化构成矩阵形式，即判断矩阵。判断矩阵中各元素的数值一般采用1~9标度法确定，这种标度是最合适的，主要是通过专家评估或由历史（经验）数据得出。1~9标度见表1-1。

表1-1 1~9 标 度

权 度 a_{ij}	意 义	权 度 a_{ij}	意 义
1	C_i 与 C_j 的影响相同	7	C_i 比 C_j 的影响明显强
3	C_i 比 C_j 的影响稍强	9	C_i 比 C_j 的影响绝对强
5	C_i 比 C_j 的影响强	2, 4, 6, 8	为上述两判断的中间值

表 1-1 (续)

权 度 a_{ij}	意 义	权 度 a_{ij}	意 义
倒数	若因素 C_i 与 C_j 的重要性之比为 a_{ij} , 则因素 C_j 与 C_i 的重要性之比为 $1/a_{ij}$		

3. 单层排序及一致性检验

单层排序是确定下层各因素对上层各因素影响程度的排序过程。影响程度用权值表示，权值的集合即为权重向量。

通过上一步骤建立的判断矩阵求出各层次中的因素对于上一层的权重向量，并进行一致性检验。层次分析模型中权重向量的计算方法主要有 4 种，分别是几何平均法、算术平均法、特征向量法和最小二乘法，计算公式和计算步骤如下。

1) 几何平均法（方根法）

$$W_i = \frac{\left(\prod_{j=1}^n a_{ij}\right)^{\frac{1}{n}}}{\sum_{i=1}^n \left(\prod_{j=1}^n a_{ij}\right)^{\frac{1}{n}}} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

计算步骤：①A 的元素按行相乘得一新向量；②将新向量的每个分量开 n 次方；③将所得向量归一化即得权重向量。

2) 算术平均法

由于判断矩阵 A 中的每一列都近似反映了权值的分配情形，故可采用全部列向量的算术平均值来估计权重向量，即

$$W_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{a_{ij}}{\sum_{k=1}^n a_{kj}} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

计算步骤：①A 的元素按列归一化；②将归一化后的各列相加；③将相加后的向量除以 n 即得权重向量。

3) 特征向量法

将权重向量 W 右乘权重矩阵 A，有

$$AW = \lambda_{\max} W$$

同上， $\lambda_{\max}$ 为判断矩阵的最大特征值，存在且唯一， W 的分量均为正分量。最后，将求得的权重向量进行归一化处理即为所求。

4) 最小二乘法

用拟合方法确定权重向量，使残差平方和为最小，即求解如下模型：

$$\begin{aligned} \min Z &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_{ij} w_j - w_i)^2 \\ \text{s. t. } &\sum_{i=1}^n w_i = 1 \\ &w_i > 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

求得权重向量后, 进一步进行单排序一致性检验。设 A 为 n 阶正互反矩阵, $\lambda_{\max}$ 为 A 的最大特征值, 称

$$CI = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1}$$

为矩阵 A 的一致性指标。当 $CI = 0$, A 为一致矩阵, CI 的值越小, 矩阵 A 的一致性程度越高。为了确定 A 的不一致程度的允许范围, 需要找出衡量 A 的一致性指标 CI 的标准, 又引入随机一致性指标 RI 的概念。计算 RI 过程如下, 对于固定的 n , 随机构造正互反矩阵 A , 取充分大的样本, 求得最大特征值, 并定义

$$RI = \frac{\lambda'_{\max} - n}{n - 1}$$

针对不同的 n , 通过实验得出了随机一致性指标, 见表 1-2。

表 1-2 随机一致性指标 RI 的值

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
RI	0	0.52	0.89	1.12	1.26	1.36	1.41	1.46	1.49	1.52

设 $CR = CI/RI$ 为矩阵 A 的随机一致性比率。当 $CR < 0.1$ 时, 认为成对比较矩阵 A 具有满意的一致性, 此时我们用 A 的最大特征值对应的归一化的特征向量作为比较矩阵的权重向量。当 $CR \geq 0.1$ 时, 必须重新调整成对比较矩阵 A , 直至具有满意的一致性。

4. 层次总排序及一致性检验

将层次中的因素对于上一层次的权重向量及上一层对于总目标的权重向量综合, 确定该层次对于总目标的权重向量, 并对总排序进行一致性检验。

计算同一层次所有因素对于总目标相对重要性的排序权值的过程称为总层次排序, 此过程是从最高层到最低层逐层实现的。设上一层次 A 包含 m 个因素 $A_1 A_2 \cdots A_m$, 它们的总排序权值分别为 $a_1 a_2 \cdots a_m$, 下一层次 B 包含 n 个因素 $B_1 B_2 \cdots B_n$, 它们对于 A_j 的层次排序权值为 $b_{1j} b_{2j} \cdots b_{nj}$ ($j = 1, 2, \cdots, m$), 则 B 层的总排序权值为

$$w_i = \sum_{j=1}^m a_j b_{ij} \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

层次总排序权值见表 1-3。

表 1-3 层次总排序权值

层次 A 层次 B	A_1	A_2	$\cdots$	A_m	B 层总排序权值
	a_1	a_2	$\cdots$	a_m	
B_1	b_{11}	b_{12}	$\cdots$	b_{1m}	$\sum_{j=1}^m a_j b_{1j}$
B_2	b_{21}	b_{22}	$\cdots$	b_{2m}	$\sum_{j=1}^m a_j b_{2j}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
B_n	b_{n1}	b_{n2}	$\cdots$	b_{nm}	$\sum_{j=1}^m a_j b_{nj}$
CI	CI_1	CI_2	$\cdots$	CI_n	

层次总排序也要进行一致性检验，检验仍像层次总排序那样从高层到底层逐层检验，且公式为

$$CR = \frac{\sum_{j=1}^m a_j CI_j}{\sum_{j=1}^m a_j RI_j}$$

当 $CR < 0.1$ 时，认为层次总排序具有满意的一致性。

5. 结果分析

主要结合实践分析其权重值，找出影响目标层的主要因素（关键因素），对主要因素（关键因素）进行剖析或加强控制，为实现目标提供方向和途径。

三、模型应用——煤矿安全生产能力综合评价

从人-机-环-管系统论角度对煤矿生产系统进行综合分析。结合有关学者研究,指出影响煤矿安全生产能力的因素主要包括人的因素、技术因素、环境因素和管理因素 4 个方面。

人的因素是指人的基本素质和安全意识及安全行为，主要指标包括文化程度、技能水平、安全教育培训。技术因素是指煤矿生产技术和安全技术水平，影响技术因素的主要指标包括开采工艺、安全装备、信息化技术。环境因素主要是指煤炭赋存的地质条件，主要指标有瓦斯含量、水与粉尘、顶板与岩体稳定性。管理因素是指安全管理体系的建设和状态，主要指标包括安全规程、管理人员素质（文化程度、技能水平）、规章制度、安全教育培训、监察力度等。据此构建层次分析模型，找出影响煤矿安全生产能力的关键因素。

1. 建立层次结构模型

目标层 A：煤矿安全生产能力综合评价。

准则层 B：人的因素 B1、技术因素 B2、环境因素 B3、管理因素 B4。

方案层 C：文化程度、技能水平、安全教育培训、开采工艺、安全装备、信息化技术、瓦斯含量、水与粉尘、顶板与岩体稳定性、安全规程、管理人员素质（文化程度、技能水平）、规章制度、安全教育培训、监察力度。

具体递接层次模型如图 1-1 所示。

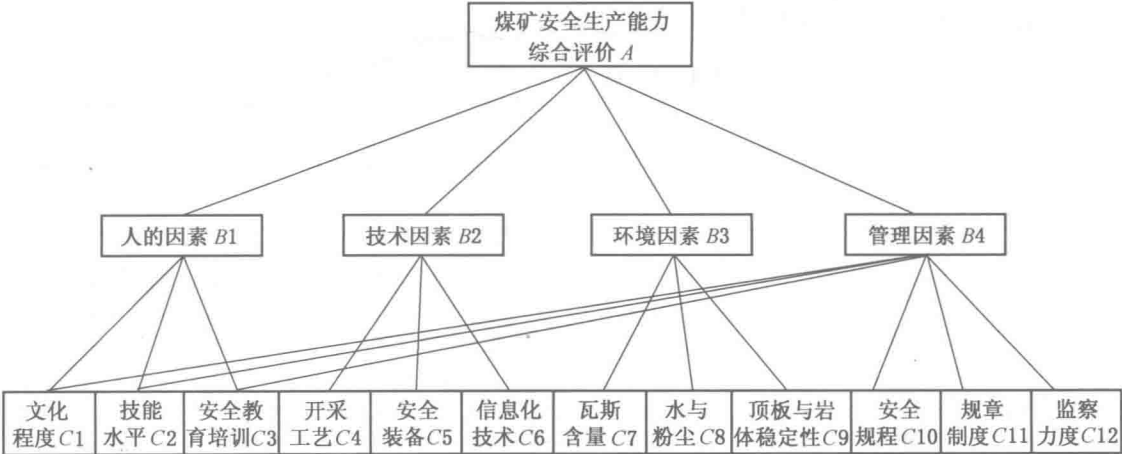


图 1-1 煤矿安全生产能力递接层次模型

2. 构造判断矩阵

根据 1~9 标度表, 同时参考专家意见确定各因素之间的相对重要性并赋予相应的分值, 构造出各层次中的所有判断矩阵, 并计算权向量。

目标层—准则层之间的判断矩阵为

A	B1	B2	B3	B4
B1	1	2	3	2
B2	1/2	1	2	1
B3	1/3	1/2	1	1/2
B4	1/2	1	2	1

其最大特征值 $\lambda_{\max} = 4.0104$, 权重向量 $W = (w_1, w_2, w_3, w_4) = (0.424, 0.227, 0.122, 0.227)$ 。

准则层—措施层之间的各判断矩阵为

①B1—C1、C2、C3:

B1	C1	C2	C3
C1	1	1/2	1/3
C2	2	1	2/3
C3	3	3/2	1

其最大特征值 $\lambda_{\max} = 3$, 权重向量 $W = (w_1, w_2, w_3) = (0.167, 0.333, 0.500)$ 。

②B2—C4、C5、C6:

B2	C4	C5	C6
C4	1	2/3	2
C5	3/2	1	3
C6	1/2	1/3	1

其最大特征值 $\lambda_{\max} = 3$, 权重向量 $W = (w_1, w_2, w_3) = (0.333, 0.500, 0.167)$ 。

③B3—C7、C8、C9:

B3	C7	C8	C9
C7	1	2	3
C8	1/2	1	2/3
C9	1/3	3/2	1

其最大特征值 $\lambda_{\max} = 3.0735$, 权重向量 $W = (w_1, w_2, w_3) = (0.550, 0.210, 0.240)$ 。

④B4—C1、C2、C3、C10、C11、C12:

B4	C1	C2	C3	C10	C11	C12
C1	1	1/2	1/3	1/3	1/2	1/3
C2	2	1	2/3	1	2	1/2
C3	3	3/2	1	2	3	1
C10	3	1	1/2	1	2	2/3
C11	2	1/2	1/3	1/2	1	1/2
C12	3	2	1	3/2	2	1

其最大特征值 $\lambda_{\max} = 6.0906$, 权重向量 $W = (w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6) = (0.069, 0.158, 0.261, 0.169, 0.100, 0.243)$ 。

3. 单排序及一致性检验

目标层—准则层之间的一致性检验:

$$\lambda_{\max} = 4.0104 \quad CI = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1} = \frac{4.0104 - 4}{4 - 1} = \frac{0.0104}{3} = 0.003467$$

查表有 $RI = 0.90$, $CR = \frac{CI}{RI} = \frac{0.003467}{0.90} = 0.003852 < 0.1$, 该判断矩阵一致性可以接受。

准则层—措施层之间的一致性检验:

①B1—C1、C2、C3: $\lambda_{\max} = 3$, $CI = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1} = \frac{3 - 3}{3 - 1} = 0$, 查表有 $RI = 0.58$, $CR = \frac{CI}{RI} = \frac{0}{0.58} = 0 < 0.1$, 该判断矩阵一致性可以接受。

②B2—C4、C5、C6: $\lambda_{\max} = 3$, $CI = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1} = \frac{3 - 3}{3 - 1} = 0$, 查表有 $RI = 0.58$, $CR = \frac{CI}{RI} = \frac{0}{0.58} = 0 < 0.1$, 该判断矩阵一致性可以接受。

③B3—C7、C8、C9: $\lambda_{\max} = 3.0735$, $CI = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1} = \frac{3.0735 - 3}{3 - 1} = 0.03675$, 查表有 $RI = 0.58$, $CR = \frac{CI}{RI} = \frac{0.03675}{0.58} = 0.06336 < 0.1$, 该判断矩阵一致性可以接受。

④B4—C1、C2、C3、C10、C11、C12: $\lambda_{\max} = 6.0906$, $CI = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1} = \frac{6.0906 - 6}{6 - 1} = 0.01812$, 查表有 $RI = 1.24$, $CR = \frac{CI}{RI} = \frac{0.01812}{1.24} = 0.0146 < 0.1$, 该判断矩阵一致性可以接受。

综上计算,所有单排序的 $CR < 0.1$,认为每个判断矩阵的一致性都是可以接受的。

4. 层次总排序及一致性检验

对影响煤矿安全生产能力的所有因素进行总排序,按表 1-3 的公式进行计算。

表 1-4 煤矿安全能力评价指标体系及权重

B 层及权重 C 层	人的因素	技术因素	环境因素	管理因素	C 层权重总排序值
	0.424	0.227	0.122	0.227	
文化程度	0.167	0.000	0.000	0.069	0.0865
技能水平	0.333	0.000	0.000	0.158	0.1771
安全教育培训	0.500	0.000	0.000	0.261	0.2712
开采工艺	0.000	0.333	0.000	0.000	0.0756
安全装备	0.000	0.500	0.000	0.000	0.1135
信息化水平	0.000	0.167	0.000	0.000	0.0379
瓦斯含量	0.000	0.000	0.550	0.000	0.0671
水与粉尘	0.000	0.000	0.210	0.000	0.0256
顶板与岩体稳定性	0.000	0.000	0.240	0.000	0.0293
安全规程	0.000	0.000	0.000	0.169	0.0384
规章制度	0.000	0.000	0.000	0.100	0.0227
监察力度	0.000	0.000	0.000	0.243	0.0552

对总排序结果进行一致性检验,计算综合检验指标。

$$CR = \frac{\sum_{j=1}^m a_j CI_j}{\sum_{j=1}^m a_j RI_j} = 0.011706 < 0.1$$

$CR < 0.1$,认为综合排序的一致性检验结果是合理的。因此,用层次分析模型评价煤矿安全生产能力的影响因素,并确定各种因素之间的相对重要性程度是可行的。

5. 结果分析

从以上结果可以看出,人的因素(0.424)是影响我国煤矿安全生产能力的首要因素,其次是技术因素(0.227)和管理因素(0.227),而地质条件等环境因素(0.122)排在最后。另外,通过所有因素的层次总排序可以看出,12个主要因素对煤矿安全生产能力影响的先后次序为:安全教育培训(0.2712)、技能水平(0.1771)、安全装备(0.1135)、文化程度(0.0865)、采煤工艺(0.0756)、瓦斯含量(0.0671)、监察力度(0.0552)、安全规程(0.0384)、信息化水平(0.0379)、顶板与岩体稳定性(0.0293)、水与粉尘等赋存条件(0.0256)、规章制度(0.0227)。可见技术与地质条件并不是最重要的,人的因素才是决定煤矿安全的关键因素。虽然地质环境条件也严重影响煤矿的安全生产,但它并不是决定企业安全生产能力的首要因素。

参考文献

- [1] 董四辉, 宿博. 层次分析法的改进方法在煤矿安全评价中的应用 [J]. 辽宁工程技术大学学报 (自然科学版), 2012, 31 (5): 690-694.
- [2] 郭金玉, 张忠彬, 孙庆云. 层次分析法的研究与应用 [J]. 中国安全科学学报, 2008, 18 (5): 148-153.
- [3] 郭金玉, 张忠彬, 孙庆云. 层次分析法在安全科学研究中的应用 [J]. 中国安全生产科学技术, 2008, 4 (2): 69-72.
- [4] 何天平, 程凌. 层次分析法在化工园区安全评价中的应用 [J]. 中国安全生产科学技术, 2008, 4 (4): 81-83.
- [5] 李树刚, 成连平, 许晨霞, 等. 层次分析法在煤矿安全投入中的应用 [J]. 煤矿安全, 2009, 40 (11): 123-126.
- [6] 张天军, 苏琳, 乔宝明, 等. 改进的层次分析法在煤与瓦斯突出危险等级预测中的应用 [J]. 西安科技大学学报, 2010, 30 (5): 536-542.
- [7] 荆全忠, 姜秀慧, 杨鉴淞, 等. 基于层次分析法 (AHP) 的煤矿安全生产能力指标体系研究 [J]. 中国安全科学学报, 2006, 16 (9): 74-79.
- [8] 秦涛, 商宇航, 刘振文. 基于层次分析法的煤矿安全评价指标体系研究 [J]. 现代矿业, 2010 (5): 70-72.
- [9] 郭锐. 基于层次分析法的煤矿安全生产智能预警系统 [D]. 西安: 西安电子科技大学, 2008.
- [10] 翟海娟. 基于层次分析法的煤矿井下生产系统安全评价研究 [D]. 西安: 西安科技大学, 2011.
- [11] 李树砖, 田水承, 郭彬彬. 基于层次分析法的煤矿瓦斯爆炸致因研究 [J]. 陕西煤炭, 2011 (4): 38-41.
- [12] 鲁珍珍. 基于层次分析法的企业文化建设效果测评体系研究 [D]. 兰州: 兰州大学, 2009.
- [13] 邹义怀, 江成玉, 李春辉, 等. 基于层次分析法和模糊数学的煤矿安全生产评价 [J]. 工矿自动化, 2010 (10): 39-41.
- [14] 胡颖慧. 基于聚类 AHP 的煤矿安全管理群体决策研究 [D]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学, 2008.
- [15] 王荣虎. 建筑工程施工层次分析法安全综合评价 [D]. 合肥: 合肥工业大学, 2007.
- [16] 段洁. 煤矿安全生产能力评价系统研究 [D]. 西安: 西安科技大学, 2012.
- [17] 裴拙勤. 基于 AHP 的煤矿安全文化模糊综合评价与应用研究 [D]. 西安: 西安科技大学, 2009.
- [18] 邓雪, 李家铭, 曾浩健, 等. 层次分析法权重计算方法及其应用研究 [J]. 数学的实践与认识, 2012, 42 (7): 93-100.

第二节 网络层次分析模型

一、网络层次分析模型的定义

网络层次分析法 (ANP) 是美国匹兹堡大学 T. L. saaty 教授于 1996 年在 AHP 的基础上提出的一种适用于非独立反馈系统的决策方法, 它是在 AHP 基础上发展而来的一种新的实用决策方法。AHP 作为一种决策过程, 自 20 世纪 70 年代由 T. L. saaty 教授提出并进行系统研究以来, 已经被广泛地应用于政治、经济、社会和管理等领域。这种方法采用相对标度的形式, 充分利用了人的经验和判断力, 在递阶层次结构下, 根据所规定的相对标

度——比例标度，依靠决策者的判断，对同一层次有关元素的相对重要性进行两两比较，并按层次从上到下合成方案对于决策目标的测度。但是，现实世界中，各个影响因素之间往往存在各种各样的联系，层次分析法所要求的各层次内部元素之间相互独立的假设显然不符合实际情况，网络层次分析法正是对这个方面做出了改进。

二、网络层次分析模型理论基础

1. 结构分析

ANP 首先将系统元素划分为两大部分，第一部分称为控制层，包括问题目标及决策准则。所有的决策准则均被认为是彼此独立的，且只受目标元素支配。控制因素中可以没有决策准则，但至少有一个目标。控制层中每个准则的权重均可用传统 AHP 方法获得。第二部分称为网络层，它是由所有受控制层支配的元素组组成的，其内部是互相影响的网络结构。图 1-2 就是一个典型的 ANP 结构。

2. 优势度分析

AHP 的一个重要步骤就是在一个准则下，受支配元素进行两两比较，由此获得判断矩阵。但在 ANP 中被比较元素之间可能不是独立的，而是相互依存的，因而这种比较将以两种方式进行：

直接优势度：给出一个准则，两元素对于该准则的重要程度进行比较。

间接优势度：给出一个准则，两元素在准则下对第三个元素（称为次准则）的影响程度进行比较。

3. 超矩阵

设 ANP 的控制层中有元素 $P_1, \dots, P_n$ ，网络层中有元素组 $C_1, \dots, C_N$ ，其中 C_i 中有元素 $e_{i1}, \dots, e_{in}$ ($i=1, \dots, N$)。以控制层元素 P_s ($s=1, \dots, m$) 为准则，以 C_j 中元素 e_{jl} ($l=1, \dots, n_j$) 为次准则，元素组 C_i 中元素按其对于 e_{jl} 的影响力大小进行间接优势度比较，使用 1~9 标度法（表 1-5）构造两两判断矩阵。

表 1-5 ANP 评分标度的含义

权 度 a_{ij}	意 义
1	两元素相比，具有同样的重要性
3	两元素相比，一个元素比另一个元素稍微重要
5	两元素相比，一个元素比另一个元素明显重要
7	两元素相比，一个元素比另一个元素强烈重要
9	两元素相比，一个元素比另一个元素极端重要
2, 4, 6, 8	为上述两判断的中间值

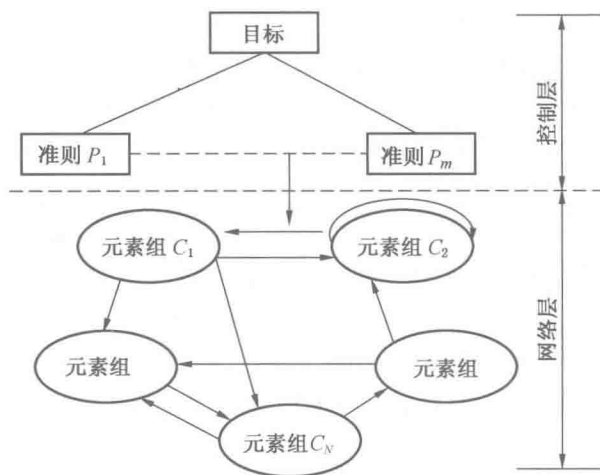


图 1-2 典型 ANP 结构

若因素 i 与 j 比较得 a_{ij} , 则因素 j 与 i 比较的判断结果为 $1/a_{ij}$ 。

1) 判断矩阵构造

根据以上 1~9 标度方法两两比较, 构造判断矩阵 (P_s 控制层下元素两两比较判断矩阵)。

e_{jl}	$e_{i1} \quad e_{i2} \dots e_{in_i}$	归一化特征向量
e_{i1}		$w_{i1}^{(jl)}$
e_{i2}		$w_{i2}^{(jl)}$
$\vdots$		$\vdots$
e_{in_i}		$w_{in_i}^{(jl)}$

并由特征根法得排序向量 ($w_{i1}^{(jl)}, w_{i2}^{(jl)}, \dots, w_{in_i}^{(jl)}$)。

2) 一致性检验

在判断矩阵的构造中并不要求判断具有高度一致性, 但要求判断有大体的一致性, 以防出现极端情况。在求取排序向量后要对其进行一致性检验。其计算步骤如下:

(1) 计算一致性指标 $C. I.$ 。

$$C. I. = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1}$$

其中, n 为判断矩阵的阶数, $\lambda_{\max}$ 为判断矩阵的特征根。

(2) 计算平均随机一致性指标 $R. I.$ 。

平均随机一致性指标是多次 (500 次以上) 重复进行随机判断矩阵特征值的计算之后取算术平均数得到的。1~15 阶重复计算 1000 次的平均随机一致性指标见表 1-6。

表 1-6 平均随机一致性指标

阶数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$R. I.$	0	0	0.52	0.89	1.12	1.26	1.36	1.41	1.46	1.49	1.52	1.54	1.56	1.58	1.59

(3) 计算一致性比例 $C. R.$ 。

$$C. R. = \frac{C. I.}{R. I.}$$

当 $C. R. < 0.1$ 时, 则接受判断矩阵一致性结果。

3) 计算超矩阵 W

记排序矩阵 W_{ij} 为

$$W_{ij} = \begin{pmatrix} w_{i1}^{(jl)} & \dots & w_{i1}^{(jn_j)} \\ \vdots & & \vdots \\ w_{in_i}^{(jl)} & \dots & w_{in_i}^{(jn_j)} \end{pmatrix}$$

这里 W_{ij} 的列向量就是 C_i 中元素 $e_{i1}, \dots, e_{in_i}$ 对 C_j 中元素 $e_{j1}, \dots, e_{jn_j}$ 的影响程度排序

向量。若 C_j 中元素不受 C_i 中元素影响, 则 $W_{ij}=0$ 。这样最终可获得 P_s 控制层下超矩阵 W 。

$$W = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & \cdots & n_1 & & & 1 & \cdots & n_N \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ n_1 \end{matrix} & \begin{pmatrix} W_{11} & \cdots & W_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ W_{N1} & \cdots & W_{NN} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

4. 加权超矩阵

使用上述方法在 P_s 控制层下构造的超矩阵共有 m 个, 它们都是非负矩阵, 但是由于超矩阵的子块 W_{ij} 虽是列归一化的, 但 W 却不是列归一化的。为此需要构造加权矩阵, 将超矩阵列归一化。

1) 构造加权矩阵

以 P_s 为准则, 对 P_s 下各组元素对准则 C_j ($j=1, \cdots, N$) 的重要性进行比较, 得到在控制层 P_s 下的两两比较判断矩阵。

C_j	$C_1 \quad C_2 \cdots C_n$	归一化特征向量
C_1		a_{1j}
C_2		a_{2j}
$\vdots$		$\vdots$
C_n		a_{Nj}

与 C_j 无关的元素组对应的排序向量分量为零, 由此得加权矩阵 A :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix}$$

$a_{ij} \in [0, 1]$ 且 $\sum_{i=1}^N a_{ij} = 1$ ($j=1, 2, \cdots, N$)。

2) 构造加权超矩阵

构造矩阵 $\bar{W} = (\bar{W}_{ij})$, 其中元素

$$\bar{W}_{ij} = a_{ij} W_{ij}$$

$i=1, 2, \cdots, N; j=1, 2, \cdots, N$ 。

这里 $W = (W_{ij})$ 为系统的超矩阵, $A = (a_{ij})$ 为系统的加权矩阵, $\bar{W} = (\bar{W}_{ij})$ 被称为加权超矩阵。加权超矩阵的任一系列均是归一化的, 其列和为 1, 称为列随机矩阵。

5. 极限超矩阵

一般来讲, ANP 系统中已不再明显地存在起整体支配作用的单个元素或最高层次。因此, 类似于递阶层次结构中的方案合成排序将失去意义。在这种情形下, 我们更关注以下两类排序: