华章数学译丛

HZ BOOKS
华章教育

60

ELSEVIER
爱思唯尔

An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives

Third Edition

金融衍生工具数学导论

（原书第3版）

[美] 艾利·赫萨（Ali Hirsa） 萨利赫 N. 内夫特奇（Salih N. Neftci） 著

冉启康 葛泓杉 李君格 译

机械工业出版社
China Machine Press

华章数学译丛

60

An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives

Third Edition

金融衍生工具数学导论

（原书第3版）

[美] 艾利·赫萨（Ali Hirsa） 萨利赫 N. 内夫特奇（Salih N. Neftci） 著

冉启康 葛泓杉 李君格 译

机械工业出版社
China Machine Press

图书在版编目（CIP）数据

金融衍生工具数学导论（原书第 3 版）/（美）艾利·赫萨（Ali Hirsa），（美）萨利赫 N. 内夫特奇（Salih N. Neftci）著；冉启康，葛泓杉，李君格译．—北京：机械工业出版社，2016.7

（华章数学译丛）

书名原文：An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives, Third Edition

ISBN 978-7-111-54460-9

I. 金… II. ①艾… ②萨… ③冉… ④葛… ⑤李… III. 金融衍生工具－经济数学－研究 IV. F830.9

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 182401 号

本书版权登记号：图字：01-2015-0847

An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives, Third Edition
Ali Hirsa and Salih N. Neftci
ISBN: 978-0-12-384682-2

本书是一本优秀的金融衍生工具方面的教材，对现代资产定价理论所需的基本数学工具进行了系统全面的介绍，包括：套利定理、风险中性概率、用于金融领域的微积分、鞅、偏微分方程、Girsanov 定理和 Feyman-Kac 公式等．本书案例丰富、体系精巧，对资产定价相关的数学原理和方法的描述简明直观．适合作为高等院校财经类、数学类专业的本科或者研究生教材，也适合从事金融工作的在职人员阅读．

出版发行：机械工业出版社（北京市西城区百万庄大街 22 号　邮政编码：100037）

责任编辑：和　静	责任校对：董纪丽
印　　刷：北京诚信伟业印刷有限公司	版　　次：2016 年 8 月第 1 版第 1 次印刷
开　　本：186mm×240mm　1/16	印　　张：28.5
书　　号：ISBN 978-7-111-54460-9	定　　价：99.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
客服热线：(010) 88378991　88361066　　投稿热线：(010) 88379604
购书热线：(010) 68326294　88379649　68995259　　读者信箱：hzjsj@hzbook.com

译 者 序

美国金融数学专家 Ali Hirsa 与 Salih N. Neftci 合著的《An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives》是一部在美国和欧洲非常流行的著作．本书使用随机微积分知识讨论金融衍生品定价理论，简单易懂、内容丰富．作者以高超的手法对金融衍生品定价中所需的数学理论进行了全面的描述和总结，并系统地介绍了金融衍生品的常用定价方法和最新进展．两位作者都有多年业界工作经验，与此同时又都热爱教学．Ali Hirsa 为哥伦比亚大学与纽约大学兼职教授，Salih N. Neftci 生前先后工作于纽约城市大学(CUNY)、新学院(The New School)、Baruch College、国际货币基金组织、世界银行等．

近几年来，金融衍生品定价理论在国际金融界和数学界受到了越来越广泛的重视，国内外出版了大量有关金融衍生品定价理论方面的专著和教科书，然而这些书中，在阐述其主要内容(如关于期权的定价理论等)时，大都直接或间接地使用了随机过程、随机分析、高级计量经济学、运筹学等现代数学知识，并且把这些知识作为读者已经掌握的东西．而另一方面，目前一般大学本科生所掌握的数学工具主要是微积分、线性代数和初等概率论，此类著作中涉及的现代数学知识远远超出了包括数学专业在内的大学生的知识范畴，甚至在金融投资部门从事实际工作的专业人员也难以适从，本书以其起点低、直观易懂的特点使人感到眼前一亮．它系统、全面地介绍了金融衍生品定价理论的基本内容．并将读者应该具备的数学基础严格限定在包括经济、金融、管理等专业的绝大多数本科生的水平．由于作者在内容选择、结构安排和逻辑体系设计方面的精巧构思，所以能以相对较少的篇幅，把书中所讨论的问题的经济背景以及解决这些问题的数学方法和基本思想，系统而又简洁明快地展示给读者，其中某些问题的讲述还具有相当的深度．相信那些从事实际工作的读者以及对该学科感兴趣的在校本科生或研究生读者会大为受益，本书适合作为高等院校财经类专业、数学类专业以及学习过微积分、概率论课程的其他专业的本科学生或研究生的教材，同时也适合从事金融工作的在职人员阅读．

受机械工业出版社华章分社之托，我们将此书的第 3 版译成中文．全书由上海财经大学数学学院冉启康教授，硕士研究生葛泓杉、李君格共同翻译，王佳捷老师参与了校对工作。在翻译过程中，我们得到机械工业出版社华章分社王春华编辑的大力帮助，在此表示衷心的感谢！限于时间和水平，译文的不当之处在所难免，敬请本书的读者和有关领域的专家批评指正．

译者
2016 年 2 月

符号和缩写列表

$\mathbf{R}$	实数集
$\mathbf{R}^+$	正实数集
$\mathbf{Z}$	整数集
$\mathbf{N}$	自然数集
$p(t, T)$	T 时刻到期的零息债券在 t 时刻的价格
r_t	日历时间 t 的瞬时短期利率
B_t	0 时刻以 1 美元为本金，按瞬时短期利率计息，到时间 t 所得的本息之和
$f(t, T)$	日历时间 t 所观察到的未来$[T, T+\mathrm{d}t]$时段内的瞬时远期利率
P	现实世界(真实)测度
Q	风险中性测度
$E(x)$	x 在某测度下的数学期望
$E_t(x)$	已知截止到时间 t 的所有信息，x 在某测度下的条件期望

目　录

第1章 金融衍生品概论

1.1 引言

本书是一本介绍金融衍生品量化方法的读物，它是一本比较简单而且具有启发性的从数学概念入手，将数学应用于金融市场的读物．

因为这是一本讨论资产定价背后的理论依据的书，在阅读本书的诸多案例时，读者需要理解资产价格的严谨定价方法，所以我们有必要对所研究的证券作简要的介绍，本章就是为了这一目的而编写的．读者可以阅读一些其他的书籍来获得更多有关衍生品的背景知识，Hull(2009)是一本很好的参考读物，Jarrow 和 Turnbull(1996)介绍了另外一种方法．Ingersoll(1987)和 Duffie(1996)的内容更深入了一步，它们介绍了衍生品与其价格之间的内在理论联系．Das(1994)是一本关于衍生品合约的实用内容指南．此外，Wilmott(1998)介绍了有关衍生品定价的一些新方法． 1

本章首先介绍金融衍生品的两个基本概念：期权和远期(期货)；接下来，我们将介绍更复杂的衍生品：互换交易；最后，我们将证明：一个复杂的互换交易可以分解为若干个远期和期权的组合．这种分解是非常有用的，因为只要我们能够对远期和期权定价，我们就能重组出任何互换交易并定价．本章还将给出一些记号，这些记号将贯穿全书．

1.2 定义

用从业者的话来说，“衍生证券是一种金融合约，其价值是根据其他一些现金市场工具(如股票、债券、现金、货物)的表现衍生出来的”．[⊖]

学术上对衍生品的定义更加严谨．

定义1 (Ingersoll, 1987). *对于一份金融合约，如果它在到期日 T 的价格完全取决于 T 时刻某标的现金工具的市场价格，那么就称该合约是一种衍生证券，也叫未定权益．*

根据定义，在衍生合约的到期日 T，衍生资产的价格 $F(T)$ 完全取决于标的资产的价格 S_T，在到期日之后，该证券不复存在．衍生品的这一简单性质在定价过程中起到了非常重要的作用．

在本书中，我们用 $F(t)$ 或 $F(S_t, t)$ 表示衍生品的价格，S_t 表示标的资产的价格，t 表示时间．金融衍生品有时候会获得收益 $\mathrm{d}t$，有时候没有收益，T 总表示到期日．

1.3 衍生品的分类

我们可以将衍生证券分为三大类：

⊖ 参见 Klein 和 Lederman(1994)，第2～3页．

1）期货和远期合约．

2）期权．

3）互换．

远期合约和期权被视为两大基本衍生证券，互换和其他一些复杂证券被称为混合证券，最终能被分解为一些基本的远期合约和期权．

我们用 S_t 表示相关金融工具(即标的资产)的价格．

主要有以下 5 种标的资产：

1）股票：是生产商品或提供服务的企业所发出的具有真实回报的所有权凭证．

2）货币：是指来自政府或银行的债务，它对实体资产没有直接的所有权．

3）利率：实际上，利率并非资产，因此需要设计一种名义资产，以便人们应对将来的利率变化，欧洲美元期货就是一个例子．此类目中还包括债券、票据、短期国债的衍生品．债券、票据和短期国债是政府的借债工具，政府承诺在规定日期对所有人支付相应金额．通过操作债券、票据、短期国债的衍生品，人们可以应对将来各种利率的变化．在大多数
2 情况下[⊖]，这类衍生工具是会生效并产生标的资产的实际交付，而不是仅停留在纸面上．

4）指数：S&P 500 股价指数和 FTSE100 股价指数是两个股票指数的例子，CRB 商品指数是一种商品价格指数．这些指数本身不是资产，但指数合约具有名义金额并且能够被买卖，其价格变化对应于标的指数的变化．

5）大宗商品：主要的类目包括

- 软商品：可可、咖啡、糖．
- 谷物及油籽：大麦、玉米、棉花、燕麦、棕榈油、马铃薯、大豆、冬小麦、春小麦等.
- 金属：铜、镍、锡等．
- 贵金属：黄金、铂金、银．
- 家畜：牛、猪、五花肉等．
- 能源：原油、燃油等．

这些标的商品并非金融资产，它们在性质上属于商品．因此在大多数情况下，这些商品会参与实际交易和贮藏．

此外，还有另外一种分类标的资产的方法，该方法对我们学习本书很有帮助．

1.3.1 现金交易市场

有些金融衍生品的标的资产属于现金交易市场，这类标的资产包括黄金、白银、货币、长期国债等．

在这类市场中，人们可以以无风险的利率借入资金(需要实物资产抵押)来购买并储藏现金交易市场中的商品，并安全持有直至衍生合约到期．另一方面，人们也可以轻松地获

⊖ 在巴黎，有大量“名义”法国政府债券的交易．

得这些商品的远期合约或期货合约.

例如，人们可以以无风险利率借入资金来购买长期国债，并且在相应的期货合约的交割日前持有该国债．这就等价于购买一份期货合约并在到期日进行交割．人们也可以对货币、黄金、白银、原油等商品作类似的操作.㊀

纯粹的现金交易市场还有一个性质，关于标的工具未来需求与供给的信息，不影响现价和远期价格的价差．这种价差只依赖无风险利率的水平、贮藏和保险费用等，标的工具供需情况的信息对现价和远期价格造成等额的变化.

1.3.2 价格发现市场

第二种标的资产来自价格发现市场．在这里，标的工具在期权到期日之前不会产生实物交易或贮藏，这类货物可能是易于腐坏不宜贮藏的，也可能是在衍生品交易时根本不存在. 一个典型的例子是春小麦，当春小麦的期货合约签订时，对应的现金市场还不存在.

借入、购买、贮藏资产直到未来的某个到期日从而盈利，这样的策略在价格发现市场中不可行. 在这些条件下，任何关于未来标的商品供给和需求的信息不会影响对应的现金价格. 这种信息会在未来市场中被人们发现，包括合约期间.

1.3.3 到期日

衍生品价格 $F(t)$ 和标的资产价格 $S(t)$ 的关系仅在到期日 T 明确已知．对于远期合约或期货，我们自然地假定 3

$$F(T) = S_T \tag{1.1}$$

也就是说，在到期日 T，期货合约的价值应该等于其现金等价物.

例如，一份承诺交付 100 盎司黄金的(场内交易)期货合约，在到期日其价值应该和现金交易市场上 100 盎司黄金的价格保持一致．在时间 T，它们完全等价，因此，对于黄金期货，我们可以确切地说等式(1.1)是成立的.

当 $t<T$ 时，$F(t)$ 可能不等于 S_t，但我们可以建立一个函数，得到 S_t 和 $F(t)$ 的关系.

1.4 远期合约和期货

期货和远期合约是线性工具，下面我们将首先讨论远期合约，最后再简要介绍期货和远期合约的区别.

1.4.1 远期合约

定义 2 远期合约是一个在确定的将来时刻按确定的价格购买或出售某项资产的协议.

㊀ 然而，对原油来说，储藏费用非常高，这一切是环境等因素造成的.

双方的合约必须指明交割日和远期价格．如果远期购买成立，该合约的购买方称作标的资产的多头方．如果在交割日现价比远期价格更高，多头方盈利，否则，蒙受损失．

图 1-1 简单给出了多头方损益与标的物现价的关系．合约在 t 时刻以 $F(t)$ 价格被购买，假定合约 $t+1$ 时刻过期，向上倾斜的直线显示交割日多头方的损益．直线斜率为 1.

4

如果 S_{t+1} 大于 $F(t)$，那么多头方将获利[⊖]．如果直线斜率为 1，线段 AB 的长度等于垂线段 BC，$t+1$ 时刻的损益可以用 BC 线段的长度来表示．

图 1-2 给出了同样条件下空头方的损益情况．

这种损益图对理解衍生品原理很有帮助，本书不作进一步介绍，读者可以阅读 Hull(2009)的书以便进一步了解这些内容．

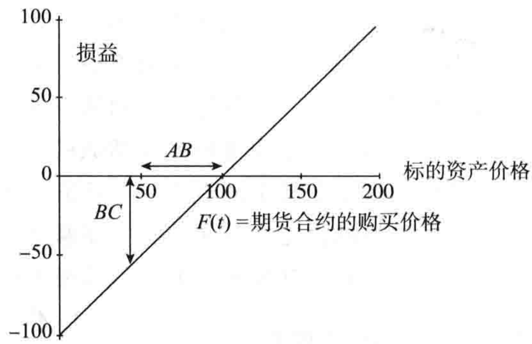

图 1-1 远期合约中多头方的收益图

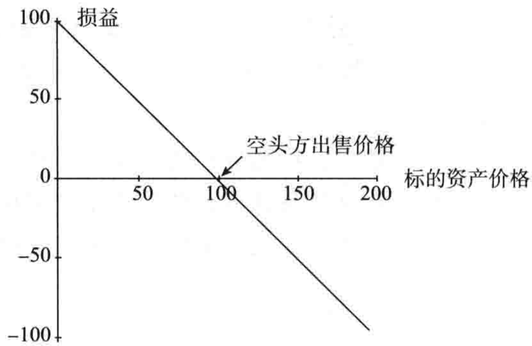

图 1-2 远期合约中空头方的收益图

1.4.2 期货

期货和远期合约很类似，主要有以下区别：

期货通常在交易所内交易，交易所详细规定期货合约的标准化条款，设定若干具体交割日期．远期合约交易事项由双方协商确定，在场外进行交易．

交易所负责结算期货交易，并提供复杂的机制以减少违约风险．

此外，期货合约实行逐日盯市制度．也就是说，每天交易结束时，投资者的保证金账户要进行调整，以反映其盈利或损失．

1.4.3 回购协议、反向回购协议及弹性回购协议

附买回协议，又称回购协议，是指证券交易的双方在进行交易的同时，以契约的方式约定在将来的某一日以约定的价格，由证券的卖方(正回购方)向买方(逆回购方)购回该笔证券的交易行为，回购价格和原价格的差异取决于回购利率．证券的购买者相当于债权人，而出售者相当于债务人，证券就相当于这笔有固定利率的债务的抵押．一份回购协议可以视为现货销售和远期合约的组合．在现货销售中贷款人向借款人提供货币，债券则被合法

⊖ 由于合约在 $t+1$ 时刻到期，S_{t+1} 将等于 $F(t+1)$.

转让给贷款人作为交换．远期合约保证了借款人付清贷款以及贷款人退还债券．远期合约价格和现货价格之差相当于借款的利息，而远期合约的交割日是这笔债务的还款日．

回购协议可分为三种：(a)隔夜回购，(b)定期回购，(c)不定期回购．隔夜回购的到期日为第二天，定期回购的到期日为一个特定的时间，不定期回购没有明确的终止日期．回购交易通常有以下三种形式：递送、第三方协议回购、持有保管(这种情况下出售方在回购期间持有证券)．持有保管主要用于防范以下风险：逆回购方在协议到期前破产，则正回购方无法获得作为抵押物的证券．

出售证券并承诺将来回购的一方，成为*正回购方*．购买证券并承诺将来出售的一方，成为*逆回购方*．

回购通常用来筹集短期资金，属于货币市场工具．

弹性回购协议是一种回购时间灵活机动的回购协议．该协议下，逆回购方可以在一定范围内提前将证券卖给回购方，而非恰好在约定日的当天，提前执行的金额和时间都是灵活的．

弹性回购和传统回购主要有 4 个区别：

- 由于现金可提取，具有凸性．
- 像交易一样正式签订条款． 5
- 更多的合同(有额外的合同提供信用支持和破产保护)．
- 在弹性回购市场，合同的一方是市政债券发行者．

弹性回购主要分为两类：有担保的，没有担保的．

对于担保弹性回购，逆回购方将收到抵押物，其委托人将为其监管并结算抵押物，抵押物一般是国库券、GNMA 债券、机构 MBS/CMO 等．用作抵押物的证券种类在相关文件和求证建议书(RFP)中都有具体的介绍，在大多数情况下，抵押物来自逆回购市场，例如，银行将一笔证券买来并签订协议将其出售回去．

对于非担保弹性回购，客户并不会收到抵押物，在这种情况下，客户可能会得到更高的回报．一笔非担保弹性回购的平均面额一般在一到二千万美元，其金额一般低于担保弹性回购．

1.5 期权

期权是资产定价中的第二个基本衍生品．在后面的章节中，我们经常用定价模型去研究看涨期权的价格，以此作为介绍随机积分的例子．

远期合约和期货规定了合约双方在交割日对标的资产进行交割的义务．而期权所有者拥有执行交割的权利，而非义务．

期权主要分为以下两类：

定义 3 *某证券 S_t 的欧式看涨期权是指：在到期日 T 以执行价格 K 购买一份该证券的权利，该权利只有在到期日才能实施，且可放弃．在到期日之前的时刻 t，该期权可以以价* 6