数学竞赛

MATHEMATICS OLYMPIAD

21

湖南教育出版社

ISBN 7-5355-1857-5

9 787535 518576 >

ISBN 7 - 5355 - 1857 - 5 ／G · 1852

定　价：2.70元

（湘）新登字005号

数学竞赛

湖南教育出版社

21

数 学 竞 赛（21）
本 社 编
责任编辑：欧阳维诚
湖南教育出版社出版发行（东风路附1号）
湖南省新华书店经销 湖南省新华印刷三厂印刷
850×1168毫米 32开 印张：4.125 字数：100000
1994年4月第1版 1994年4月第1次印刷
ISBN7—5355—1857—5／G·1852
定价：2.70元

目　录

初数论丛

他山之石

1993年全国高中数学联赛试题

卞 质 朴

第一试

一、**选择题**(本题满分30分，每小题5分)

本题共有6个小题，每小题给出了(A)、(B)、(C)、(D)四个结论，其中只有一个是正确的，请把正确结论的代表字母写在题中圆括号内.

1. 若 $M=\{(x、y)\}||\mathrm{tg}\pi y|+\sin^2\pi x=0|$,

$N=\{(x、y)|x^2+y^2\leqslant 2\}$.

则$M\bigcap N$的元素个数是(　　).

(A) 4;　　(B) 5;　　(C) 8;　　(D) 9.

2. 已知 $f(x)=a\sin x+b\sqrt[3]{x}+4$ (a, b 为实数)，且 $f(\lg\log_3 10)=5$，则 $f(\lg\lg 3)$ 的值是(　　).

(A) -5;　　(B) -3;　　(C) 3;　　(D) 随 a、b 取不同值而取不同值.

3. 集合 A、B 的并集 $A\bigcup B=\{a_1,a_2,a_3\}$，当 $A\neq B$ 时，(A, B) 与 (B, A) 视为不同的对，则这样的 (A, B) 对的个数有(　　).

(A) 8;　　(B) 9;　　(C) 20;　　(D) 27.

4. 若直线 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 被曲线 C:

$(x-\arcsin\alpha)(x-\arccos\alpha)+(y-\arcsin\alpha)(y+\arccos\alpha)$

$=0$ 所截得的弦长为 d，则当 α 变化时，d 的最小值是（ ）.

(A) $\frac{\pi}{4}$; (B) $\frac{\pi}{3}$; (C) $\frac{\pi}{2}$; (D) π.

5. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边边长分别是 a, b, c. 若 $c-a$ 等于 AC 边上的高 h，则 $\sin\frac{C-A}{2}+\cos\frac{C+A}{2}$ 的值是（ ）.

(A) 1; (B) $\frac{1}{2}$; (C) $\frac{1}{3}$; (D) -1.

6. 设 m, n 为非零实数，i 为虚数单位，$z\in C$，则方程

$$|z+ni|+|z-mi|=n \qquad (1)$$

与

$$|z+ni|-|z-mi|=-m \qquad (2)$$

在同一复平面内的图形（F_1, F_2 是焦点）是（ ）.

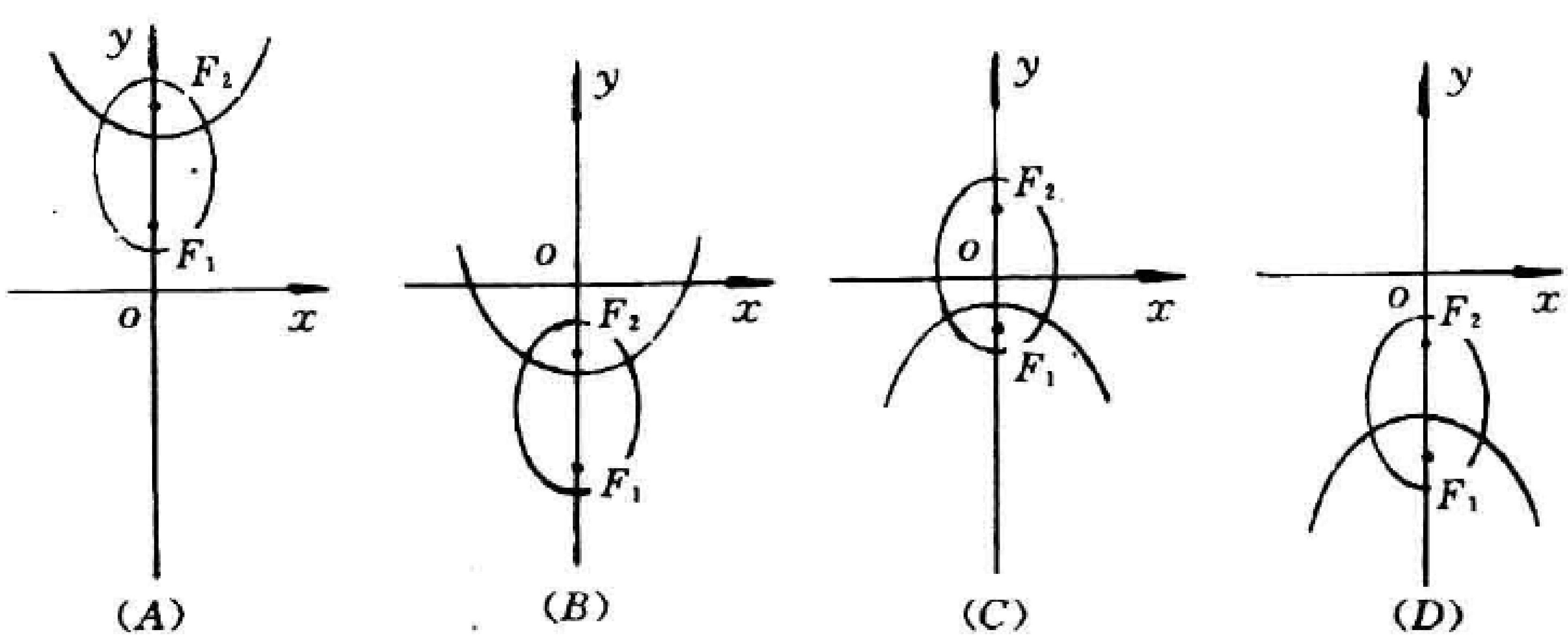

图 1

答案：

答案	1	2	3	4	5	6
提示	D	C	D	C	A	B

提示：1. 由 $\mathrm{tg}\pi y=0$ 得 $y=k\ (k\in z)$，$\sin\pi x=0$ 得 $x=k'\ (k'\in Z)$. 又 $x^2+y^2\leqslant 2$，知 $k=-1, 0, 1$，$k'=-1, 0, 1$. (k, k') 共有 9 个.

2. $f(x)-4$ 为奇函数，故 $f(-x)-4=-(f(x)-4)$.

即 $f(-x)=8-f(x)$. 因 $\lg\lg 3=-\lg\log_3 10$. 故 $f(\lg\lg 3)=8-f(\lg\log_3 10)=8-5=3$.

3. 记集合 M 的元素个数为 $|M|$, 则 $|A|\leqslant 3$, $|B|\leqslant 3$. 若 $|A|=3$, 则 B 可有 2^3 个, (A, B) 有 $2^3=8$ 个; 若 $|A|=2$, 则 A 有 C_3^2 个, 每个对应的 B 有 $2^2=4$ 个, (A, B) 有 $C_3^2\cdot 2^2=12$ 个; 若 $|A|=1$, A 有 C_3^1 个, 每个对应的 B 有 2 个, (A, B) 有 $C_3^1\times 2=6$ 个; 若 $|A|=0$, 对应的 B 有 1 个, (A,B) 有 1 个. 故共有 $8+12+6+1=27$ 个.

4. 曲线 C 是以 P_1 $(\arcsin\alpha, \arcsin\alpha)$ 和 P_2 $(\arccos\alpha, -\arccos\alpha)$ 两点为直径端点的圆. 其圆心的横坐标为 $x=(\arcsin\alpha+\arccos\alpha)/2=\pi/4$. 直线 $x=\pi/4$ 过圆心, d 为直径. $d\geqslant \pi/2$. 当 $\arcsin\alpha=\arccos\alpha$ 时等号成立.

5. 作右图, $1=c-a=h=a$. 这时 $A=30°$, $C=90°$, $\sin\dfrac{C-A}{2}+\cos\dfrac{C+A}{2}=\sin 30°+\cos 60°=1$.

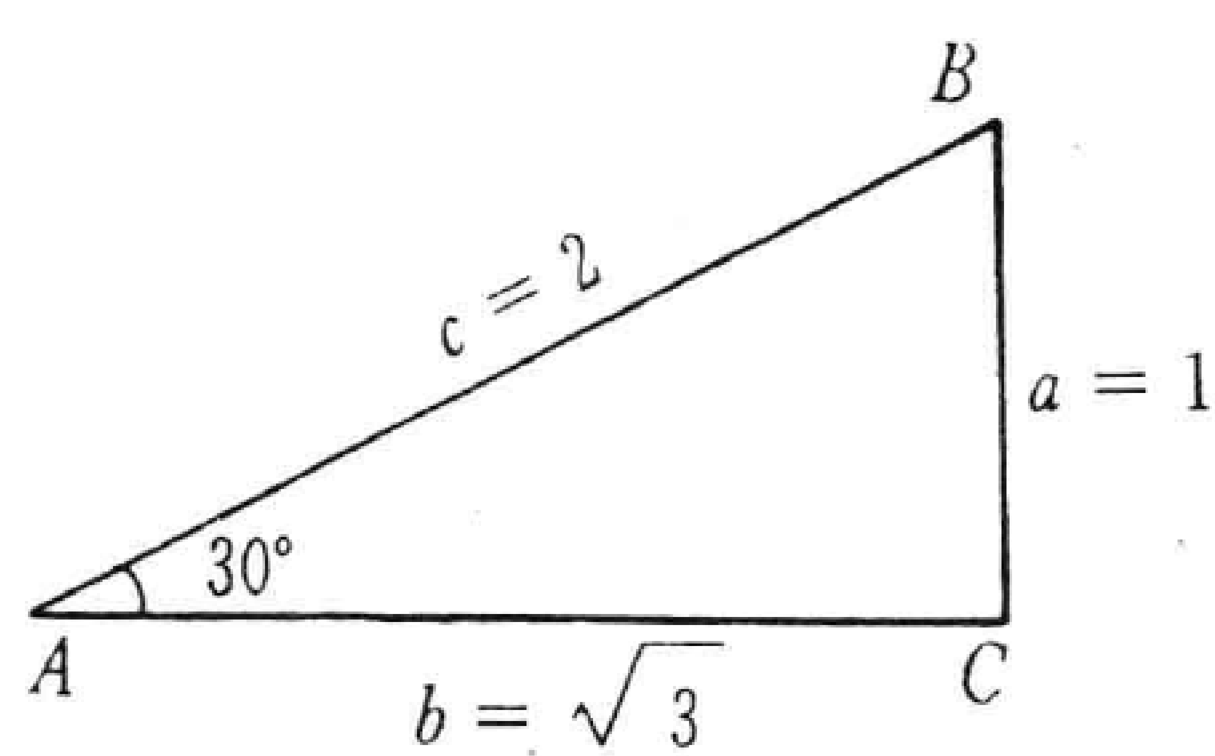

图2

6. (1) 为以 F_1 $(0, -n)$, F_2 $(0, m)$ 为焦点的椭圆, (2) 为以 $F(0, -n)$, F_2 $(0, m)$ 为焦点的双曲线的一支. 由 (1) 知 $n>0$, $m<0$, 由 (2) 得 $|z+ni|-|z-mi|=-m<n$. 于是 F_1, F_2 的位置只能为 (B) 或 (D). 且双曲线上的点离 F_2 较近, 故如 (B) 所示.

二、填空题（本题满分 30 分，每小题 5 分）

1. 二次方程

$(1-i)x^2+(\lambda+i)x+(1+i\lambda)=0$ (i 为虚数单位，$\lambda\in R$) 有两个虚根的充分必要条件是 λ 的取值范围为 ________.

2. 实数 x, y 满足 $4x^2-5xy+4y^2=5$，设 $S=x^2+y^2$，则 $\frac{1}{S_{\max}}+\frac{1}{S_{\min}}$ 的值为 ________.

3. 若 $z\in C$，$\arg(z^2-4)=\frac{5\pi}{6}$，$\arg(z^2+4)=\frac{\pi}{3}$，则 z 的值是 ________.

4. 整数 $\left[\frac{10^{93}}{10^{31}+3}\right]$ 的末尾两位数字是 ________.（先写十位数字后写个位数字，$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数）.

5. 设任意实数 $x>y>z>t>0$，要使 $\log_{x/y}1993+\log_{y/z}1993+\log_{z/t}1993\geqslant k\cdot\log_{x/t}1993$ 恒成立，则 k 的最大值是 ________.

6. 三位数 $\{100, 101, \cdots 999\}$，共 900 个，在卡片上打印这些三位数，每张卡片打印一个三位数．有的卡片所印的，倒过来仍为三位数，如 198 倒过来看是 861（认为 0, 1, 6, 8, 9 可以倒过来分别视为 0, 1, 9, 8, 6）；有的卡片则不然，如 531 倒过来看是 1ƐS．因此，有些卡片可以一卡二用．于是至多可以少打 ________ 张卡片．

答案：

题号	1	2	3	4	5	6
答案	$\lambda\neq 2$	$\frac{8}{5}$	$\pm(1+\sqrt{3}i)$	08	9	34

提示：1. 反设方程有实根 x_0，则代入方程后并令虚实两部为 0，即 $x_0^2+\lambda x_0+1=0$ 和 $-x_0^2+x_0+\lambda=0$. 两式相加得 $(\lambda+1)(x_0+1)=0$，推出当且仅当 $\lambda=2$ 时，方程有实根．

2. 设 $x=\sqrt{s}\cos\theta$，$y=\sqrt{s}\sin\theta$，代入 $4x^2-5xy+4y^2=5$，

得 $\sin 2\theta=\dfrac{8s-10}{5s}$，于是 $\left|\dfrac{8s-10}{5s}\right|\leqslant 1$，推出 $\dfrac{10}{13}\leqslant s\leqslant\dfrac{10}{3}$.

3. 利用复数的几何意义，如图，C 为直角三角形斜边的中点，$|OC|=4$，即 $|z^2|=4$，$\arg z^2=\dfrac{5\pi}{6}-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{2\pi}{3}$. $z^2=4\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$，$z=\pm(1+\sqrt{3}i)$.

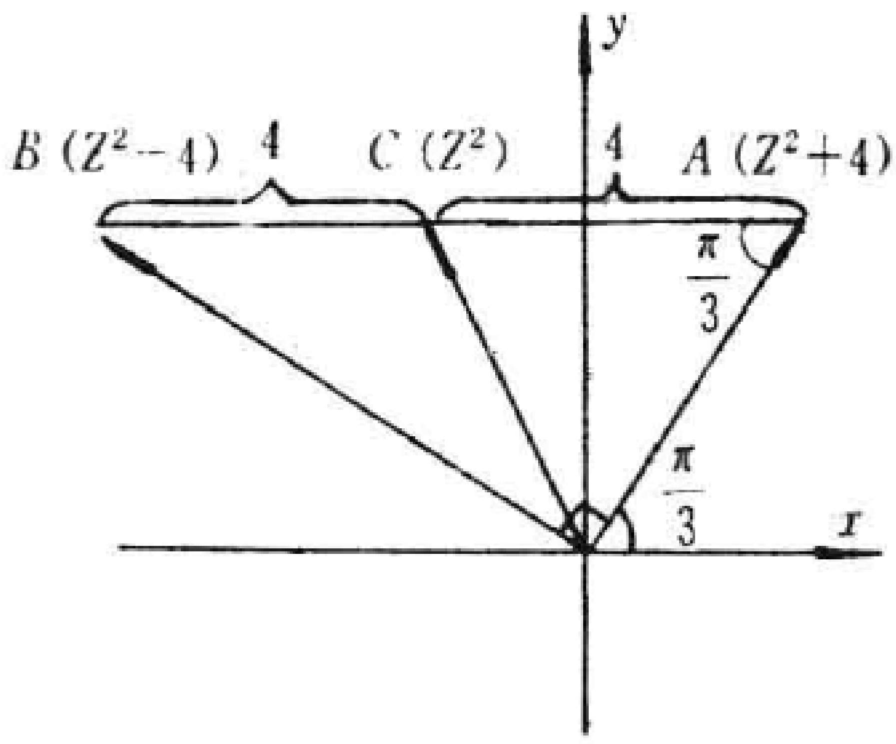

图 3

4. $\left[\dfrac{10^{93}}{10^3+3}\right]=\left[\dfrac{(10^{31})^3+3^3-3^3}{10^{31}+3}\right]=(10^{31})^2-3\cdot10^{31}+3^2-1$ 知末尾两位数字为 08.

5. 将原不等式改写为:

$$\frac{1}{\log_{1993}\frac{x_0}{x_1}}+\frac{1}{\log_{1993}\frac{x_1}{x_2}}+\frac{1}{\log_{1993}\frac{x_2}{x_3}}\geqslant k\frac{1}{\log_{1993}\frac{x_0}{x_1}\cdot\frac{x_1}{x_2}\cdot\frac{x_2}{x_3}},$$

即

$$\frac{1}{\log_{1993}\frac{x_0}{x_1}}+\frac{1}{\log_{1993}\frac{x_1}{x_2}}+\frac{1}{\log_{1993}\frac{x_2}{x_3}}\geqslant k\frac{1}{\log_{1993}\frac{x_0}{x_1}+\log_{1993}\frac{x_2}{x_1}+\log_{1993}\frac{x_2}{x_3}}$$

利用平均值不等式即得 $k_{\max}=9$.

6. 可倒过来的数的十位数可取 0, 1, 6, 8, 9, 百位数和个位

数可取 1, 6, 8, 9. 这种三位数共有 $5\times 4^2=80$ 个. 但有的数倒过来仍为原数(如 619), 这种数字的十位数只能取 0, 1, 8; 百位数可取 1, 6, 8, 9 个位数随之确定为 1, 9, 8, 6, 共有 $3\times 4=12$ 个. 可省去卡片 $\frac{1}{2}(80-12)=34$ 张.

三、(20 分) 三棱锥 $S-ABC$ 中, 侧棱 SA、SB、SC 两两互相垂直. M 为 $\triangle ABC$ 的重心, D 为 AB 中点, 作与 SC 平行的直线 DP. 证明:

(1) DP 与 SM 相交;

(2) 设 DP 与 SM 的交点为 D', 则 D' 为三棱锥 $S-ABC$ 的外接球球心.

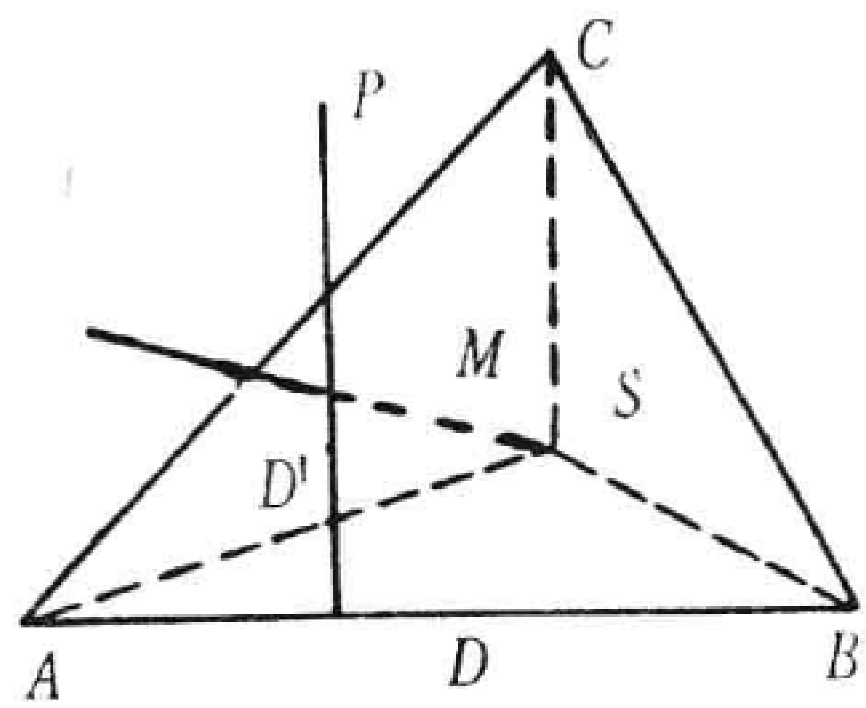

图 4

证法一 如图 4,

(1) 因为 $DP\parallel SC$, 所以 DP 与 SC 在同一平面 α 上, 中线 CD 与重心 M 也在 α 上. 于是 SM 在 α 上, 即 SM 与 DP 共面. 因 $SC\parallel DP$, 故 $SM\nparallel DP$, 所以 DP 与 SM 必相交于一点 D'.

(2) 因为 $SC\perp SA$, $SC\perp SB$, 所以 $SC\perp$ 平面 (SAB). $DD\parallel SC$, 所以 $DP\perp$ 平面 (SAB). 在直角三角形 ASB 中, D 为斜边 AB 中点, 所以 $DA=DB=DS$. 由斜线长定理易得 $D'A=D'B=D'S$. 因为 $\triangle DD'M\backsim\triangle CSM$, 所以 $\frac{MD'}{SM}=\frac{MD}{CM}=\frac{1}{2}$.

同理, 过 BC 中点 E, 作与 SA 平行的直线, 必与 SM 相交于一点 E'. 且 $E'B=E'C=E'S$, 以及 $\frac{ME'}{SM}=\frac{1}{2}$. 故 E' 与 D' 重合, 且 $D'A=D'B=D'C=D'S$. 即 D 为三棱锥 $S-ABC$ 的外接球球心.

证法二 如图 5, 把 $S-ABC$ 补成长方体 $SAC'B$

$-CB'S'A'$, 这时 $CSC'S'$ 也为一长方形 . AB 与 SC 互相平分于 D 点 , CD 也在平面 $CSC'S'$ 上 , $DP /\!/ SC$, DP 在平面 $CSC'S'$ 上 . 设 SS' 分别交 DP、CD 于 D', M', 则 $DD' = \frac{1}{2}C'S' = \frac{1}{2}SC$, 所以 $DM' = \frac{1}{2}CD$. 所以 M 与 M' 重合 , SM 与 DP 相交于 D'. 且因 D' 为 SS' 中点 , 即长方体对角线的交点 , 故为长方体外接球球心 , 亦即 $S-ABC$ 的外接球球心 .

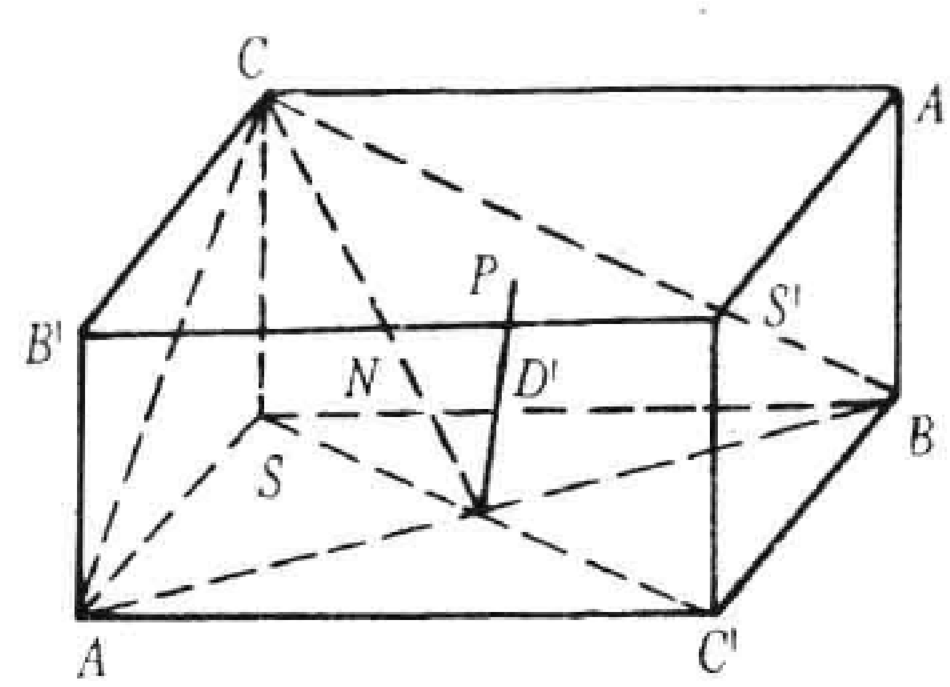

图5

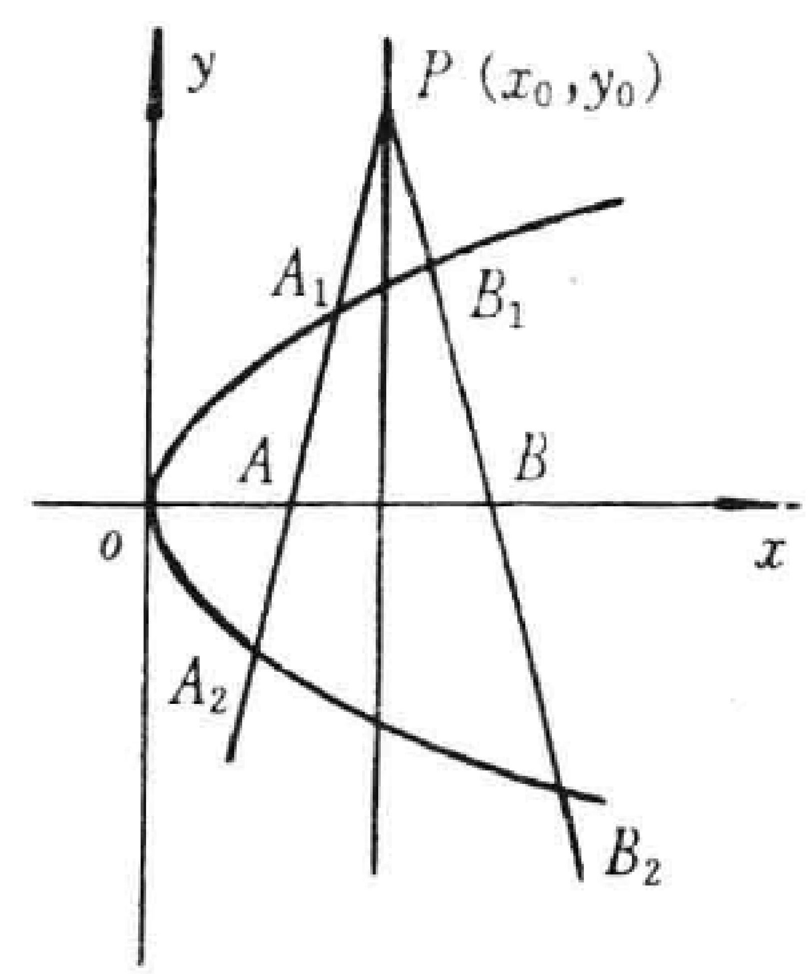

图6

四、(20 分) 设 $0 < a < b$, 过两定点 $A(a,0)$ 和 $B(b,0)$ 引直线 l 和 m, 使与抛物线 $y^2 = x$ 有四个不同的交点 , 当这四点共圆时 , 求直线 l 与 m 的交点的轨迹 .

解法一 设直线 l 与 m 的交点为 $P(x_0, y_0)$, 它们与 x 轴的倾角分别为 θ_1 与 θ_2, 于是

$$l:\ \begin{cases} x = x_0 + t\cos\theta_1 \\ y = y_0 + t\sin\theta_2 \end{cases} \ (t \text{ 为参数}) \tag{1}$$

$$m:\ \begin{cases} x = x_0 + t\cos\theta_2 \\ y = y_0 + t\sin\theta_2 \end{cases} \ (t \text{ 为参数}) \tag{2}$$

将 (1) 代入抛物线方程 $y^2 = x$, 得

$$t^2\sin^2\theta_1 + t(2y_0\sin\theta_1 - \cos\theta_1) + (y_0^2 - x_0) = 0$$

它的两个根 t_1, t_2 满足

$$|t_1|\cdot|t_2| = |y_0^2 - x_0| / \sin^2\theta_1$$

根据参数的几何意义得

$$|PA_1|\cdot|PA_2| = |y_0^2 - x_0| / \sin^2\theta_1$$

把 (2) 代入方程 $y^2 = x$, 同理可得

$$|PB_1|\cdot|PB_2| = |y_0^2 - x_0| / \sin^2\theta_2$$

当 A_1, A_2, B_1, B_2 四点共圆时，由圆幂定理

有 $|PA_1|\cdot|PA_2| = |PB_1|\cdot|PB_2|$, 或 $\sin^2\theta_1 = \sin^2\theta_2$, 故 $\theta_1 = \theta_2$, 或 $\theta_1 = \pi - \theta_2$. 但当 $\theta_1 = \theta_2$ 时，$l /\!/ m$, 所以 $\theta_1 + \theta_2 = \pi$. 于是，过 $A(a,0)$、$B(b,0)$ 的直线方程分别为

$$l:\ y = k(x-a),$$

$$m:\ y = -k(x-b).$$

它们的交点 $P(x_0, y_0)$ 的坐标为

$$x_0 = (a+b)/2, y_0 = k(b-a)/2.$$

所以，交点 $P(x_0, y_0)$ 在 AB 的中垂线上. 故所求的轨迹是 AB 线段的垂直平方线，除去它与 x 轴的交点和与抛物线 $y^2 = x$ 的交点以后的部分.

解法二 设 l 与 m 的方程分别为:

$$l:\ y = k(x-a) \qquad (1)$$

$$m:\ y = k'(x-b) \qquad (2)$$

则过 l, m 与 $y^2 = x$ 的四个不同交点的二次曲线，应有方程

$$(y^2 - x) + \lambda(y - kx + ka)(y - k'x + k'b) = 0$$

即 $$(1+\lambda)y^2 - \lambda(k+k')xy + \lambda kk'x^2 + \lambda(ka+k'b)y - (\lambda kk'(a+b)+1)x + \lambda kk'ab = 0 \qquad (3)$$

(3) 成为一个圆的充要条件是

$$\begin{cases}\lambda(k+k')=0\\ \lambda kk'=1+\lambda\end{cases}\quad \text{即}\begin{cases}k=-k'\\ \lambda=-\dfrac{1}{1+k^2}\end{cases}$$

所以，两动直线 (1) 与 (2) 的交点 $P(x_0, y_0)$ 的坐标为 $x_0=(a+b)/2, y_0=k(b-a)/2$. 即点 P 在 AB 线段的中垂线上.

所以，P 点的轨迹是直线 $x=(a+b)/2$ 除去与 $y=0$ 和 $y^2=x$ 的三个交点后的部分.

五、(20 分) 设正数列 $a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots$ 满足

$$\sqrt{a_n a_{n-2}}-\sqrt{a_{n-1}a_{n-2}}=2a_{n-1}\quad(n\geqslant 2)$$

且 $a_0=a_1=1$. 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解法一 将 $\sqrt{a_n a_{n-2}}-\sqrt{a_{n-1}a_{n-2}}=2a_{n-1}$ 的两边除以 $\sqrt{a_{n-1}a_{n-2}}$，并依次令 $n=2, 3, \cdots n$，得

$$\sqrt{\frac{a_2}{a_1}}-2\sqrt{\frac{a_1}{a_0}}=1\tag{1}$$

$$\sqrt{\frac{a_3}{a_2}}-2\sqrt{\frac{a_2}{a_1}}=1\tag{2}$$

……

$$\sqrt{\frac{a_n}{a_{n-1}}}-2\sqrt{\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}}=1\tag{n-1}$$

$(1)\times 2^{n-2}+(2)\times 2^{n-3}+\cdots+2\times(n-2)+1\times(n-1)$，得

$$\sqrt{\frac{a_n}{a_{n-1}}}-2^{n-1}\sqrt{\frac{a_1}{a_0}}=1+2+2^2+\cdots+2^{n-2}$$

即 $\sqrt{a_n/a_{n-1}}=1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$

$$a_n=(2^n-1)^2a_{n-1}=(2^n-1)^2(2^{n-1}-1)^2a_{n-2}$$

$$= \cdots = \prod_{k=1}^{n} (2^k - 1)^2$$

所以

$$a_n = \begin{cases} 1 & 当 n = 0, \\ \prod_{k=1}^{n} (2^k - 1)^2 & 当 n \in N. \end{cases}$$

解法二 由递推式$\sqrt{a_n a_{n-2}} - \sqrt{a_{n-1} a_{n-2}} = 2a_{n-1}$ 及 $a_0 = a_1 = 1$, 可得

$$a_0 = 1,$$

$$a_1 = 1 = (2^1 - 1)^2$$

$$a_2 = 9 = (2^2 - 1)^2 \cdot (2^1 - 1)^2$$

$$a_3 = 21^2 = (2^3 - 1)^2 \cdot (2^2 - 1)^2 \cdot (2^1 - 1)^2$$

由此猜测

$$a_n = (2^n - 1)^2 \ (2^{n-1} - 1)^2 \cdots (2^1 - 1)^2 \tag{1}$$

下面用数学归纳法证明 (1) 式成立．当 $n = 0, 1$, 已知 (1) 成立，设 $n = k-1, k$ 时，(1) 均成立．则当 $n = k+1$ 时，有

$$a_{k+1} = \left[\frac{\sqrt{a_k a_{k-1}} + 2a_k}{\sqrt{a_{k-1}}} \right]^2 = \left[\sqrt{a_k} + 2\frac{a_k}{\sqrt{a_{k-1}}} \right]^2$$

$$= \left[\prod_{i=1}^{k}(2^i - 1) + 2\prod_{i=1}^{k}(2^i - 1)^2 \Big/ \prod_{i=1}^{k-1}(2^i - 1) \right]^2$$

$$= \left[\prod_{i=1}^{k} (2^i - 1)(1 + 2(2^k - 1)) \right]^2$$

$$= \prod_{i=1}^{k+1} (2^i - 1)^2.$$

即当 $n = k+1$ 时，(1) 也成立．所以，对一切 $n \in N$, (1) 均成

立．于是

$$a_n=\begin{cases}1 & \text{当} n=0\\ \prod\limits_{k=1}^{n}(2^k-1)^2, & \text{当} n\in N.\end{cases}$$

第　二　试

一、(35分) 设一凸四边形 $ABCD$ 的内角中仅有 $\angle D$ 是钝角，用一些直线段将该凸四边形分割成几个钝角三角形，但除去 A、B、C、D 外，在该凸四边形的周界上，不含分割出的钝角三角形顶点．试证 n 应该满足的充分必要条件是 $n\geqslant 4$.

证法一　充分性可分三步:

(1) 连接 AC, 则 $\triangle ADC$ 是一个钝角三角形．

(2) $\triangle ABC$ 是非钝角三角形，一定可将其分成三个钝角三角形．事实上，过 B 作 $BH\perp AC$ 于 H, 以 AC 为直径作半圆，则任取 BH 上在圆内的一点 E, E 与三顶点 A、B、C 的连线即把 $\triangle ABC$ 分成三个钝角三角形 $\triangle ABE$, $\triangle BCE$, $\triangle CAE$. 即将四边形 $ABCD$ 分成了4个钝角三角形．

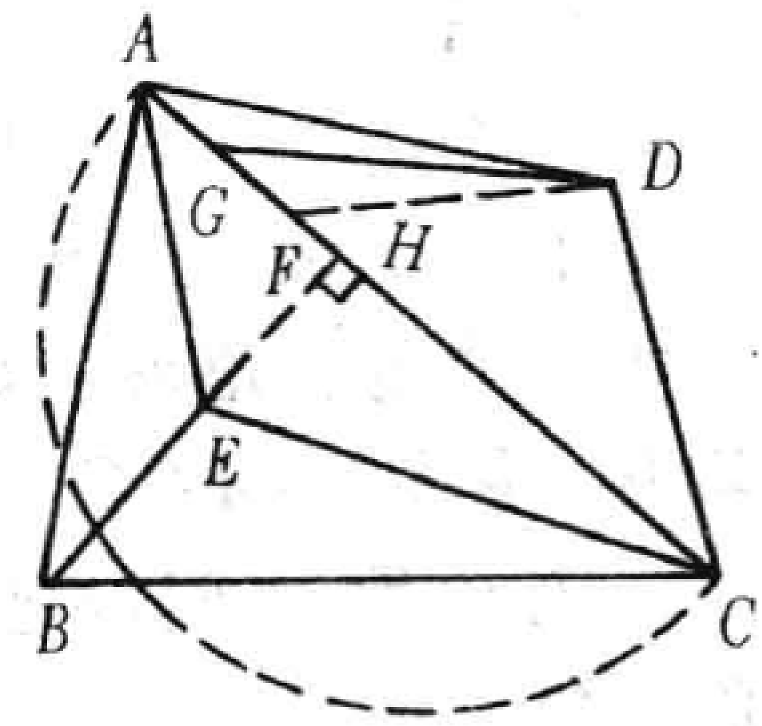

图 7

(3) 当 $n>4$ 时，可在 AC 上取一点 F, 使 $\angle FDC$ 仍为钝角，则在线段 AF 上有无穷多个点，任取一点 G, 则 GD 将 $\triangle ACD$ 分成两个钝角三角形 $\triangle AGD$ 和 $\triangle DGC$, 如此继续可将 $\triangle ADC$ 分成任意多个钝角三角形．

必要性　首先注意，非钝角三角形不能剖分成二个钝角三角形．这是因为从任一顶点向对边作剖分线，顶角不能剖分出钝角，剖分线与对边所成的两个角为邻补角，不能皆为钝角．