高 等 数 学

Gaodeng Shuxue

上 册

万大成 白富多 王维生 主编

哈尔滨工业大学出版社

高等数学

主编　万大成　白富多　王维生

上册

*

哈尔滨工业大学出版社出版

新华书店首都发行所发行

黑龙江省地矿局印刷厂印刷

开本 787×1092　1/16　印张 21.5　插页　　字数 496 千字

1995 年 6 月第 1 版　1995 年 6 月第 1 次印刷

印数 1-5500

ISBN　7-5603-1089-3/O·73　定价 18.80 元

前　　言

高等数学是工科院校的一门重要的基础课，它对培养、提高学生的智能，为后继课程打好基础、提供科学的学习方法，起着重要的作用。本书按照加强基础、精选内容、突出重点，有利教学的原则，并以国家教育委员会1994年所颁布的高等工业学校《高等数学课程教学基本要求》为依据，结合哈尔滨工业大学的传统教学风格，注意吸收国内外同类教材的优点进行编写的，具体地说有如下几点：

(1)在教材中为了加强基础，并引导学习有余力的同学阅读一些有益的课外读物，我们在部分章节的后面加了附录，这些内容是对学习比较好的同学进一步提高数学修养所必备的基础知识。

(2)为了培养学生建立起比较科学的学习方法，加强对基本内容的理解，开阔思路，扩大眼界，逐步提高分析问题和解决问题的能力，我们在多数章节之后都加了一节示范的综合例题，读通这些范例将会对学生学习高等数学是大有裨益的。

(3)为了适应不同层次不同专业的教学要求，在书中也加进了一些非基本要求的内容，这些内容在标题处都加有(*)号，若删去不讲时，也不影响教学体系的连贯性。

本教材分上、下两册，共十一章，前七章为上册，后四章为下册。上册内容为：函数、极限与连续，(由万大成执笔)，导数与微分、中值定理与导数的应用(由白富多执笔)，不定积分、定积分(由王维生执笔)，微分方程(由万大成执笔)。下册内容为：无穷级数(由万大成执笔)，矢量代数与空间解析几何、多元函数微分学(由白富多执笔)，多元函数积分学(由王维生执笔)。全书由万大成统编定稿。

本书曾在哈尔滨工业大学校内试用多年。参加工作的还有富景隆、杨克劭、张宗达、刘锐、龙文庭、孙振绮等，试用过本书的老师都曾提出过很多宝贵意见，在此致以衷心的感谢。

由于作者水平所限，书中不当之处，恳请读者批评指正。

编者

1995.2于哈尔滨工业大学

目　　录

第一章　函　　数

函数是高等数学的研究对象，在中学的数学课程里已有介绍，本章将对函数的有关概念做进一步讨论。

§ 1.1　函数的概念

一、常量与变量

数学是研究数量关系和空间形式的一门科学。我们在观察各种自然现象或研究实际问题的时候，会遇到许多不同类型的量，例如时间、面积、温度、压力、速度等。这些量在度量单位选定之后，度量结果所取的数值均可用实数表示。在考察的过程中，数值保持不变（或说只取同一值）的量称为常量；数值变化（或说可取不同值）的量称为变量。例如，自由落体在下落过程中，下落时间和下降距离是变量，而落体质量可看作常量。再如，将一密封容器内的气体加热，气体的体积和分子数目显然是常量，而气体的温度和压力是变量。应当指出，在数学中，常抽去变量或常量的具体含义，而只研究某一过程中这些量在数值上的关系，且这些量只取实数值。只取实数值的变量称为实变量，本书只讨论这种变量，如无特别说明，今后所讨论的变量均指实变量，简称为变量。

在本书中常用英文的前几个字母 $a,b,c,\cdots$ 表示常量；而用英文的后几个字母 u,v,w,x,y,z 等表示变量。

一般说来，常量是表示相对静止的事物的某种量；变量则是表示运动的事物的某种量。如果说初等数学基本上以常量为其研究对象，高等数学则主要是以变量为其研究对象，研究变量的变化规律及其有关问题。大家知道，事物的静止是相对的，运动是绝对的，因此，高等数学所讨论的问题的范围较初等数学更为广泛。

常量与变量的区分不是绝对的，如果条件变了，常量可以转化为变量，变量也可能转化为常量。例如，对不同的地区，重力加速度 g 就不再是常量，又有时虽然已知某一量是变量，但如果它的变化微小到可以忽略不计时，就可将它当作常量来处理，这样可使问题得以简化。这就是说，同一个量，当条件改变后，原来的变量和常量可以互相转化，这也就是常量与变量之间的辩证关系。正如恩格斯指出的："初等数学，即常量的数学，是在形式逻辑的范围内活动的，至少总的说来是这样。而变量的数学——其中最重要的部分是微积分——本质上不外是辩证法在数学方面的应用。"故在学习高等数学时，不仅需要形式逻辑，而且需要辩证法，要对具体问题做具体分析。

二、数集与区间

某变量所能取得的一切数值，构成一个数的集合，简称为数集。一般言之：适合某种条

件的所有实数，称为一个数集。数集常用大写字母 A、B，……表示。数集 A 中的每一个数 x，称为数集 A 的一个元素，并用记号 $x\in A$ 表示，读作 x 属于 A。

例如，方程 $x^2+2x-3=0$ 的根组成一个数集，它只包含两个元素 -3 和 1；

自然数的全体，1，2，3，……组成一个数集；

满足不等式 $1\leqslant x\leqslant 2$ 的一切实数 x 也组成一个数集。

全体实数也是一个数集，称为实数集，记为 R。实数集中的数与数轴上的点是一一对应的。

我们今后常用到的数集有以下几种：

设 a、b 是二个实数，且 $a<b$。

凡满足 $a<x<b$ 的一切实数所组成的数集称为开区间，记作 (a,b)；

凡满足 $a<x\leqslant b$ 的一切实数所组成的数集称为半开半闭区间，记作 $(a,b]$；

凡满足 $a\leqslant x<b$ 的一切实数所组成的数集称为半开半闭区间，记作 $[a,b)$；

凡满足 $a\leqslant x\leqslant b$ 的一切实数所组成的数集称为闭区间，记作 $[a,b]$。

以上四种区间统称为有限区间。在数轴上它们都表示一个线段。a、b 两点称为区间的端点，闭区间是包含两个端点在内的线段，开区间是不包含端点的线段。这几种区间的长度均规定为 $b-a$。与有限区间相对应的还有无穷区间，是指：

满足 $a\leqslant x$ 的一切实数 x 所组成的数集，记作 $[a,+\infty)$；

满足 $a<x$ 的一切实数 x 所组成的数集，记作 $(a,+\infty)$；

满足 $x\leqslant b$ 的一切实数 x 所组成的数集，记作 $(-\infty,b]$；

满足 $x<b$ 的一切实数 x 所组成的数集，记作 $(-\infty,b)$；

实数集 R，记作 $(-\infty,+\infty)$。

这五种数集统称为无穷区间。应当注意的是这里的 ∞ 并不是一个数，现在它只是一个记号，它前面的正负号表示方向。

上述各种区间统称为区间，在没有必要指明那种区间时，常常用一个大写的字母表示，如区间 I。

设 $\delta>0$，称开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$

为点 x_0 的 δ—邻域。它是以 x_0 为中心长为 2δ 的开区间，也就是到点 x_0 的距离小于 δ 的所有点构成的集合(图 1-1)。有时我们并不关心 δ 的大小，常用“x_0 附近”代替 x_0 的 δ 邻域。

称集合 $(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$ 为 x_0 的挖心 δ—邻域，即 x_0 的 δ—邻域挖掉中心 x_0。

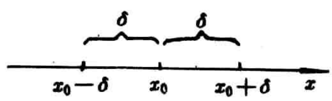

图 1-1

下面再介绍几个有关数集的较深入的概念，以便为今后的讨论做好准备。

若对数集 X，存在常数 m、M，恒有

$$m\leqslant x\leqslant M \qquad \forall\ x\in X$$

则称数集 X 为有界数集，并分别称 m 与 M 为数集 X 的下界与上界。如果只有

$$x\leqslant M(\text{或 } m\leqslant x) \qquad \forall\ x\in X$$

成立，则称数集是有上界(或有下界)的。因此，有界数集是既有上界又有下界的数集。

其中符号"$\forall$ "表示"任意一个"(它是英文 Any 的第一个字母的倒写)。

如果数集有上界(或下界),就有无穷多个(例如数集 $X=\{x|x\leqslant 1\}$,1 是它的上界,则任何大于 1 的数均可作为它的上界)。

公理 凡非空有上界的数集,一定有最小的上界。这个最小的上界称为该数集的上确界。

设数 μ 是数集 X 的上确界,则记为 $\mu=\sup X$,其中"sup"是英文 supremum(上确界)的缩写。

显然,上确界 μ 具有以下两个性质:

(1)如 $x\in X$,则 $x\leqslant\mu$;

(2)对任给的 $\varepsilon>0$,总有这样的 $x\in X$ 存在,使得 $x>\mu-\varepsilon$。

根据上述公理,容易导出如下定理:

定理 凡非空有下界的数集,一定有最大的下界。这个最大的下界称为该数集的下确界。

设数 τ 是数集 X 的下确界,则记为 $\tau=\inf X$,其中"inf"是英文 infimum,(下确界)的缩写。

下确界 τ 也具有相应的两个性质:

(1)如果 $x\in X$,则 $x\geqslant\tau$;

(2)对任给的 $\varepsilon>0$,总有这样的 $x\in X$ 存在,使得 $x<\tau+\varepsilon$。

上确界与下确界的概念,在今后的极限理论中起重要的作用。

三、实数的绝对值

设 a 为任一实数,如果 a 为正或为零,那么所谓 a 的绝对值就是 a。如果 a 为负,那么 a 的绝对值就是 $-a$,a 的绝对值记为 $|a|$,即

$$|a|=\begin{cases}a & \text{当 } a\geqslant 0\\ -a & \text{当 } a<0\end{cases}$$

例如 $|4|=4$ $\qquad |-4|=-(-4)=4$

显然,实数 a 的绝对值,从数轴上看就是点 a 与原点 O 的距离,是一个非负的数。

绝对值有如下性质:

(1) $|x|=\sqrt{x^2}$ $\qquad$ (2) $|x|\geqslant 0$

(3) $|-x|=|x|$ $\qquad$ (4) $-|x|\leqslant x\leqslant|x|$

(5) $|x+y|\leqslant|x|+|y|$ $\qquad$ (6) $|x-y|\geqslant\big||x|-|y|\big|$

(7) $|xy|=|x||y|$ $\qquad$ (8) $\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}$

(9)当 $a>0$ 时,$|x|<a\Leftrightarrow -a<x<a$

(10)当 $b>0$ 时,$|x|>b\Leftrightarrow x<-b$ 或 $x>b$

其中符号$\Leftrightarrow$表示等价,即充要条件。

四、函数的概念

自然界中"每一事物的运动都和它周围其他事物互相联系着和互相影响着",因而反

映客观事物中各种数量的变化也必然不是孤立的，往往是和另外一些变量的变化互相联系、互相依赖和具有一定规律的。本节就是要研究两个变量间的一种最普遍最常见的联系规律。为此，我们先从几个实例讲起。

例 1 计算圆面积有公式：$A=\pi r^2$，这公式表示了变量 A 与变量 r 之间数值的对应关系，对于每一个变量 $r\in(0,+\infty)$，通过公式 $A=\pi r^2$ 总有一个完全确定的 A 的值与它对应。

例 2 自由落体的下落距离 s 和时间 t 之间的规律为：

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

若以 T 表示物体降落到地面所需的时间，则对于每一个变量 $t\in[0,T]$，通过公式 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 总有一个完全确定的 s 的值与它对应。

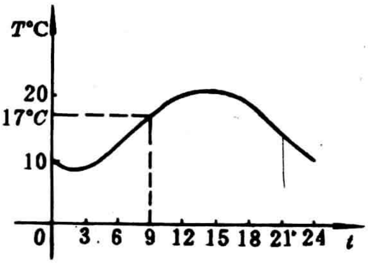

图 1-2

例 3 某气象观测用自动记录器，记录得到某日某地区的气温变化曲线如图 1-2，这里时间 t（小时）与气温 T°C（摄氏）也是两个变量，气温曲线图 1-2 表示了变量 T 与 t 之间的数值对应关系，即对每一个变量 $t\in[0,24)$，通过气温曲线总有一个完全确定的 T 之值与之对应。

例 4 邮电管理部门规定：国内邮寄平信的邮资 y（元）与信的重量 x（克）之间的关系为：

x	$0<x\leqslant20$	$20<x\leqslant40$	$40<x\leqslant60$
y	0.2	0.4	0.6

这里 x 和 y 也是两个变量，上述表格规定了变量 x 与 y 之间数值的对应关系，即对每一个变量 $x\in(0,60]$，通过上述表格可以得到一个完全确定的 y 值与它对应。

通过这几个例子可以看出，虽然它们所反映的客观事物和实际意义各不相同，但它们却有一些共同点，这就是：

①每个问题中都有两个变量；

②这两个变量之间存在着一定的对应规律，对于一个变量在一定范围内所取的每一个数值，另一个变量就有完全确定的值与之对应。

现在，我们就以这个共同的本质为基础，抽象出高等数学中的一个重要概念如下：

定义 若在变量 x 与 y 之间存在着一种对应规律，使得变量 x 在其可取值的数集 X 中每取一个值时，变量 y 均有确定的值与它相对应，这时我们就说 y 是 x 的函数。记作：

$$y=f(x),\qquad x\in X$$

其中 x 叫做自变量，y 叫做因变量，X 叫做函数的定义域。y 的所有值构成的集合 Y 称为函数的值域。

函数概念中有两个要素：其一是对应规律，即函数关系；其二是定义域. 所以说函数：$y=\lg x^2$ 与 $y=2\lg x$ 是两个不同的函数（它们的定义域不同）。

1. 函数关系的表示方法

函数关系的表示方法，主要有公式法（也叫解析法），如例 1、2 中的函数；图形法，如例 3；表格法，如例 4。

各种表示函数的方法，都有它的优点和不足。公式法给出的函数便于进行理论分析和计算。图形法给出的函数形象直观，富有启发性，便于记忆。表格法给出的函数便于查找函数值，但它常常是不完全的。今后我们以公式法为主，配合使用图形法和表格法。

公式法给出的函数有时在定义域内由一个公式表达出函数关系，有时无法或很难用一个公式表达出函数关系，而在定义域的不同部分上用不同的公式来表达一个函数关系，这样的函数称为分段函数，如：

例 5 求在将一克 -10℃的冰加热成 10℃的水的过程中，温度 τ 和所需要的热量 Q 之间的函数关系。因冰的比热为 0.5 卡/克·度，冰的溶解热为 80 卡/克，而水的比热是 1 卡/克·度，因此有函数关系（如图 1-3）

$$Q=\begin{cases}0.5\tau+5, & \text{当 } -10<\tau<0\\ \tau+85, & \text{当 } 0<\tau\leqslant 10\end{cases}$$

例 6 函数

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & |x|\leqslant 1\\ x^2-1, & 1<|x|<2\end{cases}$$

其图形如图 1-4 所示。

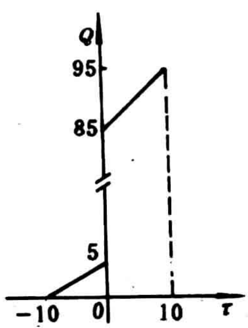

图 1-3

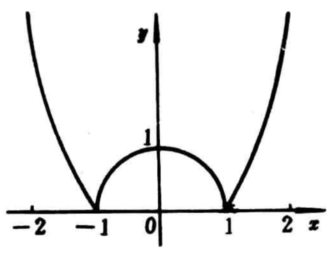

图 1-4

例 7 符号函数（克朗涅克尔 Kronecker 函数）（图 1-5）

$$y=\mathrm{Sgn}x=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0\end{cases}$$

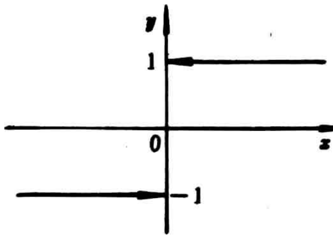

图 1-5

函数 $y=f(x)$ 中表示函数关系的记号 f 也可改用其他字母，特别在考察某问题中，要同时讨论几个不同的函数就要用不同的函数关系的符号，如：$y=\varphi(x)$、$y=F(x)$ 等等。

2. 定义域的求法

函数的定义域是自变量的取值范围，也就是函数关系

的存在范围，在研究每个函数时，都应知道它的定义域，那么如何来求一个函数的定义域呢？

在实际问题中，函数的定义域是根据所考虑问题的实际意义确定的，而不只是由表示它的公式来确定。例如：$A=\pi r^2$ 的定义域为$(0,+\infty)$，这是因为圆的半径不能取负值或零，又如 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 的定义域为闭区域$[0,T]$，象这样由实际问题所确定的定义域，叫做实际定义域。

在纯数学的研究中，定义域是在实数范围内能合理的确定出函数值的那些自变量的全体。象这样只由表示函数的数学解析式子所确定的函数定义域，叫做自然定义域。今后如无特殊说明，所说的定义域，皆指之为自然定义域，所以注意负数不能开偶次方；零不能作分母；负数与零不能取对数等等是有益的。若函数表达式中含有若干项，则定义域应是各项中自变量取值范围的交集。对于分段函数的定义域，应是每段自变量取值范围的并集，如分段函数例 5 的定义域为$(-10,0)\cup(0,10]$。

例 8 求 $y=\sqrt{25-x^2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$的定义域。

解 因负数不能开平方，所以有

$$25-x^2\geqslant 0,$$

即 $x^2\leqslant 25$，它等价于$|x|\leqslant 5$；又因零不能做分母，即 $x\neq 0$。故所求的定义域是集合$[-5,0)\cup(0,5]$。

例 9 求 $y=1/\lg(3x-2)+\operatorname{tg}x$的定义域。

解 由负数和零不能取对数，零不能作分母以及正切函数的定义知

$$3x-2>0,3x-2\neq 1,x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots。$$

故定义域

$$X=\{x|x>\frac{2}{3},\text{且 }x\neq 1,x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k=0,1,2,\cdots,x\in R\}$$

3. 函数值的表示

如果 a 是函数 $y=f(x)$的定义域内的一点，今后我们常用记号 $f(a)$或 $y|_{x=a}$，表示函数 $y=f(x)$在 $x=a$ 时，所对应的函数值。此时也说 $y=f(x)$在点 a 处有定义。

例 10 设 $y=f(x)=\pi x^2$，则有

$$y|_{x=2}=f(2)=\pi 2^2=4\pi$$

$$y|_{x=\frac{1}{3}}=f(\frac{1}{3})=\pi(\frac{1}{3})^2=\frac{\pi}{9}$$

$$y|_{x=a}=f(a)=\pi a^2$$

$$y|_{x=a+b}=f(a+b)=\pi(a+b)^2$$

例 11 函数 $y=\begin{cases}x+1 & \text{当 } x>0\\ 0 & x=0\\ 1 & x<0\end{cases}$

求 $f(0)$　　$f(-1)$　　$f(2)$

解 分段函数不同点处的函数值，应由相应的部分的公式来确定；$f(0)=0$、$f(-1)$

$=1$、$f(2)=3$。

4. 函数的图形

给定函数 $y=f(x)$，$x\in X$，将每一个 $x\in X$ 和它对应的 $y=f(x)$ 作一个有序数组 (x,y)，在坐标平面 xoy 上找对应点 $M(x,y)$，则点集

$$G=\{(x,y)\mid x\in X,\text{且 } y=f(x)\}$$

称为函数的图象或图形。由平面解析几何知，作函数图形的基本方法是描点法。另外，还有一些作图的技巧需要知道。

(1)平移作图

已知 $y=f(x)$，$x\in X$ 的图形，求作 $y=f(x)+b$(b 为常数)的图形，当 $b>0$ 时，将 $y=f(x)$ 的图形向上平移 b 个单位即可。或者将坐标系向下平移 b 个单位。当 $b<0$ 时，图形向下移 $|b|$ 个单位即可。

要作 $y=f(x+a)$(a 为常数)的图形，当 $a>0$ 时，将 $y=f(x)$ 的图形向左平移 a 个单位，或者将坐标系向右平移 a 个单位都可。当 $a<0$ 时，移动方向相反。

(2)放大、压缩作图

已知 $y=f(x)$ 的图形，求作 $y=af(x)$ 的图形。当 $a>1$ 时，把 $y=f(x)$ 的图形的纵坐标都放大 a 倍，即得 $y=af(x)$ 的图形。当作 $y=f(ax)$ 的图形，当 $a>1$ 时，把 $y=f(x)$ 的图形的横坐标压缩 a 倍即可。对 $0<a<1$ 和 $a<0$，请读者自己考虑。

(3)叠加作图

已知 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 的图形，求作 $y=f(x)+g(x)$ 的图形，将 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 的纵坐标相加即可。

例 12 作函数 $y=\sin x+2\cos x$ 的图形。

此题可以利用 $y=\sin x$ 和 $y=2\cos x$ 的图形叠加作图，但这比较麻烦。我们先将函数作恒等变形。

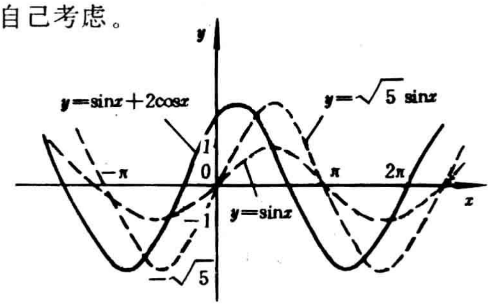

图 1-6

$$y=\sin x+2\cos x=\sqrt{5}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\sin x+\frac{2}{\sqrt{5}}\cos x\right)$$

$$=\sqrt{5}\sin(x+x_0),\qquad x_0=\operatorname{arctg}2$$

因此，先将 $y=\sin x$ 的图形的纵坐标放大 $\sqrt{5}$ 倍，得到 $y=\sqrt{5}\sin x$，然后将 $y=\sqrt{5}\sin x$ 的图形向左平移 arctg2 个弧度，就得到了 $y=\sin x+2\cos x$ 的图形参见图 1-6。

习题 1.1

1. 解不等式：

(1) $|x-3|<4$　　　　(2) $0<(x-2)^2\leqslant 4$

(3) $\left|\frac{x}{1+x}\right|>\frac{x}{1+x}$

2. 用区间表示适合下列不等式的变量 x 的范围：

(1) $0<|x-1|<0.01$ (2) $|x|\geqslant 100$

(3) $|x-2|<0.1$

3.求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{3-x}+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$ (2) $y=\dfrac{1}{|x|-x}$

(3) $y=\sqrt{\sin x-1}$ (4) $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{16-x^2}$

(5) $y=(x-2)\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ (6) $y=\arcsin(\lg\dfrac{x}{10})$

(7) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1} & x<0\\ x & 0<x<1\\ 2 & 1\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$ (8) $y=\arcsin\dfrac{x}{1+x^2}$

(9) $y=\sqrt{x^2-x}$ (10) $y=\dfrac{\lg(3-x)}{\sqrt{|x|-1}}$

4.若函数 $f(x)$的定义域为[0,1],求

(1) $f(\lg x)$的定义域； (2) $f(x+a)+f(x-a)\ (a>0)$的定义域。

5.计算下列各题：

(1)设 $f(x)=\dfrac{|x-2|}{x+1}$ 求 $f(2)$、$f(-2)$、$f(0)$、$f(a+b)\ (a+b\neq -1)$

(2)设 $f(x)=\begin{cases}|\sin x| & |x|<1\\ 0 & |x|\geqslant 1\end{cases}$

求 $f(1)$,$f(\frac{\pi}{4})$,$f(-2)$,$f(-\frac{\pi}{4})$

(3)设 $f(x)=\sin x$,求 $f(x+\Delta x)-f(x)$

(4)设 $f(x)=2x-3$,求 $f(x^2)$,$[f(x)]^2$

6.下述函数 $f(x)$、$g(x)$是否相等？为什么？

(1) $f(x)=1\quad g(x)=\dfrac{x}{x}$ (2) $f(x)=x\quad g(x)=(\sqrt{x})^2$

(3) $f(x)=\sin(\arcsin x)\quad g(x)=\arcsin(\sin x)$

7.已知 $f(x)$是线性函数($f(x)=ax+b$),且 $f(-1)=2$,$f(2)=-3$,求 $f(x)$及 $f(5)$。

8.已知 $f(x)$是二次有理整函数($f(x)=ax^2+bx+c$),且 $f(0)=1$,$f(1)=0$,$f(3)=5$,求 $f(x)$及 $f(-1)$。

9.对于线性函数 $f(x)=ax+b$,若 $x_1,x_2,x_3,\cdots$,构成等差数列,试证 $f(x_1)$,$f(x_2)$,$f(x_3)$,$\cdots$也构成等差数列。

10.对于指数函数 $f(x)=a^x(a>0,a\neq 1)$,若 $x_1,x_2,x_3,\cdots$构成等差数列,试证 $f(x_1)$,$f(x_2)$,
$f(x_3)$,$\cdots$构成等比数列。

11.作下列函数的图形：

(1) $y=|\sin x+\cos x|$；

(2) $y=\begin{cases}2-x^2, & |x|\leqslant 1,\\ x^{-1}, & |x|>1\end{cases}$ (3) $|\lg x|+|\lg y|=1$

12. 在一个半径为 r 的球内，嵌入一内接圆柱，试求圆柱体的体积 V 与圆柱高 h 的函数关系，并求出此函数的定义域。

13. 有三个矩形，其高分别等于 3 米、2 米、1 米，而底皆为 1 米，彼此相距一米排列着（如图 1），假定 $x\in(-\infty,+\infty)$ 连续变动（即直线 AB 连续地平行移动），试将图中阴影部分面积 S 表为 x 的函数。

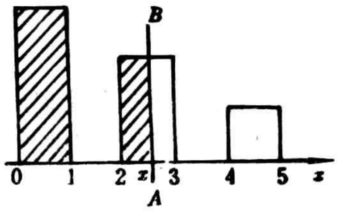

图 1

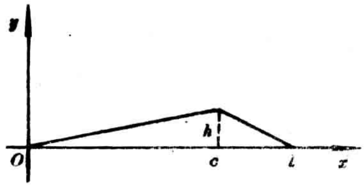

图 2

14. 长为 L 的弦、两端固定，在 c 点处将弦提高 h 后呈图 2 中形状，设提高时弦上各点仅沿着垂直于两端点连结线方向移动，以 x 表示弦上点的位置，y 表示 x 点处升高的高度，试建立 x 与 y 间的函数关系。

15. 有一工厂 A 与铁路的垂直距离为 a 公里，它的垂足 B 到火车站 C 的铁路长为 b 公里，工厂的产品必须经火车站 C 才能转销到外地。已知汽车运费是 m 元/吨公里，火车运费是 n 元/吨公里，$(m>n)$ 为使运费最省，想在铁路上另修一小站 M 作为转运站，那么运费的多少，将依赖于 M 点所选取的位置。试将运费 y 表为距离 $|BM|=x$ 的函数。

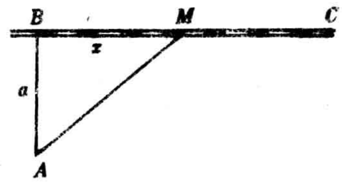

图 3

16. 某运输公司规定货物的吨公里运价为：在 a 公里以内每公里 k 元；超过 a 公里时，超过部分每公里为 $\frac{4k}{5}$ 元，求运价 m 和里程 x 的函数关系。

17. 在底 $AC=b$，高 $BD=h$ 的三角形 ABC 中（见图 4），做一个内接矩形 $KLMN$，将其高记为 x，试将矩形之周长 P 和其面积 s 表为 x 的函数。

§ 1.2 几个常用的概念

一、函数的几种特性

研究函数时常讨论的几种特性，这些特性均从某个侧面反映了该函数的一种特征。当然这些特性并不是每个函数都具有的。

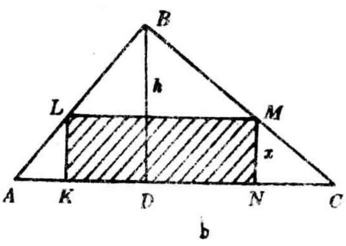

图 4

1. 函数的奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 X 关于原点对称（即当 $x\in X$ 时，必有 $-x\in X$），若对任何 $x\in X$，都有

$$f(-x)=-f(x)$$