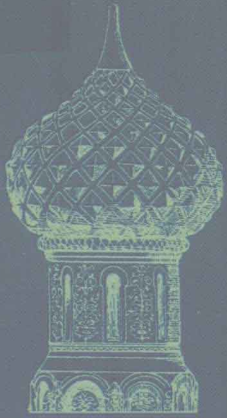


"十一五"国家重点图书

俄罗斯数学
教材选译

# 工科数学分析习题集

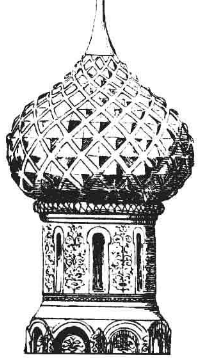
## (根据2006年俄文版翻译)


□ Б. П. 吉米多维奇 著

□ 林武忠 倪明康 房浩鑑 蔡天亮 祝长忠 译



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS



俄罗斯数学
教材选译

"十一五"国家重点图书

● 数学天元基金资助项目

# 工科数学分析习题集

GONGKE SHUXUE FENXI XITIJI

## （根据2006年俄文版翻译）

□ Б. П. 吉米多维奇 著

□ 林武忠 倪明康 房浩鑑 蔡天亮 祝长忠 译

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

**图字: 01–2005–5740 号**

**Б. П. Демидовича**

**Задачи и упражнения по математическому анализу для высших технических учебных заведений (под редакцией Б. П. Демидовича)**

**Москва, Издательство Астрель, 2006**

Originally published in Russian in the title:

B. P. Demidovich

Problems and Exercises in Mathematical Analysis for High Technical Schools

(edited by B. P. Demidovich)



**图书在版编目 (CIP) 数据**

工科数学分析习题集 / (俄罗斯) 吉米多维奇著; 林武忠等译. — 北京: 高等教育出版社, 2011.11

ISBN 978–7–04–031004–7

I. ①工··· II. ①吉··· ②林··· III. ①数学分析–习题集 IV. ①O17–44

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2011) 第 064740 号

策划编辑 赵天夫 责任编辑 蒋 青 封面设计 王凌波 责任印制 田 甜

| | | | |
|---|---|---|---|
| 出版发行 | 高等教育出版社 | 咨询电话 | 400-810-0598 |
| 社 址 | 北京市西城区德外大街 4 号 | 网 址 | http //www hep edu cn |
| 邮政编码 | 100120 | | http //www hep com cn |
| 印 刷 | 北京民族印务有限责任公司 | 网上订购 | http //www landraco com |
| 开 本 | 787 × 1092 1/16 | | http //www landraco com cn |
| 印 张 | 25. 5 | 版 次 | 2011 年 11 月第 1 版 |
| 字 数 | 450 000 | 印 次 | 2011 年 11 月第 1 次印刷 |
| 购书热线 | 010-58581118 | 定 价 | 39. 00 元 |



物 料 号 31004-00

# 《俄罗斯数学教材选译》序

从上世纪 50 年代初起, 在当时全面学习苏联的大背景下, 国内的高等学校大量采用了翻译过来的苏联数学教材. 这些教材体系严密, 论证严谨, 有效地帮助了青年学子打好扎实的数学基础, 培养了一大批优秀的数学人才. 到了 60 年代, 国内开始编纂出版的大学数学教材逐步代替了原先采用的苏联教材, 但还在很大程度上保留着苏联教材的影响, 同时, 一些苏联教材仍被广大教师和学生作为主要参考书或课外读物继续发挥着作用. 客观地说, 从解放初一直到文化大革命前夕, 苏联数学教材在培养我国高级专门人才中发挥了重要的作用, 起了不可忽略的影响, 是功不可没的.

改革开放以来, 通过接触并引进在体系及风格上各有特色的欧美数学教材, 大家眼界为之一新, 并得到了很大的启发和教益. 但在很长一段时间中, 尽管苏联的数学教学也在进行积极的探索与改革, 引进却基本中断, 更没有及时地进行跟踪, 能看懂俄文数学教材原著的人也越来越少, 事实上已造成了很大的隔膜, 不能不说是一个很大的缺憾.

事情终于出现了一个转折的契机. 今年初, 在由中国数学会、中国工业与应用数学学会及国家自然科学基金委员会数学天元基金联合组织的迎春茶话会上, 有数学家提出, 莫斯科大学为庆祝成立 250 周年计划推出一批优秀教材, 建议将其中的一些数学教材组织翻译出版. 这一建议在会上得到广泛支持, 并得到高等教育出版社的高度重视. 会后高等教育出版社和数学天元基金一起邀请熟悉俄罗斯数学教材情况的专家座谈讨论, 大家一致认为: 在当前着力引进俄罗斯的数学教材, 有助于扩大视野, 开拓思路, 对提高数学教学质量、促进数学教材改革均十分必要.《俄罗斯数学教材选译》系列正是在这样的情况下, 经数学天元基金资助, 由高等教育出版社组织出版的.

经过认真选题并精心翻译校订, 本系列中所列入的教材, 以莫斯科大学的教材为主, 也包括俄罗斯其他一些著名大学的教材. 有大学基础课程的教材, 也有适合大学高年级学生及研究生使用的教学用书. 有些教材虽曾翻译出版, 但经多次修订重版, 面目已有较大变化, 至今仍广泛采用、深受欢迎, 反射出俄罗斯在出版经典教材方面所作的不懈努力, 对我们也是一个有益的借鉴. 这一教材系列的出版, 将中俄数学教学之间中断多年的

链条重新连接起来, 对推动我国数学课程设置和教学内容的改革, 对提高数学素养、培养更多优秀的数学人才, 可望发挥积极的作用, 并起着深远的影响, 无疑值得庆贺, 特为之序.

李大潜

2005 年 10 月

# 序　言

在本习题集中选取了适合于高等技术学校中的一般高等数学课程教学大纲的数学分析问题和例子, 全书包含了系统地安排在习题集中第一章到第十章的 3000 个以上问题, 而且涵盖了除解析几何以外的工科高等数学课程的所有章节. 特别关注到要求具有扎实技能的该课程最重要章节 (求解极限、作出函数图形、函数的求导方法、积分技巧、定积分的应用、级数以及微分方程的求解). 此外, 还包括场论、傅里叶方法和近似计算的问题. 正如由教学实践所证明的那样, 编入习题集中问题的数量, 不仅在满足大学生们确实打好该课程相应章节基础的需要绰绰有余, 而且给教师们在这些章节范围内进行多样化问题选择以及为完成总结任务和测验工作从中选择问题时的各种可能性.

在每一章的开头都就有关该课程相应章节给出简要理论介绍以及引进基本定义和公式. 这时还给出特别重要典型问题的求解范例. 这种状况在很大程度上减轻了大学生们在自学时对习题集的依赖. 对于所有的计算问题都给出答案, 对于打上星号 (*) 或者双星号 (**) 的问题, 都给出相应的简单求解提示或者进行求解. 为了直观起见, 部分问题运用了图解说明.

作为莫斯科市高等技术学校老师们多年教学的结果, 编成了这本高等数学习题集, 其中除了原来的问题和例子外, 还放进了众所周知的问题.

# 目　录

# 第一章　分析引论

## §1．函数的概念

1°. **实数**. 有理数和无理数统称为**实数**. 所谓实数 $a$ 的**绝对值**是理解为非负数 $|a|$, 它用如下条件确定: 如果 $a \geqslant 0$, 则有 $|a| = a$; 如果 $a < 0$, 则有 $|a| = -a$. 对于任意实数 $a$ 和 $b$, 有不等式

$$|a+b| \leqslant |a| + |b|$$

成立.

2°. **函数的定义**. 如果属于某个集合 $E$ 的每一个变量值[①] $x$, 都对应着一个且只有一个量 $y$ 的有限值, 那么就称 $y$ 为 $x$ 的 (单值) **函数**, 或者称为定义在集合 $E$ 上的**因变量**, $x$ 称为**自变量**或者**独立变量**. 对于 $y$ 为 $x$ 的函数情况, 简单地记作 $y = f(x)$ 或者 $y = F(x)$ 等等.

如果属于某个集合 $E$ 的每个变量 $x$ 的值, 对应着变量 $y$ 的一个或多个值, 那么称 $y$ 为定义在集合 $E$ 上的 $x$ 的**多值**函数. 今后书中如果没有显然相反的声明, “函数” 一词应仅理解为单值函数.

3°. **函数的存在域**. 对于使给定函数有定义的 $x$ 值的集合称为这个函数的**存在域**或者**定义域**.

在最简单的情况下, 函数的存在域或者是**线段** $[a,b]$ (闭区间), 亦即满足 $a \leqslant x \leqslant b$ 的实数 $x$ 的集合, 或者是**开区间** $(a,b)$, 亦即满足 $a < x < b$ 的实数 $x$ 的集合. 但是函数存在域也可能是更为复杂的结构 (见问题 21).

**例 1**　确定函数

$$y = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

的存在域.

---

①今后在所有讨论中的量值, 如果没有明确的不同说明, 都认为是实数.

**解** 如果

$$x^2-1>0,$$

亦即如果 $|x|>1$, 那么函数有定义. 因此函数的存在域是两个区间 $-\infty<x<-1$ 和 $1<x<+\infty$ 的总和.

4°. **反函数**. 如果方程 $y=f(x)$ 关于变量 $x$ 是唯一可解的, 亦即存在函数 $x=g(y)$ 使得 $y\equiv f[g(y)]$, 或者用标准的记号 $y=g(x)$, 那么就称它为关于 $y=f(x)$ 的**反函数**. 显然有 $g[f(x)]\equiv x$, 亦即函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是**互为反函数**.

在一般情况下, 方程 $y=f(x)$ 确定一个多值的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 使得对函数 $f(x)$ 所有的值 $y$ 有 $y\equiv f(f^{-1}(y))$.

**例 2** 对于函数

$$y=1-2^{-x}, \tag{1}$$

确定它的反函数.

**解** 关于 $x$ 求解方程 (1), 我们有

$$2^{-x}=1-y, \quad 从而有\ x=-\frac{\lg(1-y)}{\lg 2},① \tag{2}$$

显然, 函数 (2) 的定义域为 $-\infty<y<1$.

5°. **复合函数和隐函数**. 用一串等式 $y=f(u)$, 其中 $u=\varphi(x)$ 等等给出的 $x$ 的函数 $y$ 称为**复合函数或者函数的函数**.

用关于因变量未解出的方程给出的函数称为**隐函数**. 例如, 方程 $x^3+y^3=1$ 确定 $y$ 作为 $x$ 的隐函数.

6°. **函数的几何解释**. 在平面 $XOY$ 上, 其坐标由方程 $y=f(x)$ 联系起来的点 $(x,y)$ 的集合称为该函数的图形.

**1****. 证明: 如果 $a$ 和 $b$ 是实数, 那么有

$$\big||a|-|b|\big|\leqslant|a-b|\leqslant|a|+|b|.$$

**2**. 证明下列等式:

a) $|ab|=|a|\cdot|b|$; b) $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}(b\neq0)$;

c) $|a|^2=a^2$; d) $\sqrt{a^2}=|a|$.

**3**. 求解不等式:

a) $|x-1|<3$; b) $|2x+1|<1$;

c) $|x+1|>2$; d) $|x-1|<|x+1|$.

**4**. 如果 $f(x)=x^3-6x^2+11x-6$, 求出 $f(-1),f(0),f(1),f(2),f(3),f(4)$.

**5**. 如果 $f(x)=\sqrt{1+x^2}$, 求出 $f(0),f\left(-\frac{3}{4}\right),f(-x),f\left(\frac{1}{x}\right),\frac{1}{f(x)}$.

**6**. 假设 $f(x)=\arccos(\lg x)$, 求出 $f\left(\frac{1}{10}\right),f(1),f(10)$.

①这里像通常那样, $\lg x=\log_{10}x$ 表示以 10 为底 $x$ 的对数.

**7**. 假设函数 $f(x)$ 为线性函数, 如果 $f(-1)=2$ 和 $f(2)=-3$, 求出这个函数.

**8**. 如果 $f(0)=1, f(1)=0$ 以及 $f(3)=5$, 求出这个二次有理整函数.

**9**. 已知 $f(4)=-2, f(5)=6$, 把函数 $f(x)$ 在闭区间 $4 \leqslant x \leqslant 5$ 上看成是线性的 (**线性插值函数**), 求出 $f(4.3)$ 的近似值.

**10**. 使用量的绝对值符号, 采用一个公式将函数

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{如果 } x \leqslant 0, \\ x, & \text{如果 } x>0\end{cases}$$

写出.

确定下列函数的存在性区域:

**11**. a) $y=\sqrt{1+x}$; b) $y=\sqrt[3]{1+x}$.

**12**. $y=\dfrac{1}{4-x^2}$.

**13**. a) $y=\sqrt{x^2-2}$; b) $y=x\sqrt{x^2-2}$.

**14****. $y=\sqrt{2+x-x^2}$.

**15**. $y=\sqrt{-x}+\dfrac{1}{\sqrt{2+x}}$.

**16**. $y=\sqrt{x-x^3}$.

**17**. $y=\lg \dfrac{2+x}{2-x}$.

**18**. $y=\lg \dfrac{x^2-3x+2}{x+1}$.

**19**. $y=\arccos \dfrac{2x}{1+x}$.

**20**. $y=\arcsin \left(\lg \dfrac{x}{10}\right)$.

**21**. $y=\sqrt{\sin 2x}$.

**22**. 假设 $f(x)=2x^4-3x^3-5x^2+6x-10$, 求出函数

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)] \quad \text{和} \quad \psi(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)].$$

**23**. 假设函数 $f(x)$ 定义在对称的区域 $-l<x<l$ 中, 如果 $f(x)=f(-x)$, 则称它为**偶函数**; 而如果 $f(-x)=-f(x)$, 则称它为**奇函数**.

在下面列出的函数中, 说明哪些是偶函数, 哪些是奇函数:

a) $f(x)=\dfrac{1}{2}(a^x+a^{-x})$; b) $f(x)=\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}$;

c) $f(x)=\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)^2}$; d) $f(x)=\lg \dfrac{1+x}{1-x}$;

e) $f(x)=\lg\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.

**24***. 证明: 定义在区间 $-l<x<l$ 中的一切函数都可以表示成偶函数与奇函数的和.

**25**. 证明: 两个偶函数或者两个奇函数的乘积是偶函数, 而偶函数乘以奇函数是奇函数.

**26**. 函数 $f(x)$ 称为**周期函数**, 如果存在正常数 $T$ (**函数的周期**), 使得对一切属于函数 $f(x)$ 存在域的值 $x$ 都有 $f(x+T) \equiv f(x)$.

在下面列出的函数中, 确定哪些函数是周期的, 并对周期函数求出它的最小周期 $T$:

a) $f(x)=10\sin 3x$; b) $f(x)=a\sin \lambda x+b\cos \lambda x$;

c) $f(x)=\sqrt{\tan x}$; d) $f(x)=\sin^2 x$;

e) $f(x)=\sin\left(\sqrt{x}\right)$.

**27.** 将线段 $MN$ 的长度 $y$ 和三角形 $AMN$ 的面积 $S$ (图 1) 表示成 $x=AM$ 的函数, 并作出这些函数的图形.

**28.** 杆 $AB=l$ (图 2) 的线密度 (即单位长度的质量) 在线段 $AC=l_1, CD=l_2$ 和 $DB=l_3$ $(l_1+l_2+l_3=l)$ 上分别为 $q_1, q_2, q_3$. 将这根杆的可变动线段 $AM=x$ 的质量 $m$ 表示成 $x$ 的函数, 并作出这个函数的图形.

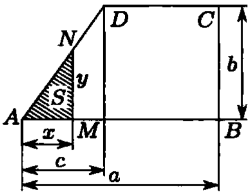



图 1

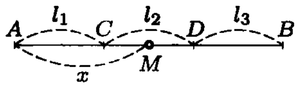



图 2

**29.** 如果 $\varphi(x)=x^2$ 和 $\psi(x)=2^x$, 求 $\varphi[\psi(x)]$ 和 $\psi[\varphi(x)]$.

**30.** 如果 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$, 求 $f\{f[f(x)]\}$.

**31.** 如果 $f(x-1)=x^2$, 求 $f(x+1)$.

**32.** 假设 $f(n)$ 是一个算术级数的 $n$ 项和, 证明:

$$f(n+3)-3f(n+2)+3f(n+1)-f(n)=0.$$

**33.** 证明: 如果

$$f(x)=kx+b,$$

且数 $x_1, x_2, x_3$ 构成算术级数, 那么 $f(x_1), f(x_2), f(x_3)$ 也构成算术级数.

**34.** 证明: 如果 $f(x)$ 是指数函数, 亦即 $f(x)=a^x$ $(a>0)$, 且数 $x_1, x_2, x_3$ 构成算术级数, 那么数 $f(x_1), f(x_2), f(x_3)$ 也构成算术级数.

**35.** 假设

$$f(x)=\lg\frac{1+x}{1-x},$$

证明:

$$f(x)+f(y)=f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right).$$

**36.** 假设 $\varphi(x)=\dfrac{1}{2}\left(a^x+a^{-x}\right)$ 和 $\psi(x)=\dfrac{1}{2}\left(a^x-a^{-x}\right)$. 证明:

$$\varphi(x+y)=\varphi(x)\varphi(y)+\psi(x)\psi(y)$$

和

$$\psi(x+y)=\varphi(x)\psi(y)+\varphi(y)\psi(x).$$

**37.** 如果

$$f(x)=\begin{cases}\arcsin x, & 当\ -1\leqslant x\leqslant 0,\\ \arctan x, & 当\ 0<x<+\infty,\end{cases}$$

求 $f(-1), f(0), f(1)$.

**38.** 如果:

a) $y=1+x$; b) $y=2+x-x^2$;

c) $y=1-x+x^2$; d) $y=x^3-3x$;

e) $y=\lg\dfrac{2x}{1+x}$,

确定函数 $y$ 的根 (零点)、正值区域和负值区域.

**39.** 如果:

a) $y=2x+3$; b) $y=x^2-1$;

c) $y=\sqrt[3]{1-x^3}$; d) $y=\lg\dfrac{x}{2}$;

e) $y=\arctan 3x$,

求出函数 $y$ 的反函数以及这些反函数的定义域.

**40.** 求出函数

$$y=\begin{cases}x, & 如果\ x\leqslant 0,\\ x^2, & 如果\ x>0\end{cases}$$

的反函数.

**41.** 将下面给出的函数写成一连串等式的形式, 它的每一个环节只包含最简单的初等函数 (幂函数、指数函数、三角函数等等):

a) $y=(2x-5)^{10}$; b) $y=2^{\cos x}$;

c) $y=\lg\tan\dfrac{x}{2}$; d) $y=\arcsin\left(-3^{-x^2}\right)$.

**42.** 下面用一连串给出了复合函数, 请将它们写成一个等式的形式:

a) $y=u^2,\quad u=\sin x$;

b) $y=\arctan u,\quad u=\sqrt{v},\quad v=\lg x$;

c) $y=\begin{cases}2u, & 如果\ \ u\leqslant 0,\\ 0, & 如果\ \ u>0,\end{cases}\quad u=x^2-1.$

**43.** 将下列用方程给出的函数 $y$ 写成显式:

a) $x^2-\arccos y=\pi$; b) $10^x+10^y=10$;

c) $x+|y|=2y$,

并求出该隐函数的定义域.

## §2. 初等函数的图形

函数 $y=f(x)$ 图形的作法大体上采用如下方法进行; 选取充分密集的一系列点 $M_i(x_i,y_i)$, 其中 $y_i=f(x_i)$ $(i=1,2,\cdots)$, 并用线把它们顺序连接起来而画出草图, 连

线的特征要考虑到中间各点的位置.

熟悉基本初等函数图形将简化对一般函数图形的构造 (见附录 VI). 从函数

$$y = f(x) \tag{Γ}$$

的图形出发, 利用简单的几何结构, 我们得到如下函数的图形: 1) $y_1 = -f(x)$ —— 图形 Γ 关于 $OX$ 轴的镜像映射; 2) $y_2 = f(-x)$ —— 图形 Γ 关于 $OY$ 轴的镜像映射; 3) $y_3 = f(x-a)$ —— 图形 Γ 沿 $OX$ 轴平移量值 $a$; 4) $y_4 = b + f(x)$ —— 图形 Γ 沿 $OY$ 轴平移量值 $b$ (图 3).

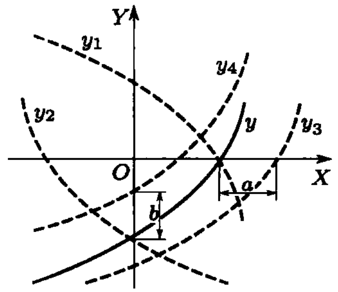



图 3

**例**　作出函数

$$y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

的图形.

**解**　所求曲线就是将正弦曲线 $y = \sin x$ 沿 $OX$ 轴向右移动 $\frac{\pi}{4}$ 得到的曲线 (图 4).

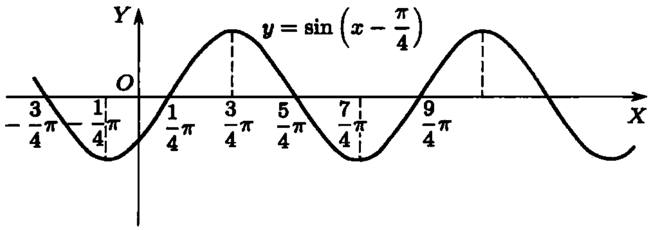



图 4

作出下列线性函数 (直线) 的图形:

**44.** $y = kx$,　其中 $k = 0, 1, 2, \frac{1}{2}, -1, -2$.

**45.** $y = x + b$,　其中 $b = 0, 1, 2, -1, -2$.

**46.** $y = 1.5x + 2$.

作出下列二次整有理函数 (抛物线) 的图形:

**47.** $y = ax^2$,　其中 $a = 1, 2, \frac{1}{2}, -1, -2, 0$.

**48.** $y = x^2 + c$,　其中 $c = 0, 1, 2, -1$.

**49.** $y = (x - x_0)^2$,　其中 $x_0 = 0, 1, 2, -1$.

**50.** $y = y_0 + (x - 1)^2$,　其中 $y_0 = 0, 1, 2, -1$.

**51*.** $y = ax^2 + bx + c$,　其中:

1) $a = 1, b = -2, c = 3$;