全国高校教材学术著作出版审定委员会审定

证明方法与理论

张寅生 著

国防工业出版社
National Defense Industry Press

全国高校教材学术著作出版审定委员会审定

证明方法与理论

张寅生 著

国防工业出版社

·北京·

内容简介

本书阐述数学证明的基本原理，主要包括证明方法和证明理论，是探讨证明方法和证明理论内在联系和本质特征的数学专著。

“证明方法”集成了常见或具有重要影响并具有逻辑独立性和形式化特征的数学证明方法，分别给出了这些方法的表示公式、例题、相关的定理以及当前的研究前沿状况。

“证明理论”阐述了自希尔伯特倡导建立证明论以来该学科的主要理论，介绍了这些理论的发展脉络，分别给出了这些理论的公理、定理及其证明、例题、当前的研究前沿状况。

本书力图解决以下问题：什么是数学证明？数学证明的通用方法有哪些？关于数学证明取得了哪些重要认识？

作为跨学科研究的尝试，本书可作为证明论、逻辑、计算机科学与技术、数学哲学等相关领域专业工作者的教材或参考书。

图书在版编目（CIP）数据

证明方法与理论/张寅生著. —北京：国防工业出版社，2015.11
ISBN 978-7-118-10079-2

Ⅰ.①证…　Ⅱ.①张…　Ⅲ. 证明论—研究　Ⅳ. ①O141.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 266307 号

※

国防工業出版社 出版发行
（北京市海淀区紫竹院南路 23 号　邮政编码 100048）
北京京华虎彩印刷有限公司 印刷
新华书店经售
*

开本 787×1092　1/16　印张 20　字数 500 千字
2015 年 11 月第 1 版第 1 次印刷　定价 52.00 元

国防书店：（010）88540777　　发行邮购：（010）88540776
发行传真：（010）88540755　　发行业务：（010）88540717

献给我的母亲姜凤兰

前言

本书阐述数学证明的基本原理，主要包括证明方法和证明理论，是探讨证明方法和证明理论内在联系和本质特征的数学专著。

证明方法部分集成了常见或具有重要影响的、具有逻辑独立性和形式化特征的11种（类）数学证明方法：①关系运算证明方法；②三段论证明方法；③数学归纳法；④反证法；⑤构造性证明方法；⑥同态证明方法；⑦解释性证明方法；⑧系统化证明方法；⑨截消证明方法；⑩归结证明方法；⑪自动化证明方法（其中，截消证明方法是系统化证明方法的特例；解释性证明方法是同态证明方法的特例）。分别给出了这些方法的定义、形式化表达和实例。

证明理论部分阐述了自希尔伯特倡导建立证明论（“元数学”）以来该学科的主要理论。本书将这些理论归纳为6个理论体系：①可判定性理论（包括邱奇-图灵定理及其证明），②相容性理论（包括数学悖论结构分析和解悖理论；集合论公理系统；算术公理系统及欧几里德、罗巴切夫斯基和黎曼几何公理系统的相容性理论）和③（不）完备性理论（包括第一、第二哥德尔不完备性定理的详细证明，一阶逻辑的完备性定理相容性理论），④可靠性理论（一阶语言的可靠性定理）。除了这4个理论体系外，还有2个也是当前构成证明论的主要理论体系，即：⑤为数学证明而构建的支持性或辅助性理论（例如为了进行图灵计算而将几何陈述转换为代数的理论），⑥证明复杂性理论。这2个理论体系本书不做讨论。对于前4个理论体系，本书给出了这些理论的发展历史、形式化表示、（定理、引理和推论的）证明、实例（例题）、当前的前沿研究状况。共计有：84个核心命题（公理、定理、推论、引理、命题、论题），其中作者提出15个；5个集合论公理系统；83个算术公理系统相容性关系图谱；100个例题，其中作者提出或编撰63个。

本书还附有哥德尔《论<数学原理>及其相关系统的形式不可判定命题（一）》（即哥

德尔给出他的第一、第二不完备性定理等定理证明的论文）原文（英文注释本），以及作者翻译的汉语译文。

值本书付梓之际：

作者谨向清华大学蔡曙山教授、陆玫教授、中国人民大学刘大椿教授致谢！他们对作者进行本专著所涉及问题的学习和研究给予了指导和帮助。

作者谨向北京大学王捍贫教授、北京师范大学于福生教授、厦门大学周昌乐教授致谢！他们严谨而积极地推荐了本著作。

作者谨向中国科学技术信息研究所出版项目的三位匿名评审专家致谢！他们投票通过了本专著的出版，并提出了修改意见。

作者谨向资深出版人、高等教育出版社刘建元先生致谢！他为本书的写作和出版提出了宝贵意见。

作者谨向国防工业出版社致谢！他们接纳了本著作，并宽容地允许作者进行了多次修改。

作者谨向双鸭山市叶云芝老师、余晓园老师、胡文清老师、张耀清老师致谢！他们为作者的数学学习和数学思维奠定了基础。

作者也向自己的家人致谢！特别是作者的爱人史启娴和作者的弟弟张东生，他们对本书的写作和出版提供了有力的支持。

由于作者水平有限，本书难免存在各种问题、缺陷或错误，诚恳欢迎读者指正！

作者通讯信息：zhangyinshengnet@sina.com.

张寅生
2015 年 9 月，于北京

目 录

绪论……1

0.1 对证明论学科发展的一些看法……1
0.2 本书的一些尝试……9
参考文献……11

第 1 部分 预备知识

第 1 章 基本概念的定义和举例……14

参考文献……23

第 2 章 基础知识……24

2.1 集合论概述……24
2.2 逻辑学概述……29
参考文献……32

第 2 部分 证明方法

第 3 章 关系运算证明方法……38

参考文献……44

第 4 章 三段论证明方法……45

4.1 亚里士多德三段论简述……45
4.2 亚里士多德三段论的改进……51
4.3 量化扩展的三段论有效命题的确定方法……56
参考文献……63

第 5 章 数学归纳法……65

5.1 数学归纳法的发展概况……65
5.2 第一、第二数学归纳法……65
5.3 超穷（超限）归纳法（广义归纳法）……68
5.4 结构归纳法……72
参考文献……75

第 6 章 反证法……76

第 7 章 构造性证明方法……78

参考文献……80

第 8 章 同态证明方法和解释性证明方法……81

8.1 同态证明方法……81
8.2 解释性证明方法……82
参考文献……83

第 9 章 系统化证明方法（含截消方法）……84

9.1 系统化证明方法导论……84
9.2 亚里士多德的三段论自然演绎系统和形式系统……86
9.3 量化扩展的三段论自然推理系统……91
9.4 弗雷格的形式系统 F……96
9.5 罗素的形式系统 R……100
9.6 希尔伯特公理系统 H……105
9.7 根岑的自然演绎系统 G 与截消证明方法……106
9.8 算术形式系统举例……113
9.9 几何证明公理系统举例……119
参考文献……122

第 10 章 归结证明方法……125

10.1 归结的基础理论……125
10.2 归结定理与归结方法……134
参考文献……137

第 11 章 自动化证明方法 …… 138
11.1 自动化证明方法的思想渊源 …… 138
11.2 自动证明机器原型之一：图灵机 …… 139
11.3 自动证明机器原型之二：线性有界自动机 …… 143
11.4 自动证明机器原型之三：下推自动机 …… 146
11.5 自动证明机器原型之四：确定型有穷自动机 …… 148
11.6 自动证明机器原型之五：不确定型有穷自动机 …… 150
11.7 自动机接受的语言 …… 153
11.8 自动机与数学证明的关系 …… 155
11.9 定理证明器和推理机基本原理和证明实例 …… 156
参考文献 …… 161

第 3 部分 证明理论

第 12 章 可判定性理论 …… 165
12.1 基本概念和历史背景 …… 165
12.2 可计算性理论 …… 166
12.3 一阶语言的可判定理论 …… 181
12.4 不可判定理论 …… 186
12.5 可判定性与可证明性的关系 …… 189
参考文献 …… 190

第 13 章 相容性理论 …… 192
13.1 相容性问题产生的根源、过程和现状 …… 192
13.2 悖论的结构和特征 …… 196
13.3 解悖理论（1）—— 类型理论 …… 201
13.4 解悖理论（2）—— 情境语义学理论 …… 205
13.5 解悖理论（3）—— ZFC 公理系统 …… 208
13.6 解悖理论（4）—— 新基础公理系统 …… 214
13.7 集合论公理系统概览 …… 215
13.8 数学系统相容性的其他障碍及其解决 …… 216
13.9 算术系统的相容性 …… 221
13.10 几何系统的相容性 …… 238

参考文献 …… 239

第 14 章 不完全性理论 …… 242

14.1 哥德尔第一不完全性定理 …… 242
14.2 哥德尔第二不完全性定理 …… 247
14.3 哥德尔第一不完全性定理的发展和争议 …… 248
14.4 哥德尔第二不完全性定理的争议和某些应用 …… 250
参考文献 …… 252

第 15 章 可靠性理论与完全性理论 …… 254

参考文献 …… 258

第 4 部分 附 录

附录 1 算术公理系统 …… 260
附录 2 On Formally Undecidable Propositions of *Principia Mathematica* and Related Systems（Ⅰ） …… 265
附录 3 论《数学原理》及其相关系统的形式不可判定命题（Ⅰ） …… 286
附录 4 人名索引 …… 301
附录 5 定义索引 …… 308
附录 6 核心命题索引 …… 313
附录 7 例题索引 …… 316

绪　论①

0.1　对证明论学科发展的一些看法

证明论，也被称为“元数学”，一般把它列在“数学/数理逻辑与数学基础”学科分类之下。如果从希尔伯特纲要倡导建立它时（20 世纪初）算起，大约经历了一个世纪。在此从总体上总结它的发展脉络并展望它的前沿。

1. 证明论的产生与发展

众所周知，数学传统中有证明理论，只是在希尔伯特之前没有成为独立的数学分支。欧几里德的公理体系及其通过公理证明命题的方法已经成为严格的数学圭臬。此外，传统逻辑学——亚里士多德、莱布尼茨、布尔、康德等人的逻辑学说已经使逻辑学走向了一个独立的学科以支撑数学证明。那么在 19 世纪末 20 世纪初，是什么导致了证明论的独立呢？

应该说，以下 4 个趋势，或者说当时哲学、科学中的 4 个背景要素，催生了证明论的独立。

（1）悖论已经成为数学、逻辑学的重要障碍需要解决。

悖论的发现被认为导致了“第三次数学危机”的发生。悖论古已有之，但是长期以来没有引起逻辑学家、数学家的重视。主要由于 19 世纪末 20 世纪初提出三个悖论——布拉利-福尔蒂悖论、康托尔悖论和罗素悖论，悖论问题终于引起数学界广泛关注。1931 年，哥德尔发表了第一不完全性定理，它基于一个悖论语句（哥德尔语句）——虽然仍有人认为哥德尔语句不是悖论，但是有非常多的理由可证明哥德尔语句是悖论（哥德尔本人的也持这种看法）。悖论以数学“认可”的方式（至少在没有揭示出不可以的形式下）导致数学不能接受的结果——矛盾。直到今天，悖论仍然没有彻底解决。从这个意义上说，“第三次数学危机”今天还在。一个证明，如何不导致诸如 $1\neq1$ 的结果，当然是证明理论必须解决的问题。希尔伯特因此以及其他导致不相容性的现象（如负数可不可以开方的矛盾、欧几里德几何与非欧几里德几何的矛盾）将相容性作为证明论的一个重要的研究内容。

（2）符号计算（证明）和数字计算的一体化趋势需要强大的符号计算理论。

一般来说，符号计算是相对于数字（数值）计算而言的。但是如果将数字及其运算

① 本绪论只附少量的、特别是正文未列的参考文献，其余参考文献见正文各章。

符号（数学里的主要符号）作为符号的一部分，那么，是否有一个数学符号与逻辑符号一体化的计算方法呢？换言之，如果逻辑的计算理解为推理，那么应该存在一个数学与逻辑、推理与数学运算一体化的计算方法，它是什么样的呢？如何实现呢？这就是“莱布尼茨之梦”。

莱布尼茨于 17 世纪末 18 世纪初首先提出了逻辑计算的概念，设想逻辑推导的过程以类似于数学运算的方式实现，从而预想了逻辑推导与数学计算完全一体化[1]。这样证明的过程成为计算的过程；计算的理论与方法成为证明的理论与方法。

由于康托的集合论和皮亚诺算术公理系统，使得数及其计算在逻辑主义者看来完全被还原为逻辑操作（考虑 $0=\varnothing$，$1=0^+=0\cup\{0\}=\{0\}$，$2=1^+=1\cup\{1\}=\{0,1\}$，…，我们可以构造自然数；关于它的加、减、乘、除、乘方、开方运算已经由有限的皮亚诺公理形式化地生成），直至弗雷格于 19 世纪末 20 世纪初完全将逻辑算术化，即构造一阶逻辑以表达函数的方式表达逻辑命题，因而至少在逻辑主义看来，逻辑与数学已经一体化，因而数学运算和命题证明没有本质区别。所以罗素说，“从历史上看数学和逻辑，一直是完全不同的学问。……但是在现代，两者都已取得发展：逻辑更加数学化，数学更加逻辑化。结果是，现在在两者之间已完全不可能划出一条界线，事实上两者归一。”[2]

1931 年，由于哥德尔编码方法的创立，使得任意原本非数字的命题（包括逻辑运算符号和非逻辑的语义符号）完全表达为数值。这使得逻辑运算更加数学化。但是，哥德尔展示了一个系统不能证明，即不能计算的命题，这使得证明理论必须回答哪些数是可计算的、哪些不能。针对扩展化的符号（如被哥德尔编码的不只是数字）计算，必须考虑机械化的方法进行任意符号的操作，由此导致了能行性和递归概念的产生。正是针对哥德尔数是否可计算、丢番图方程是否可解等可判定问题，1936 年，邱奇撰写了《初等数论中的不可解问题》论文，图灵撰写了《论可计算数及其在判定问题上的应用》论文，二者成为可计算性的理论（λ 演算，以及与之等价的图灵计算）的奠基作。因此，可计算性、可判定性问题和完全性问题成为孪生问题，从而成为证明论的研究领域。

20 世纪 50 年代，由于乔姆斯基的工作，使得生成转换语法得以建立和发展。乔姆斯基文法（0 型～3 型）——这一语言学的成果被证明完全是自动机的模型（0 型 ～ 3 型文法顺序对应图灵机、线性有界自动机、不确定型下推自动机、有穷自动机）。这在技术层面展示了语言的计算原理和过程。换言之，甚至于自然语言的生成转换过程就是图灵机的运行过程，也就是符号计算的过程。一些具体的实例更加形象而生动地展示了语言生成转换和计算的一体化：Java 语法是乔姆斯基 0 型文法；Lisp 语法参照了 λ 演算的语法，等等。这表明，计算就是语言的处理，也就是大大超出了数字符号的计算。这些进展应验了莱布尼茨、邱奇和图灵的设想，使得通过可计算性和可判定性获得可证明性成为更为现实的途径。

计算、证明的一体化使得对计算的研究成为对证明的研究，促使证明论的独立和深化；而二者的关系成为迫切需要解决的问题，这加剧了证明论独立和深化的步伐。

（3）公理化成为科学进化的重要特征。

科学是陈述体系，这些陈述之间有什么规律可循呢？换言之，要想推导或证明一些命题，陈述体系结构的逻辑和内在规则是什么？这个问题导致了公理体系成为证明论的重要研究问题。

19 世纪和 20 世纪初，数学（以及物理学等许多学科）经历了重要变革，需要在理论上回答数学等学科内在的推导关系，以揭示学科的进化图景。这样加剧了对数学公理化设想与尝试。

公理化证明方法由来已久。泰勒斯、毕达哥拉斯于公元前 6 世纪首先应用了公理化的数学证明方法。亚里士多德于公元前 4 世纪构造了三段论自然演绎系统（它可以认为是 0 个公理组成的推理规则集），后来构建了三段论公理系统，此后发展为形式公理系统，如卢卡西维茨的三段论形式系统。欧几里德继承了毕达哥拉斯的方法，给出了几何公理体系的示范，即构建了有穷的公理和辅助性的陈述规则系统。该系统不断吸收它们所证明的定理，逐渐推演出本学科的无穷的定理。这一传统成为多个学科的传统。后来的希尔伯特几何学、罗巴切夫斯基几何学、黎曼几何学都构建了公理系统。不仅在数学领域，对于科学而言，欧几里德展示了科学作为陈述体系的逻辑图景。在物理学领域，牛顿的《自然哲学的数学原理》也借鉴了欧几里德的公理系统的结构，即命题是由公理逐次、累积证明的。这样，构造数学以至于通用的公理系统成为重要课题。

形式系统和自然演绎系统可以认为是公理系统的高级形式。它不只在内容上实现从公理到被证命题的推演，而且从形式上实现通过语法生成转换进行符号表达，最终实现命题证明。弗雷格在 19 世纪末较早地建立了形式系统。1910 年，罗素的 PM 形式系统建立。1934 年，根岑和雅可夫斯基建立了最早的形式化的自然演绎系统。

在这一背景下，希尔伯特提出了公理化的主张，成为希尔伯特纲要的重要内容，也是证明论的重要目标。这主要表述在他的《数学问题——在 1900 年在巴黎国际数学家代表大会上的讲演》[3]以及 1922 年他在德国的一次数学会议上的演讲[4]。

（4）现代数学哲学思潮要求证明理论在数学中发挥更大作用。

如前所述，逻辑主义主张数学逻辑化，因此数学证明成为数学的核心内容得以强调。而逻辑的变革（面向数学的一阶、高阶逻辑的诞生）提供了数学证明的基本手段和基础。

形式主义将数学理解为符号化和语法化的，因此也是形式化的。形式主义的一个代表人物即希尔伯特，他直接催生了证明论。形式主义公理化的主张源于不赞同直觉主义的非理性成分。在形式主义看来，公理化是一个拯救数学于直觉主义批评的行动，它使得数学的命题具有更高层次的依据，并具有完全的、对于超穷而有效的依据，而非模型（个体结构）上的实例。形式主义主张数学是形式化的，其基本特征是数学由少量命题或规则所完备地覆盖，证明是（形式系统）这一结构的演化过程（所以希尔伯特定义证明为一个序列，其结尾是结论命题）。这一理念促进了证明论的实践。

柏拉图主义也促进了证明论的诞生。柏拉图将世界理解为数和结构。

而在布尔巴基学派（结构主义）中，公理化的传统被继承，这是现代数学思潮影响证明论的又一个例证。

这样，现代数学哲学促进了公理化证明方法的完善，也促进了证明论成为数学的一个关键分支。

2. 证明论学科发展的一些问题

从上面的分析中可以看出，证明论的诞生及其发展是学科高度交叉和融合的，它至少非常接近以至于难以区分于以下的学科：逻辑学、计算机科学技术、哲学。又由于它

诞生于一个数学纲要式的倡导，侧重数学公理化具体的目标，因此，在逻辑、理论上构建证明论的体系结构框架是一个具有难度的问题。应该说，至今没有达成一个广为接受的、统一的证明论体系结构。这主要表现在以下方面。

（1）数学证明方法和数学证明理论缺少统一研究。

方法和理论在知识及其科学活动中具有不同的地位和作用。证明论是否包括证明方法？这一问题的认识并未统一。大多数证明理论的论著往往不专门阐述证明方法，反之亦然。但是如果如此理解，那么数学证明方法属于数学的哪个子学科呢？如果也属于证明论，则需要论证或说明二者之间的关系；如果不属于证明论，也没有明确它被列入其他哪个数学分支。

（2）数学证明方法的标准和分类缺乏共识。

究竟有多少种数学证明方法？如何定义和分类？对此总结得都不够充分。

当前，对数学证明方法进行集成的情况举例见表 0-1。

表 0-1　当前对数学证明方法的分类和集成状况

作者（编者）	著作名称	所介绍的证明方法
萧文强	数学证明 [5]	西方证明方法、中国的直观解释方法
张顺燕	数学的思想、方法和应用[6]	演绎法、分析与综合、归纳法、数学归纳法
孙宗明	数学证明方法 [7]	演绎法和归纳法、直接证法和间接证法、综合法和分析法、循环证法、抽屉证法、定性证法、构造性证明、初等证明、机器证明、轮换证法、不动点法、摄动法、集合等同法、极大极小法、非综合几何法
林东岱，李文林，虞言林（主编）	数学与数学机械化[8]	吴方法
克林	元数学导论[9]	形式系统证法、自然演绎系统证法
Michael Sipser	计算理论导引 [10]	构造性证明、归纳法、反证法三种方法
Danniel J. Velleman	How to Prove It [11]	关系演算、数学归纳法
Ted Sundstrom	Mathematical Reasoning—Writing and Proof [12]	直接证明、反证法、构造性证明
Peter J. Eccles	An Introduction to Mathematical Reasoning—Numbers, Sets and Function [13]	直接证明、反证法、构造性证明、归纳法
Robert S. Wolf	Proof, Logic and Conjecture[14]	形式证明、非形式证明
Roman Garnier and John Talor	100% Mathematical Proof [15]	直接证明（反证法、双条件导出法）、存在与唯一性证明（构造性、非构造性证明）、形式系统证法、自然演绎系统证法、非形式证明
Herman Ruge Jervell	A Course in Proof Theory [16]	归结方法、根岑的演绎方法及根岑树截消方法、模拟和博弈方法
Samuel R. Buss	An Introduction to Proof Theory [17]	根岑的演绎方法及根岑树截消方法
L. A. Harringgton etc. Editors	Harvey Friedman's Research on the Foundations of Mathematics [18]	反推数学方法（公理系统证明方法）

（续）

作者（编者）	著作名称	所介绍的证明方法
U. Kohlenbach	Applied Proof Theory:Proof Interpretations and Their Use in Mathematics [19]	延伸证明方法（解释性证明方法）、证明挖掘方法（解释性证明方法）、截消证明方法
Samuel R. Buss	Handbook of Proof Theory—Studies in Logic and the Foundations of Mathematics [20]	形式系统证法、自然演绎系统证法
Wolfram Pohlers	Proof Theory: The First Step into Impredicativity [21]	形式系统证法、自然演绎系统证法
Gaisi Takeuti	Proof Theory [22]	形式系统证法、自然演绎系统证法
Herman Ruge Jervell	A Course in Proof Theory[23]	截消方法、模拟和博弈方法
E. Charles	Introduction to Mathematical Proofs.A Transition [24]	直接证法、反证法、穷举证法、双蕴涵证法、全称量词证法、存在量词证法、数学归纳法
Sara Negri Jan Von Plato	Proof Analysis [25]	形式系统证法、自然演绎系统证法

从表 0-1 可以看出，仍然有一些广泛应用的证明方法没有被列入其中，如同构性证明方法。同构是布尔巴基学派提出的重要概念，它是对于结构之间的关系的描述，并在现代数学中得到广泛应用。不仅如此，布尔巴基学派的皮亚杰已经证明，同构不仅是数学的证明方法，也是基本的心理结构[26]。此外，对这些诸多的证明方法仍然缺少综合。究其原因应该归结于对证明方法的特征、分类以及它们与证明理论的关系研究得不够充分。

事实上，希尔伯特在倡导构建证明论时是考虑了证明方法的。最近的研究表明，希尔伯特在 1900 年提出著名的 23 个待解的数学问题的同时，还有第 24 个问题：

“作为我的巴黎演讲的第 24 个问题，我想提这样一个问题：化简证明的标准，或者，表明某些证明比其他的更为简单。总而言之，在数学中建立一个数学方法理论”。[27]

这表明，证明论的倡导者明显地认为证明方法存在规律性，并且这些方法应成为证明论的一部分，但是由于这一问题当时并未发表，因此，关于证明方法的系统研究以及与证明论的关系乃至它在证明论中的地位没有得到充分的关注和研究。

（3）对于证明理论的框架缺乏共识。

多数证明论文献（如表 0-1 所列文献）涉及了证明论的进展，但是没有直接回答为什么其内容如此取舍，以及证明论的框架（核心内容及其逻辑关系）如何构建。有些问题没有充分挖掘，并且没有告知读者为什么如此。比如，多数的证明理论著作对证明方法介绍得很少，这是由于没有明确证明理论是否包括证明方法。再如，悖论是导致证明不相容的核心问题，但是悖论的解决很少列入证明论的专著，而列入哲学、语言学专著者居多。还有很多这方面的例子，如多数标以证明理论的著作详细地论述了数论的理论

（一阶、二阶算术及其相容性理论等），但是基本不同时论述几何的证明理论。这说明缺少证明理论取舍的标准——没有明确区分出一般性的证明理论和具体的数学分支的证明理论。再如，许多数理逻辑专著论述了哥德尔不完全性理论，但是严格地说，这些是理论（具体的命题），而逻辑是研究通用命题形式和规则的，而非一个具体命题。这可能造成一个印象，觉得这些理论属于逻辑学本身；而很多标以证明理论的著作并不论述哥德尔不完全性理论。再如，学术界的一种倾向是将可计算理论完全归类于计算机科学与技术，将乔姆斯基文法完全归类于语言学理论，而实际上图灵和λ可计算理论与乔姆斯基文法生成理论完全是一个理论的不同表达，但是证明方法和理论的专著并不都阐述这些内容。事实上，基于乔姆斯基文法的命题的生成过程可以成为一个证明过程，因而图灵计算可以是一个证明过程，所以证明方法和理论应该研究计算理论和乔姆斯基文法。再如对三段论的研究基本上列入哲学学科，而三段论是量化的（量词约束的），因此是数学的；事实上数学家莱布尼茨、希尔伯特都将其作为自己的研究领域进行了深入研究，并且事实上没有一个形式上或内容上的标准将三段论划归为“哲学的”逻辑而非数学（理）逻辑（Mathematical Logic）。这说明证明论与数学其他分支及其他学科的边界不是很清晰。

概括来说，截至目前的数学证明理论著作对于证明论的体系结构的理解基本上是历史的、经验的，而非逻辑的、思辨的。这些著作大致上依据希尔伯特倡导证明论时提出的某些局部问题进行结论的历史积累，没有在逻辑上、理论的框架上论证为什么、依据什么选择和舍弃什么内容。因此，上述的这些问题不是局部的、个别的问题，而是对于证明论整体构架的理解和构建的问题。

3. 证明论的前沿问题

这里列举一些证明论的前沿问题。“前沿问题”理解为创新性的、能够或预期能够对本学科具有重大影响的问题——即使按照这一宽泛的标准，所列的这些前沿问题仍未能穷举，并且所列次序并无任何意义。

（1）解决悖论仍然是证明论的一个重要课题。

悖论的结构分析仍然是研究的一个重要的、基础的研究领域。类型（层次）分析是对悖论较早的结构分析理论，主要由罗素奠定，其基本思想是将谓词和参数的匹配关系层次化并按照层次实现谓词（函词）与参数（变元）的搭配。这种思想经过邱奇的系统化实现了类型的公理化。

20世纪90年代，范畴论由帕夫洛维奇（Dusko Pavlovic）应用于对悖论的表示，它将悖论解释为笛卡儿闭范畴的对象，将悖论表示为图。21世纪初，斯穆里安（Raymond Smullyan）抽象形式系统用于悖论的表示，按照这种方法，悖论可表示为直观的函数形式。

对于解决悖论，自罗素以来提出了一些解悖方案，主要有类型理论、情境语义学理论、ZFC公理系统、新基础公理系统等其他公理系统（蒯因列出了5个公理集合论，对悖论都有解悖方案）。类型理论虽然给出了回避悖论的原则但被认为限制过多，以至于循环被禁止。情境语义学理论由巴威斯等人于20世纪80年代创立，吸收了塔斯基的语言层次理论和奥斯丁的语用学理论，建立了语义情境参数，在情境与悖论语句的关系方面

考察悖论的产生机理，它从否定词的语义分析和语境交互作用中将一个悖论分析为不同的命题，进而分析产生矛盾的原因和表现。但是情境语义学仅仅给出了说谎者悖论的分析，并没有给出通用的解悖方法。目前的5个集合论公理系统对悖论的解决方案仍然绕开（避免）了系统内的悖论的产生，至于悖论本身如何解决没有充分的研究。

从总体上看，悖论在总体或类别上仍然没有形式上的操作或运算解决办法。此外仍然需要解决的一个重要的问题是，如果哥德尔语句导致不完全性，而哥德尔语句本身是悖论（说谎者悖论类型），那么，悖论的解决对于哥德尔第一不完全性定理有何影响，仍然缺少研究。哥德尔第一不完全性定理是证明论的重要基础，从其诞生至今都遭到反驳或异议，包括策梅洛和维特根斯坦提出的异议。近年来在中国也提出了一些反驳意见。应该说，对哥德尔第一不完全性定理的研究应具有重要意义。

可以预见，悖论仍将是解决证明论的重要课题，它的结构形式特征的多视野、跨学科研究将为悖论的解决提供营养。

（2）以反推数学为代表的关于公理系统相容性的研究。

主要由于康托构造的超穷数在公理系统的归纳模式和概括模式的不同，产生了不同的算术公理系统。根据哥德尔第二不完全性定理，公理系统的相容性不能在本系统得到证明，这样应该存在着诸多公理系统，使得某一公理系统在它的更强的一级系统得证。由此将产生一个相容性具有强弱关系的公理体系结构，即哥德尔体系结构。20世纪四五十年代，哥德尔证明了选择公理与集合论的相容性、连续统假设与策梅洛—弗兰克—选择公理（ZFC）的相容性、皮亚诺算术公理系统（PA）与递归运算（无量词命题演算）的相容性。20世纪40年代，根岑证明了PA在$<\varepsilon_0$域的相容性。20世纪80年代以来，Friedman等人开辟了相容性研究的反推研究趋势，即从一个理论逆推出证明它所需要的最小的公理集合（系统），由此构成了反推数学（逆推出的最小的公理集合和被推理的理论本身又构成新的理论，可成为推导其他命题的证明系统）。反推数学理论以及主要包含超穷数的二阶算术理论是近年的重要数学流派。它们主要在超穷数的扩展及归纳模式、分离（概括）模式、分类（选择）模式的约束方面，扩展了ZFC和PA等相关公理体系的蕴含关系，从而扩展了哥德尔体系结构。

（3）自动化证明方法获得诸多实例，功能逐步扩大。这主要体现在自动化的数学证明工具家族的逐步扩大。

1956年，（美）Newel、Shaw和Simon研制了“逻辑理论家”（Logic Theorist, LT），证明了Russell和Whitehead的《数学原理》第2章的38条定理。

1959年，Gelernter研制了“几何机器”（Geometry Theorem Proving Machine, GTM），能够证明若干初等几何题。

1960年，（美）王浩在IBM704机器上，用汇编语言（SAP，共用汇编语言）的自编程序实现了Russell和Whitehead的《数学原理》中的全部220条命题演算定理和150条（85%）谓词演算定理的自动证明。

1960年，（美）McCarthy研制了LISP编程语言，它是谓词逻辑的推理机，可广泛应用于符号和数值计算的公式和命题推理。

20世纪60年代末及70年代，（法）Aix-Marseille大学的Alain Colmerauer和Phillipe Roussel以及Kawolski等人研制了Prolog家族（具有多个版本），它是基于Horn逻辑的