中学生课外辅导丛书

初中数学

解题理论与实践

主　编　吴振林　李重辉

教育科学出版社

·中学生课外辅导丛书·

初中数学
解题理论与实践

主　编　吴振林　　李重辉

副主编　张化一　　刘金忠　　范曰旭

编　委　（按姓氏笔划顺序排列）

刘金忠　　李重辉　　吴振林

张化一　　张运太　　范曰旭

周矛人　　龚利森

教育科学出版社

1993·北京

(京)新登字第 111 号

·中学生课外辅导丛书·

初中数学解题理论与实践

主编　吴振林　李重辉

教育科学出版社出版、发行　(北京·北太平庄·北三环中路 46 号)

各地新华书店经销　山东省寿光市丰华印刷厂印装

开本:787×1092 毫米　1/32　印张:11.5　字数:247 千

1993 年 12 月第 1 版　1994 年 12 月第 1 次印刷

印数:0.001—5.000 册

ISBN　7—5041—1111—2/G·1068　定价:6.00 元

前　言

学习数学，是为了解决问题的．因此，解题的教学就显得十分重要．著名的美国数学教育学家波利亚(G. Polya)认为“在教学中，技能比仅仅掌握一些知识更重要得多．所以在中学，也正如其他任何年级一样，在给学生传授一定数量的知识的同时，应该使学生具备一定程度的解题技能”．所谓解题技能就是指解题能力，它包括分析问题的思维能力、解题方法和技巧．因此可见在初中阶段注意解题方法的教学是十分必要的．

毋庸置疑，要得到解题技能必须参加解题实践．只有在解题训练中，才能加深对基础知识的理解和掌握，才能从中领略数学思想的精要，掌握数学方法的要点和运用中的美妙．但是目前，由于种种原因，对学生的解题训练变成了题海战术，这不仅妨害了学生智力的发展而且也影响了对基础知识的理解和掌握。为了避免题海战术，用尽可能少的时间提高初中生的解题能力，我们编写了这本《初中数学解题方法》，它较为全面系统地总结了初中代数、几何中所涉及的各种解题方法和证题术．在编写中力求做到以下几点：

1　本书所阐述的理论和方法紧密结合初中教材，宜于学生接受，有利于学生对基础知识和基本技能的掌握．同时方法新颖、别开生面，有利于开阔学生的思维．

2　注意解题方法的灵活运用及学生对技巧的掌握；注意了对学生逆向思维能力的培养．

3　精选例题。注意了例题的典型性与代表性. 通过这些例题能使学生掌握有关解题方法的精神实质、收到事半功倍的效果.

相信通过本书的学习，可以培养学生的观察能力、理解能力、想象能力、运算能力、论证能力、抽象概括能力、形式化能力及辩证思维能力，即总括为提高学生解决问题的能力. 同时，由于思路新颖，方法出奇制胜又能提高学生的学习兴趣，为进一步学好数学打下良好基础.

本书适合于四年制初中三、四年级学生自学，也可作为初中数学教师的教学参考书.

由于水平所限，错误和不当之处难免，敬请读者批评指正.

编者：1994 年 7 月

于潍坊教育学院

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongb

目　录

第一章　数学习题

§1.1　数学学习与数学习题

中学数学教育的内容，不是那些正在发展中的现代数学分支，而是依据数学教学大纲，在教师的指导下，有计划、有组织、有步骤地使学生获取在人类文化宝库中业已形成的数学思想、知识和方法，形成数学技能技巧，从而培养学生数学能力和应用的一种思维活动过程.

在数学教育活动中“解题”是最基本的活动形式. 无论是学生的数学概念的形成，数学命题的掌握，数学方法与技巧的获得，还是学生智力的训练与发展，以及学生知识、能力发展水平的评价，都必须通过“解题”来达到. 并且，数学的应用也主要是解决现实中所提出的各种问题，所以说数学的真正组成部分是问题与解. “问题解决”是数学教育的中心任务.

按系统论观点，若 S 表示某个主体(学生)，R 代表某个抽象或具体的系统的集合，则系统(S,R)中集合 R 称之为“问题系统”. 如果做为主体的学生接触 R 后认为其全部元素、性质及其关系都是他所知道的，就称 R 为稳定系统，否则便称为问题系统. 问题系统以 R_r 表示. 当某个主体要从 R 中确定他所不了解的元素、性质和关系时，集合 R 相对该主体就形

成了"题"，解题过程就是主体将问题系统 R_x 转变为稳定系统的过程.

具体地说，凡是根据教学计划和教学大纲对学生的要求，发展学生智能的问题系统称为习题，以数学为内容，或者虽不以数学为内容，但必须运用数学知识或方法才能解决的习题称为数学习题，如课堂上教师提问的题. 例题、练习题、测验题都是数学习题.

解数学习题就是要找到一种一般的数学原理用于习题的条件或条件的推论(中间结果)，通过一定的程序得到习题所要求的答案.

由于解题是数学教育的基本活动形式，现在中学数学课本都配置大量的例题和习题，成为中学数学课本的重要组成部分. 同时，习题配置得好不好. 教师对于习题的选择和处理得是否恰当，直接影响到教学质量的高低，而当前教学中存在的一些弊病和不合理之处，也多是由于对解题教学与解题训练的认识不足. 所以，解题是数学教师的基本功.

我国中学数学教育界普遍重视解题教学与研究，特别是近十年来在中、高考制度的引导下，取得了可观的成果. 大家都承认解题的重要性，也为其所累，从题海中解放出来是教师和学生的共同愿望. 令人不解的是目前在高等师范院校的课程中，在教师的岗位培训继续教育的课程中，恰恰缺少对这种基本功的系统训练课程. 多数教师还只是从零散的解题实践中，逐步地积累一些经验，难以形成系统理论，一旦需要在教学中对学生的解题进行系统指导时，便感到自身理论上的不足，直接后果往往是不能引导学生正确对待解题. 不但没有帮助学生跳出"题海"，反而把学生消极地束缚在"题海"之中.

为此，我们认为，对数学习题的功能、结构、方法、策略等问题进行反思，通过归纳、分析、判断等方法形成系统的数学习题理论，不仅是目前提高数学教师的理论水平和实践能力，让学生脱离“题海”困扰的迫切需要，也是数学教育理论从一般教育理论中分离出来，形成独立科学体系的历史必然. 我们认为：“数学习题理论”应该成为师范院校和教师继续教育培训的一门基础课程.

§ 1.2 数学习题的分类

分类是学习知识，解决问题的常用方法. 对数学习题进行分类，有助于习题解法的探求和研究，也有助于教师在不同的教学阶段和条件下适当地选择、运用数学习题.

数学习题因分类标准不同而有多种不同分法.

一、按知识内容分类

如算术题、代数题、平面几何题等，就是按知识内容分类. 按知识内容分类可以在不同层次上进行，如代数题又可分为代数式、集合对应. 函数、方程、分解因式、不等式等；其中方程又可分为一元一次方程，一元二次方程，二元一次方程组等.

在这种分类方法中，如果一个数学习题中涉及的知识超出某一单元或学科分支，则称其为综合题. 综合题有利于培养学生综合、灵活运用知识来分析解决问题的能力，有利于培养学生的广阔性、多向性思维品质. 在复习、考查中尤其离不开综合题. 而考试中往往利用综合题拉开成绩的档次，善于解综合题是取得好成绩的关键.

例 1 如图 1—1, AB 是半圆的直径，O 是圆心，C 是 AB 延长线上一点，CD 切半圆于 D，$DE \perp AB$ 于 E，已知 $AE : EB = 4 : 1$，$CD = 2$，求 BC 的长.

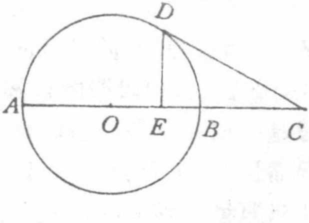

图 1—1

解 如图，设 $BE = x$，则

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongb

$AE=4x$，再设 $BC=y$.

$\because$ CD 是$\odot O$ 的切线，

$\therefore$ $CD^2=CB\cdot CA$，

$\therefore$ $4=y(y+x+4x)$即 $y(y+5x)=4$. (1)

$\because$ AB 是直径，且 $DE\perp AB$.

$\therefore$ $DE=\sqrt{AE\cdot EB}=\sqrt{4x\cdot x}=2x$.

又 $EC=x+y$，$CD=2$，$\angle DEC=Rt\angle$.

$\therefore$ $4x^2+(x+y)^2=4$ (2)

(2)—(1)得

$$5x^2-3xy=0,$$

$$x=\frac{3}{5}y.$$

代入(1)得 $y=1$，

$\therefore$ $BC=y=1$.

该题关键在于题设图形(比例中项、直角三角形)的应用和代数法(设 $BE=x$，列方程组求解，消去法)的使用.

注意在考试中要分清综合题与“堆砌题”的区别.

例 2　解方程 $ax^4+bx^2+C=0$，其中系数 a,b,c 分别满足：

(1)$(0.2)^{\sqrt{a}}=0.008$；

(2)b 的相反数是方程 $\lg(2y+b)+\lg5=3-\lg2\frac{1}{2}$的根；

(3)C 是下列交集的元素$\{C|2<C\leqslant5\}\cap\{C|C^2-2C-8=0\}$.

此题由四个问题组成，由(1)求 a；由(2)求 b；由(3)求 C；然后解方程 $ax^4+bx^2+C=0$. 象这样把四个没有内在联系的问题生硬地扯在一起，不是真正的综合，只是单纯的堆砌. 如

果做考题用，可能使做错前面一个小题的学生失去解出后面结果得分的机会，造成不必要的失分，难考出实际水平，就是在教学中也应避免使用堆砌题.

二、按开放性分类

凡具有完备的条件和固定答案的习题叫封闭题；而答案不固定，或条件不完备的习题叫开放题.

初中课本中的习题多是封闭题. 封闭题定向性强，有利于在不同条件下重复思维操作，是巩固推理技能和加深理解知识所必须，多用于巩固知识，起到了同化作用.

开放题是在研究"问题解决"的热潮中出现的，并且在培养创造思维能力方面发挥重要作用. 开放题可以在不同的经验和能力水平的基础上，通过学生自己的观察，提出自己所喜欢的解决问题的方法，获得多种不同的解题方法. 开放题在解题过程中要建立新的认知结构，能起到顺应作用.

目前初中学生解答开放题的能力普遍较差，也说明知识、技能的堆砌对学生的创造性思维能力的发展并没有必然的联系. 为此，应当在教学中适当选择一些开放性题目，引导学生独立观察思考，借以培养学生思维的灵活性、深刻性和细致性.

例 3 "$12a^2b^2c$、$8a^3xy$"有什么共同点？

不少学生只指出了两式都是单项式、整式、有理式这种外表上共同点，未能从另外角度指出它们有公因式 $4a^2$、都是五次式等.

三、按评分的客观性分类

有唯一正确答案，不论谁评分都只能给出同一个分数的习题，叫做客观性习题；正确答案可用多种方式表述，评分者

须凭主观经验给分的习题，叫做主观性习题.

传统的证明题、计算题，都属于主观性习题. 这些题目虽有明确的已知条件和所求(或求证结论)，但学生可以依据不同知识、采取不同的方法来解题，即使采用相同知识，同一方法，解题过程的繁简程度、清晰程度和严谨程度也各不相同，教师只能凭主观经验予以评分，从而影响到考试的准确性与可靠性.

客观题又分为选择题、填空题和简短问答题等，初中数学中的客观题主要是选择题、填空题等. 选择题是近几十年发展起来的题型. 其特点是，题目中已给之若干备选答案，答题者只须选其正确者，勿需自行构建. 由此它的优点是有利于扩大试卷容量，有利于评分标准统一，提高考试信度和效度；有利于提高评卷速度，有利于培养学生分析判断能力及推理能力，提高解题速度和灵活性.

选择题的缺点是：命题要有专门技巧，费时多，选择支中须有足量的似真性迷惑支；其“客观性”仅指评分而言，不一定是学生的实际成绩，而由于答案可以随机猜测，可能助长学生侥幸心理；局限于考查个别事物，难反映知识的整体和深度；答案唯一正确，不能反映解题思维过程，求同而不利于发散思维的训练.

由于选择题的以上优点，在考试中及教育测量中成为主要题型之一，由于其缺点，在高水平数学竞赛中一般不用.

选择题又有多种分类方法，如按确定正确选择支的要求和方式分为单项选择题、多项选择题、组合型选择题及配伍型选择题等.

四、要素分析分类法

数学习题可表示为四个要素的系统：{Y O P Z}．其中的四个要素分别为 Y 表示习题条件；O 表示解题依据；P 表示解题方法；Z 表示习题结论．据四个要素中已知要素的多少．可将数学习题分为四类．

1．**标准性题** 即四个要素都为已知的题．

例 4 用正弦定理证明三角形内角平分线定理．

此题对已经学过正、余弦定理的学生来说，Y：已知如图 1－2，$\triangle ABC$ 中 AD 是 $\angle BAC$ 的平分线；O：正弦定理；P：把 $\frac{BD}{AB}$ 及 $\frac{DC}{AC}$ 用正弦比值表之，并利用诱导公式转化角；Z：$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$．这四个要素均为已知．因此是一个标准性题．

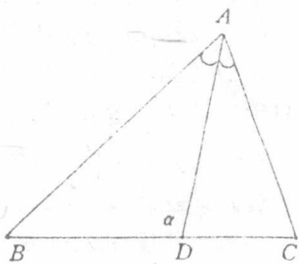

图 1—2

2．**训练性题** 即四个要素中只有一个是学生不知道的，其余三要素都是学生已经知道的题．

例 5 分解因式：$x^2-7x+12$

此题对学过十字相乘法分解因式的学生来说，除了结论 Z 是未知的之外，其它三个要素 Y、O、P 都是已知的．因此是一个训练性题．

例 6 已知两数的和为 $4m$，积等于 $4m^2-9n^2$，求这两个数．

此题对学过韦达定理的学生来说，Y：两数和等于 $4m$、两数积等于 $4m^2-9n^2$；O：韦达定理；P：设两数为方程 x^2-4mx

$+4m^2-9n^2=0$ 的两个根，均为已知的，只有结论 Z 是未知的，故也是一个训练性题.

3. 探索性题　四个要素中有两个为学生已知的，其余两个为未知的题目.

例 7　如图 1—3：已知 $\triangle ABC$，$\angle B=60°$，$BC=BE$，F 是 DA 上任意一点，$\triangle EFG$ 为正三角形. 求证：$DF=BG$.

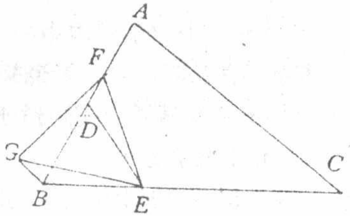

图 1—3

此题是“三角形”一章的练习题，学生虽掌握了三角形的基本知识，但证明两线段相 等可利用特殊三角形性质、等角对等边以及证两三角形全等等方法，需要学生自己想出方法，故只有条件 Y，结论 Z 是已知的，另两要素 O、P 都是未知的.

4. 问题性题　即四个要素中仅有一个是学生已知的，其余三个都是学生所不知道的.

例 8　用同一种规格的正多边形瓷砖铺满地坪，正多边形有无数种，哪些正多边形可以铺满地坪而无空隙？同时使用几种规格的瓷砖能否铺满地坪？

这里除了条件 Y：用同种规格的正多边形铺满地坪外，其余三要素均为未知，故此题为问题性题. 学生通过自己努力，寻找解题依据和方法，可获得一些有用的结论. 如铺满地面而不重叠无空隙的条件是：围绕每一公共点 P 的各角之和等于 360°. 只有正三角形，正方形和六边形三种正多边形可铺满地坪.

通过要素分析，将数学习题分为四类，对教师掌握习题难度和学生解题都有好处，因为习题的难度，由易到难的排列次序是：

标准性题——训练性题——探索性题——问题性题.

目前初中数学课本中的练习题分为三个层次，即“练习”、“习题”和“复习题”，一般说来，“练习”中适合于安排标准性题和训练性题，“复习题”中适于安排探索性题和问题性题，“习题”则介于两者之间.

标准性题和训练性题，由于不存在或只有一个未知要素，通常具有定向的解题方法，也称为收敛性题，常用于即时巩固学生的知识，以便强化学生的思维定势；探索性题和问题性题，由于未知要素较多，通常不具有定向的解题方法，也称为发散性题，常用于培养学生思维的灵活性，有助于发展学生的智力.

学生解题也是按先把问题性题转化为探索性题，再把探索性题转化为训练性题或标准性题，这就是从未知到已知的转化过程. 由此看来，同一个题目对知识水平和思维能力不同的学生来说性质也不同，对好学生是训练性题，对差生来说就可能成为探索性题.

教师在课堂教学中可灵活地运用增加未知要素的方法来提高题目难度，或者予以提示解题依据及方法，或分析条件，或析出结论，用减少未知要素的方法来降低题目难度层次，创造适合学生认知的教学情景.

例 9 分解因式：$x^2-7x+12$ 为训练题. 改为：给之适当的数值，用十字相乘法分解因式 x^2-7x+9，这就变成了探索性题.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongb