UMSS

大学数学科学丛书 —27

常微分方程简明教程

王玉文　史峻平
侍述军　刘　萍　编著

科学出版社
www.sciencep.com

常微分方程简明教程

王玉文　史峻平
侍述军　刘　萍　编著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书是一本常微分方程本科生教材，传统意义的微分方程是讲解求解微分方程解析解的特殊技巧，本书的特别之处在于首先将数学建模贯穿全书，然后以不同的方法进行解的表达，在解的表达中，不仅仅限于解析解，主要以定性为主，通过斜率场、解的图像、相平面上的向量场及轨线等工具，到达对解的渐近行为的最好理解，最后以数值方法与计算机模拟为工具加深对解的行为的直觉理解. 全书的图形演示课件可登陆本书指明的课程网站下载.

全书分 5 章，主要包括一阶微分方程、一阶二维微分方程组、二阶线性常系数微分方程、一阶二维非线性方程组和一阶 n 维线性微分方程组.

本书适合高等院校数学专业的本科生作为教材，也适合其他相关的人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

常微分方程简明教程/王玉文等编著. —北京：科学出版社，2010

(大学数学科学丛书；27)

ISBN 978-7-03-028962-9

Ⅰ. 常… Ⅱ. 王… Ⅲ. 常微分方程-高等学校-教材 Ⅳ. O175.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010) 第 177537 号

责任编辑：陈玉琢／责任校对：陈玉凤
责任印制：钱玉芬／封面设计：王 浩

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

源海印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2010 年 9 月第 一 版 开本：B5(720 × 1000)
2010 年 9 月第一次印刷 印张：16 1/2
印数：1—3 000 字数：310 000

定价：48.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

《大学数学科学丛书》序

按照恩格斯的说法，数学是研究现实世界中数量关系和空间形式的科学．从恩格斯那时到现在，尽管数学的内涵已经大大拓展了，人们对现实世界中的数量关系和空间形式的认识和理解已今非昔比，数学科学已构成包括纯粹数学及应用数学内含的众多分支学科和许多新兴交叉学科的庞大的科学体系，但恩格斯的这一说法仍然是对数学的一个中肯而又相对来说易于为公众了解和接受的概括，科学地反映了数学这一学科的内涵．正由于忽略了物质的具体形态和属性、纯粹从数量关系和空间形式的角度来研究现实世界，数学表现出高度抽象性和应用广泛性的特点，具有特殊的公共基础地位，其重要性得到普遍的认同．

整个数学的发展史是和人类物质文明和精神文明的发展史交融在一起的．作为一种先进的文化，数学不仅在人类文明的进程中一直起着积极的推动作用，而且是人类文明的一个重要的支柱．数学教育对于启迪心智、增进素质、提高全人类文明程度的必要性和重要性已得到空前普遍的重视．数学教育本质是一种素质教育；学习数学，不仅要学到许多重要的数学概念、方法和结论，更要着重领会数学的精神实质和思想方法．在大学学习高等数学的阶段，更应该自觉地去意识并努力体现这一点．

作为面向大学本科生和研究生以及有关教师的教材，教学参考书或课外读物的系列，本丛书将努力贯彻加强基础、面向前沿、突出思想、关注应用和方便阅读的原则，力求为各专业的大学本科生或研究生(包括硕士生及博士生)走近数学科学、理解数学科学以及应用数学科学提供必要的指引和有力的帮助，并欢迎其中相当一些能被广大学校选用为教材，相信并希望在各方面的支持及帮助下，本丛书将会愈出愈好．

李大潜

2003 年 12 月 27 日

前　言

数学分析中微积分的思想方法在日常生活中具有许多重要的应用, 其中最漂亮的应用往往导致对微分方程的研究. 在物理学、化学、生态学等应用科学中, 大量基本原理的数学表述经常使用微分方程的语言. 例如, 当某个质量为 m 的质点在外力 $f(t)$ 的作用下, 同时受到和速度成正比的阻力的影响, 其位置随时刻 t 在变化, 一般用 $y = y(t)$ 来表示, 牛顿第二定律的数学表述就是如下的等式:

$$m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = f(t) - b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},$$

其中 $b > 0$ 为阻力系数, 这就是一个微分方程. 直观地说, 微分方程就是联系着自变量、未知函数及其导数的关系式. 例如,

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + cy = f(t), \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = ky\left(1 - \frac{y}{N}\right)\left(\frac{y}{M} - 1\right) \tag{2}$$

及

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2u}{\partial y^2} = f(x, y), \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2T}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2T}{\partial y^2}. \tag{4}$$

如果在微分方程中, 自变量的个数只有一个, 则称之为常微分方程. 方程 (1) 及 (2) 就是常微分方程, 其中 t 为自变量, y 为未知函数, b 与 c 为参数. 自变量个数为两个或两个以上的微分方程, 如方程 (3) 与 (4), 称为偏微分方程.

本门课程主要学习常微分方程, 一般简称为“微分方程”或“方程”. 常微分方程的一般形式为

$$F(t, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0, \tag{5}$$

这里 F 为联系着自变量 t, 未知函数 y 及其各阶导数的函数关系, 其中未知函数最高阶导数的阶数称为微分方程的阶数. 如果 F 为 $y, y', \cdots, y^{(n)}$ 的线性函数, 则称之为 n 阶线性微分方程. 例如, 方程 (1) 是二阶线性微分方程. 不是线性的微分方程称为非线性微分方程. 例如, 方程 (2) 为一阶非线性微分方程.

如果函数 $y=y(t)$ 具有直到 n 阶的导数, 并且代入 (5), 使它成为恒等式, 则称 $y=y(t)$ 为方程 (5) 的解. 如果方程 (5) 的解 $y=y(t;c_1,c_2,\cdots,c_n)$ 是具有 n 个相互独立的任意常数为参数的函数, 即满足在 $(t,c_1,c_2,\cdots,c_n)$ 的某一个邻域内有

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial c_1} & \dfrac{\partial y}{\partial c_2} & \cdots & \dfrac{\partial y}{\partial c_n} \\ \dfrac{\partial y'}{\partial c_1} & \dfrac{\partial y'}{\partial c_2} & \cdots & \dfrac{\partial y'}{\partial c_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial y^{(n-1)}}{\partial c_1} & \dfrac{\partial y^{(n-1)}}{\partial c_2} & \cdots & \dfrac{\partial y^{(n-1)}}{\partial c_n} \end{vmatrix} \neq 0,$$

则称 $y=y(t;c_1,c_2,\cdots,c_n)$ 为方程 (5) 的通解. 而 n 阶线性方程的通解 $y=y(t;c_1,c_2,\cdots,c_n)$ 等价于对任一个确定的解 $y=y(t)$ 都存在唯一一组确定的常数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$, 满足

$$y(t)=y(t;c_1,c_2,\cdots,c_n).$$

为了确定方程 (5) 的一个特定的解, 往往需附加一定条件. 例如, 当 $t=t_0$ 时, $y=y_0$, $y'=y_0^{(1)}$, $\cdots$, $y^{(n-1)}=y_0^{(n-1)}$ 称为初始条件, 其中 $y_0,y_0^{(1)},\cdots,y_0^{(n-1)}$ 为 n 个已知常数. 方程 (5) 连同初始条件称为初值问题. 在应用中, 初始条件都有明确的实际意义.

在传统的常微分方程课程中, 主要寻找一些特殊的技巧和方法，去发现这些方程的通解或初值问题的特解, 然而可以找到解析方法进行求解的微分方程是很少的, 因而很难在一本大学本科初等传统微分方程课程中展现微分方程在数学应用中的全部价值美.

在现代微分方程研究及应用中, 寻求具体微分方程的解析解的特殊技巧已经不再是主流课题, 而应用中提出的各种微分方程又往往是非线性方程, 寻找这些方程的解析解绝大部分是不可能的, 其有效的方法是定性方法与数值方法.

在大学本科数学基础课程中, 常微分方程是少数几个可以展示数学研究本质的课程之一. 在传统初等微分方程中往往强调求微分方程解析解的特殊技巧, 即使介绍定性分析方法, 也往往放在教材的后面章节, 一般由于时间的限制只能介绍一部分内容, 难以展示数学研究的本质.

为了在一门大学本科初等微分方程课程中展示数学直觉与数学研究的本质, 我们做了如下努力: 首先, 将数学建模贯穿本书前 4 章. 各种类型微分方程的研究都是以实际问题的数学建模开始的, 然后以不同的方法进行解的表达, 以达到解决问

题的目标; 其次, 在微分方程解的表达方法中, 不再仅限于解析解, 而是以定性分析为主, 通过斜率场、解的图像、相平面上的向量场及轨线等工具, 达到对解的渐近行为的最好的理解; 再次，以数值方法与计算机模拟为工具加深对解的行为的直觉理解, 全书的图形演示课件可登陆本书后指明的课程网站下载; 最后, 本书在研究方法上注意直觉，由具体到抽象, 重探究实质, 轻表达形式的一般性, 重猜想与归纳以期待达到培养学生对数学进行探索研究的能力.

本书的第 1 章为一阶微分方程. 从开始就引进斜率场、解图像及相线等形象分析工具, 以计算机课件进行辅助图形演示, 重点介绍定性分析, 特别是分歧现象的分析. 对于解析方法, 仅限于应用广泛的“分离变量法”及线性微分方程的“常数变易法”与“积分因子方法”，同时将解析方法与定性方法相结合. 为加深对演示图形的计算机模拟的理解, 本章介绍了数值方法-欧拉方法. 第 2 章为一阶二维微分方程组. 首先, 引入相平面上的向量场、方向场及轨线的概念. 对一阶二维线性方程组, 将定性方法与解析方法相结合, 并将二阶线性微分方程化为一阶二维线性方程组进行分析. 对一阶二维齐次线性微分方程组，根据其特征值的符号进行定性分析. 最后以迹-行列式平面给出各种类型平衡点及相图的分类. 第 3 章为二阶线性常系数微分方程. 与传统教材相比, 突出了“思想方法”的表述, 以猜测-检验方法为核心, 探究各种问题的解法. 最后, 归纳出一般问题的解法, 并给出证明. 以此增强学生的研究能力. 第 4 章为一阶二维非线性微分方程. 以第 2 章引进的相平面、轨线及相图为基础，进一步引入线性化, x 零水平线与 y 零水平线及分离曲线的概念，通过定性分析研究解的渐近行为及分歧现象的规律, 同时给出具体问题中的应用. 前 4 章的教学内容及表述方式有别于国内流行教材. 第 5 章为一阶 n 维线性微分方程组. 介绍非自治条件下的一般理论, 重点在于理论分析及基解矩阵的求法. 对于一阶 n 维常系数线性微分方程组, 利用矩阵指数函数给出基解矩阵的统一解法, 同时利用特征值方法给出基解矩阵的简便求法. 对于可化为一阶 n 维常系数线性微分方程组的 n 阶常系数微分方程, 除上述方法外, 介绍了拉普拉斯变换方法. 这一章与国内流行的微分方程教材类似.

本书编写框架是在本教学组多年的教学实践基础上由王玉文、史峻平所确定的. 第 1 章由侍述军执笔; 第 2 章和第 3 章由王玉文执笔; 第 4 章由史峻平、刘萍共同执笔; 第 5 章由刘萍执笔. 崔仁浩和王金凤为本书配备了习题. 本书的学习指导及演示课件由刘萍、崔仁浩、王金凤和侍述军共同编写 (见本课程网站), 随后另行出版.

本书在编写过程中参阅了国内、国外最新的、流行的微分方程教材, 特别是美国波士顿大学的精品微分方程教材*Differential Equations*[12] 及国内精品常微分方程教材 [3,14].

由于作者水平有限, 对于书中的不足和疏漏之处, 敬请读者指正.

编　者

2010 年元月

目　　录

第 1 章　一阶微分方程

本章从客观世界中的一阶常微分方程模型入手, 逐步介绍研究微分方程的三种主要方法: 解析方法、定性方法、数值方法. 解析方法主要包括了分离变量法及线性微分方程的猜测-检验法、常数变易法与积分因子方法. 定性方法主要涉及一阶微分方程的斜率场、解图像及一阶自治方程的相线. 数值方法主要介绍应用广泛的欧拉方法. 本章还给出一阶微分方程解的存在唯一性定理和单参数微分方程族的分歧现象等内容. 所有这些都是常微分方程研究的基础, 值得好好地学习与体会.

1.1　一阶微分方程模型

在反映客观世界发展过程的量与量之间的关系中, 大量存在着满足常微分方程关系式的数学模型. 而利用数学研究现实生活应用的重要一步就是建立与之相应的数学模型. 本节在不同的假设条件下建立了两种常微分方程的人口模型, 目标是从假设条件出发得到数学模型, 并通过引入解析方法、定性方法对这些模型进行研究, 对其发展作出预测.

1.1.1　Malthus 人口模型

英国人口统计学家马尔萨斯 (Malthus) 在担任牧师期间, 查看了当地教堂 100 多年来的人口出生统计资料, 发现了如下现象：人口出生率是一个常数. 在 1798 年, 他发表了《人口原理》一书, 其中提出了著名的 Malthus 人口模型.

他的基本假定条件如下: 在人口自然增长的过程中, 人口增长率与人口总数成正比. 现在对此进行分析, 该假定条件比较简单, 因而期望该数学模型也较简单. 此模型涉及如下数量:

t 表示时间 (变量), P 表示人口数 (依赖于时间), k 表示人口增长率与人口数之间的比例常数 (参数), 参数 k 称为单位增长率. 人口数关于时间的增长率是人口数 P 关于时间变量 t 的导数 $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}$, 与人口数成正比描述为 kP, 因而得如下微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = kP,$$

这是本课程得出的第一个微分方程的实例, 其为一阶常微分方程.

1. *定性方法*

因为 $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=kP$; 若 $P=0$, 则 $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=0$, 所以常值函数 $P(t)=0$ 是方程的一个解. 因为该解永远是常数, 所以称之为**平衡解**. 其现实意义如下, 若人口基数为 0, 则人口增长率为 0, 表明人口不存在.

如果 $k\neq 0$, 并且在某一时刻 $t=t_0$, 人口数 $P(t_0)\neq 0$, 那么在时刻 $t=t_0$,

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=kP(t_0)\neq 0.$$

因此, 人口不是常数. 如果 $k>0, P(t_0)>0$, 那么在时刻 $t=t_0$,

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=kP(t_0)>0.$$

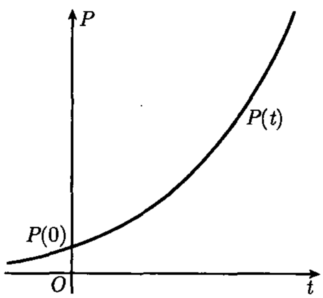

图 1.1　满足 $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=kP$ 的函数图像

因此, 人口是增长的. 当随着时间的推移, 人口数 $P(t)$ 越来越大, 进而 $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}$ 越来越大, 这样人口数 $P(t)$ 增长得更快. 也就是说, 随着人口的增长, 人口增长率也在增长, 则人口数 $P(t)$ 作为时间变量 t 的函数, 其图像可能如图 1.1 所示.

在 $t=0$ 时, $P(t)$ 的值 $P(0)$ 称为初始条件. 给定不同的初始条件, 可以得到不同的函数 $P(t)$.

上述通过 $P(t)$ 随 t 的增长进行的分析方法称为该方程的**定性分析**(qualitative analysis). 当关注该模型是否能预示人口爆炸时, 只要参数 $k>0$, 初始条件 $P(0)>0$, 则回答是肯定的.

2. *解析方法*

当知道了 $P(0)$ 的确切值 P_0, 想去预测 $P(5), P(50)$ 或更多的值时, 需要更确切的关于 $P(t)$ 的信息. 方程 $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=kP$连同初始条件 $P(0)=P_0$, 称为初值问题. 初值问题的解 $P(t)$ 首先满足方程本身, 即对任意的 t, $\dfrac{\mathrm{d}P(t)}{\mathrm{d}t}=kP(t)$. 其次, 满足初始条件 $P(0)=P_0$. 由于知道指数函数的导数与自身的关系, 通过猜测与尝试看到, 指数函数 e^{kt} 的导数 $k\mathrm{e}^{kt}$ 是 k 与 e^{kt} 的乘积, 因而方程有解 $P=\mathrm{e}^{kt}$. 但是方程也有其他解, 因为对于 $P(t)=C\mathrm{e}^{kt}$(C 是常数), $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=C(k\mathrm{e}^{kt})=k(C\mathrm{e}^{kt})=kP(t)$. 因此, 对任意常数 C, $P(t)=C\mathrm{e}^{kt}$ 是方程 $\dfrac{\mathrm{d}P(t)}{\mathrm{d}t}=kP(t)$ 的解. 这样对不同的 C, 方程有不同的解, 但这些解中哪一个才是给出的初值问题的解呢? 由初始条件 $P(0)=P_0$,

若 $P(t)=Ce^{kt}$ 想成为解, 则必有 $P_0=P(0)=Ce^{kt}|_{t=0}=C$, 因而 $P(t)=P_0e^{kt}$ 是初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=kP, \\ P(0)=P_0 \end{cases}$$

的解, 它是方程 $\dfrac{\mathrm{d}P(t)}{\mathrm{d}t}=kP(t)$ 的一个特解. 函数 $P(t)=Ce^{kt}$(C 为任意常数) 称为方程的通解. 通过它和初始条件可得出任意初值问题的解.

Malthus 人口模型告诉我们, 当 $k>0$ 时, 人口是按指数增长的. 当人口总数不大, 生存空间和资源极其充裕的情况下, 这是可能与合理的. 但随着时间的增加, 人口将无限制地增长, 这在现实世界中是不可能的. 因此, 当人口基数较大时, Malthus 人口模型不能正确地描述人口增长状况, 这时必须考虑空间与资源对人口增长的限制因素.

1.1.2 Logistic 人口模型

因为资源是有限的, 人口不能无限制地增长, 为了改进 Malthus 人口模型, 作如下假定:

(1) 当人口数很小时, 增长率与人口数成正比;

(2) 当人口数很大, 达到资源和环境不能承受时, 人口数开始减少, 即增长率为负的.

沿用 Malthus 模型中的量, t 表示时间 (变量), P 表示人口数 (依赖于时间), k 表示人口增长率与人口数之间的比例常数 (当人口数很小时).

此外, 由资源与环境所限, 引入另外的参量 N, 称为最大承载量 (carrying capacity), 用以表示自然资源和环境条件所能容纳的最大人口数. 因此, 在假定条件下, 当 $P(t)<N$ 时, 人口是增加的; 当 $P(t)>N$ 时, 人口是减少的, 即当 P 较小时, $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}\approx kP$; 当 $P(t)>N$ 时, $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}<0$.

为了使模型尽可能的简单, 要在 Malthus 模型的基础上添加一定的量 X, 使得

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=k\cdot X\cdot P$$

满足假定条件. 当 P 较小时, X 接近 1; 但当 $P(t)>N$ 时, $X<0$. 取 $X=1-\dfrac{P}{N}$, 则满足条件. 此时模型变为

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=k\left(1-\frac{P}{N}\right)P,$$

称为具有增长率 k 和最大承载量 N 的 **Logistic 人口模型**, 该模型由荷兰生物学家 Verhulst 在 1838 年提出.

因为 Logistic 人口模型的微分方程是 $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=f(P)=k\left(1-\frac{P}{N}\right)P$. 当 $P=0$ 或 $P=N$ 时, $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=0$. 这样 $P(t)=0$ 和 $P(t)=N$ 两个常值函数是方程的两个平衡解, 它不随时间 t 而变化, 表明一种稳定状态, 即一开始无人口, 则人口数就一直保持为 0; 如果一开始人口就达到最大承载量 N, 则人口始终保持这个数 (图 1.2). 当初始条件不是 0 与 N 时将不会发生这种情况.

如果初始人数 $P(0)$ 介于 0 与 N 之间时, 则有 $f(P)>0$, 增长率 $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=f(P)>0$, 因而人口数严格递增, 而且只要 $P(t)$ 介于 0 和 N 之间, 人口就会继续增加, 不会停下来. 但当 $P(t)$ 接近 N 时, $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=f(P)$ 接近于 0, 表明增长开始缓慢, 渐渐停下来 (图 1.3).

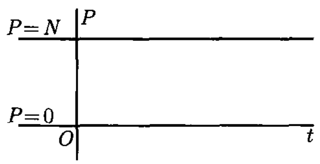

图 1.2 Logistic 方程 $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=k\left(1-\frac{P}{N}\right)P$ 的两个平衡解

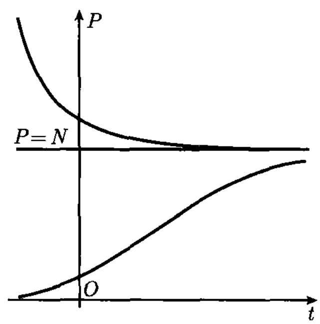

图 1.3 Logistic 方程 $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=k\left(1-\frac{P}{N}\right)P$ 趋于平衡解 $P=N$ 的解

如果初始人数 $P(0)$ 大于 N, 则有增长率 $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=f(P)<0$, 因而人口数严格递减, 而且只要 $P(t)$ 大于 N, 人口就会继续递减, 不会停下来. 但当 $P(t)$ 接近 N 时, $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=f(P)$ 接近于 0, 表明递减开始放慢, 渐渐停下来.

当 $P(0)<0$(当然无现实意义) 时, 则 $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=f(P)<0$, $P(t)$ 递减, 并且递减变得越来越快而不会停下来.

因此, 通过 $f(P)$ 能够了解微分方程具有不同初值的解, 能够知道的是 $P=0, P=N$ 是两个平衡解; 当 $0<P<N$ 时, $P(t)$ 增; 当 $P>N$ 或 $P<0$ 时, $P(t)$ 减. 而任何时刻 $P(t)$ 的值依赖于 $P(0), k$ 和 N. 通过以上的分析, 部分解大致如图 1.4 所示. 对于 Logistic 模型解的一般表达式将在 1.2 节给出.

至此, 已经讨论了两种人口模型, 这两种模型也是自然界中反映一般生物物种增长的典型模型. 在处理这两种模型时, 解析方法是通过寻找微分方程解的一般表

达式来研究解的性质与行为. 已经看到指数函数给出了 Malthus 模型解的显式表达, 因而 Malthus 模型也称为**指数增长模型**. 有了方程解的表达式, 对解的很多性质当然就一目了然了. 但是, 大量的微分方程是不能用解析方法来处理的, 没有办法找到这些微分方程的精确解来研究它们. 这样必须寻求其他方法来研究.

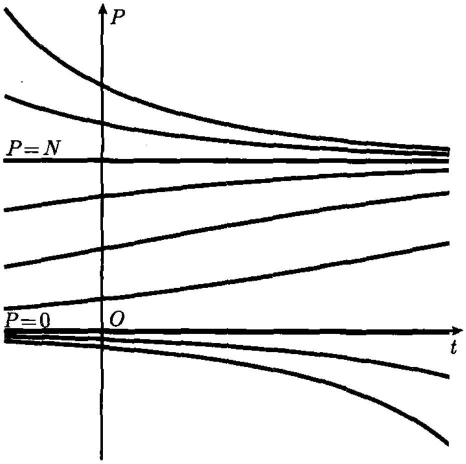

图 1.4 Logistic 方程 $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=k\left(1-\frac{P}{N}\right)P$ 趋于平衡解 $P=N$ 及远离平衡解 $P=0$ 的解

重要的替换途径之一就是定性分析的方法, 利用几何来给出微分方程模型解的一个大致信息, 正如在处理 Logistic 模型中分析的一样. 虽然没有在特定的时间给出方程的精确解, 但是能够利用方程本身的一些信息来决定解的渐近行为. 在通常情况下, 这往往就是对现实生活中的模型所需要的.

处理微分方程的第三种途径是利用数值逼近的数值方法. 随着计算机的普及和功能的逐渐强大, 这一方法已经成为当今处理微分方程的最重要手段之一, 将会在以后的章节中看到它的强大威力.

1.2 解析方法：变量分离

正如对一般的 5 次及其以上代数方程不能用统一公式求解一样, 对于一般的微分方程也没有通用的初等解法, 而能有初等解法的微分方程是很有限的. 本节将介绍最简单的几类可求解的微分方程.

1.2.1 变量分离方程

1. *微分方程基本概念*

微分方程是联系着自变量、未知函数及其导数的关系式. 在前面讨论的微分方