高等学校教材

大学物理学（上）

宋小龙 葛永华 庄良 许士跃 等 编

高等教育出版社

高 等 学 校 教 材

大学物理学（上）

D a x u e W u l i x u e

宋小龙 葛永华 庄良 许士跃 等编

高等教育出版社·北京

内容提要

本书根据教育部高等学校物理学与天文学教学指导委员会编制的《理工科类大学物理课程教学基本要求》（2010年版），按照目前本课程教学的实际情况，在编者长期教学所积累的教学经验的基础上编写而成。本书旨在帮助学生在掌握基础物理理论及其应用的同时，能充分体会物理学分析问题、研究问题和解决问题的方法，能深刻领会物理学中的科学思维和创新精神，为以后进一步的学习、研究打下扎实的基础。

本书共19章内容，分为上、中、下三册。上册包含力学、振动和波动部分，中册包含电磁学部分，下册则包含热学、波动光学和近代物理部分。

本书可作为高等学校理工科各专业的大学物理课程的教材，也可供大专院校、成人高校的相关专业师生使用，对于自学大学物理课程的读者也是一本很好的阅读教材。

图书在版编目（CIP）数据

大学物理学. 上 / 宋小龙等编. -- 北京：高等教育出版社，2015. 8（2016.5重印）

ISBN 978-7-04-043157-5

Ⅰ. ①大… Ⅱ. ①宋… Ⅲ. ①物理学-高等学校-教材 Ⅳ. ①O4

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 138355 号

策划编辑 高聚平　责任编辑 高聚平　封面设计 赵　阳　版式设计 杜微言
插图绘制 杜晓丹　责任校对 刘春萍　责任印制 尤　静

出版发行 高等教育出版社
社　　址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印　　刷 北京明月印务有限责任公司
开　　本 787 mm× 1092 mm 1/16
印　　张 10.25
字　　数 250千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网　　址 http://www.hep.edu.cn
　　　　 http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.landraco.com
　　　　 http://www.landraco.com.cn
版　　次 2015年8月第1版
印　　次 2016年5月第2次印刷
定　　价 18.80 元

物 料 号 43157-00

前言

大学物理课程是一门系统地定量讨论自然界的各种基本现象及其基本规律的重要基础课。课程的目标不仅在于系统展示基础物理的理论及其应用，还在于充分彰显物理理论建立过程中的创新思维、科学精神和定量研究问题的方法。本教材是多位长期从事大学物理教学的教师，根据教育部高等学校物理学与天文学教学指导委员会编制的《理工科类大学物理课程教学基本要求》(2010 年版)，结合长期的教学体会精心编写而成的，旨在帮助学生在掌握基础物理理论及其应用的同时，能充分体会物理学分析问题、研究问题和解决问题的方法，深刻领会物理学中的科学思维和创新精神，为以后进一步的学习、研究打下扎实的基础。

本书分三册共十九章，上册首先系统讨论宏观物体在机械运动中的运动学及处理运动学问题的基本方法；其次以牛顿运动定律为基础，分析处理各类动力学问题的基本方法；最后全面讨论力的空间和时间累积效应以及它们对物体运动状态的影响等问题。中册系统讨论自然界中电磁运动的现象及其研究方法，以库仑定律、安培定理、法拉第电磁感应定律和麦克斯韦对电磁场的两个科学假设（涡旋电场和位移电流）为基础，全面讨论静电场，恒定电流和磁场，交变电磁场的特征及它们所遵从的基本规律。下册首先讨论分子运动的基本物理模型，用热力学理论和统计物理方法讨论热力学系统，全面讨论热力学第一定律、热力学第二定律的物理实质及简单应用；其次讨论以经典电磁波理论为基础的波动光学的基本概念和光源发光的特点，全面讨论光的干涉、衍射、偏振等现象；最后以狭义相对论的基本假设及洛伦兹坐标变换为基础，建立狭义相对论的新时空观及物体在高速运动下的力学规律；以波粒二象性的实验事实为基础，建立起描写微观世界物体运动及其规律的量子力学的基本概念，并应用于一维无限深势阱中的粒子及氢原子光谱等，进一步讨论微观世界中物质呈现的量子特性。希望读者通过本教材的阅读学习能对物理思维模式有所了解，对物理学中处理问题的方式、方法有所认识，更希望能对物理世界的探索引起积极的兴趣并从中能得到收获。

本书内容的逻辑展开、难易程度、例题习题等经过了几十年的教学实践，希望本书的出版能对稳定和提高大学物理课程的教学质量做出一些积极的贡献。

参加本书编写的有宋小龙、葛永华、庄良、许士跃、赵苏串、钟平卫、陈爱明、石庆平、沈利明、黄颂翔、孙乃疆等。由于编者水平有限，书中不妥和出错之处在所难免，欢迎读者批评指正。

在本书的编写过程中，我们参考、借鉴了同行们的相关教程，在此一并表示衷心感谢！我们也特别感谢高等教育出版社给予的大力支持！

编　者

2015 年 4 月

目录

第一章　质点运动学

宇宙中一切物质都处于永恒的运动中．什么是物质？大到天体星系，小到微观粒子都是物质．固体、液体、等离子体，这些实物是物质，电场、磁场、引力场，这些场也是物质．运动是物质的存在形式，也是物质的固有属性．物质的运动存在于人们意识之外，这个事实称为运动本身的绝对性．

物质的运动形式是多种多样的，其中机械运动是最简单、最基本的运动．所谓机械运动就是描写物体的位置随时间的变化关系，力学就是研究物体的机械运动及其应用的学科．现在，以牛顿定律为基础的力学理论称为经典力学．它曾经被尊为完美普遍的理论兴盛约三百年．在20世纪初，虽然它的局限性被发现，在高速领域为相对论所取代，在微观领域为量子力学所取代．但是，在一般技术领域中，包括机械制造、基本建设、天文甚至在航空、航天技术中，经典力学仍然保持着充沛的活力而起着基础理论的作用．同时，经典力学在一定意义上是整个物理学的基础．这就是我们要学习经典力学的一个根本原因．

在本章中我们着重阐明三个问题．第一，如何描述物体的运动状态．在运动学中，物体的运动状态是用位矢和速度描述的，而物体的速度变化则用加速度描述．通过位矢、速度、加速度等概念的建立，加深对运动的相对性、瞬时性和矢量性等基本性质的认识．第二，运动学的核心是运动方程，通过对运动方程的学习，既要掌握如何从运动方程出发，求出质点在任意时刻的位矢、速度和加速度的方法，又要能够在已知加速度（或速度）与时间的关系以及初始条件的情况下，求出任意时刻质点的速度和位矢的方法．总之，掌握使用微积分方法来分析问题．第三，对运动的研究离不开时间和空间．了解经典力学时空观的局限性．

1-1　参考系　坐标系

一、参考系　坐标系

由于运动本身的绝对性，即绝对静止的物质是不存在的．所以要描述一个物体的运动，必须选择其他物体或其他几个相互之间保持静止的物体作为参考．被选作参考用的物体或物体系称为**参考系**．

对于同一个物体的运动，相对于不同的参考系会有不同的描述结果，例如，一个相对地面的自由下落的物体．在地面参考系中观察它作直线运动，但在它近旁驰过的车厢内观察，即以车厢为参考系，则它将作曲线运动．物体的运动形式随参考系的不同而不同．这个事实称为**描述运动的相对性**．由于描述运动具有相对性，当我们描述一个物体运动时，就必须明确是相对于哪个参考系而言的．

确定了参考系之后为了定量描述物体在各个时刻相对于参考系的位置，还需要在参考系上固定一坐标系以及安置在坐标系各处的计时器（时钟）．计时器用于记录各个时刻，坐标系用

来记录运动物体在各个时刻的位置，常用的坐标系有直角坐标系，极坐标系和自然坐标系.

二、时间和空间

人们关于时间和空间的概念的形成，首先起源于对自己周围物质世界和物质运动的直觉. 时间所反映的是一个事件的顺序性和持续性. 空间反映了物质的广延性，它的概念是和物体的体积以及物体位置变化相联系的. 总之，时间是一切不同时刻的概括和抽象. 空间是一切不同位置的概括和抽象.

物理学中的时间是指测量到的时间. 例如，一个物体从空间的 A 点移到 B 点，这是一个简单的物理过程. 对于这个过程，无论是在相对物体静止的参考系，还是在相对物体运动的参考系上，或是在随物体一起运动的参考系上测量，所测到的物体移动过程所持续的时间都是相同的. 即时间与观察者的相对运动无关，与事件或过程发生的空间位置或距离无关. 可简述为时间是绝对的.

物理学中的空间是通过物体的存在而表现出来的. 例如，空间的某处有一个六面体，我们可以通过它的边长和面、角来确定它所占据的空间. 按照经典理论，无论把六面体放在何处，无论它作何种取向，也无论它相对于观察者做何运动，所测到的六面体的边长和面、角都是一样的. 即空间是绝对的，与时间无关. 以上“时间是绝对的”、“空间是绝对的”就构成了经典理论中的绝对时空观.

1-2 质点的位置矢量 位移 速度和加速度

一、理想模型——质点

任何实际物体都有一定的大小、形状、质量和内部结构，即使是微观粒子也不例外. 一般地说，物体在运动过程中，其内部各部分的位置变化和速度变化是各不相同的，而且物体的大小形状也可能发生变化. 所以要精确地描述实际物体的一般运动并非易事. 因此，需要对所研究的物体的大小、形状作合理的近似和抽象.

如果物体的大小、形状在所研究的问题中不起作用或所起的作用可以忽略，那么把物体近似作为一个只有质量而没有形状大小的点是合理的，这样的点称为**质点**.

质点是在满足上述条件下抽象出来的一个理想化模型. 研究质点的运动，其实质是研究物体质量中心的运动.

一个物体能否作为质点来处理，并不取决于它的大小、形状，应根据所研究的问题的性质而定. 同一物体在某一问题中可以作为质点处理，而在另一问题中就不一定. 例如，研究地球绕太阳公转的轨迹时，由于地球的平均半径仅约为公转轨道平均半径的万分之一，所以地球上各点相对于太阳运动的区别以及地球的大小、形状，在所研究的问题中不起主要作用，因此可以忽略. 此时，把地球作为质点来处理是恰当的. 又如，研究刚性物体的平动规律时，虽然物体的大小、形状和所研究的空间范围比较不可忽略，但是由于物体内的各点在运动中的状态完全相同，物体中的任一点都能代表整体运动，因此也可作为质点处理.

二、位置矢量，运动方程和轨迹方程

在坐标系中，质点 P 在任意时刻所处的位置常用**位置矢量**（简称**位矢**）来表示. 位矢是从坐标系的原点指向质点 P 所在处的一个矢量，用 $\boldsymbol{r}$ 表示，如图 1-1 所示. 它说明了质点 P 相对于参考系固定点 O 的方位和距离. 当质点运动时，它的位置是按一定规律随着时刻 t 变化的，也就是说位矢是时刻 t 的函数.

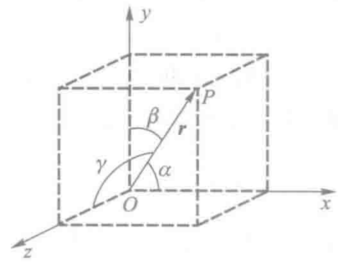


图 1-1　位置矢量

即

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t) \tag{1-1}$$

上式称为质点运动的轨道参量方程，即质点的运动方程. 它不仅给出了质点的运动轨迹，也给出了质点在任意时刻所处的位置.

设某一时刻 t，质点 P 所处位置的坐标（x，y，z）引入沿 x，y，z 三轴正方向的单位矢量 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 以后，根据运动叠加原理可以表示为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k} \tag{1-2}$$

消去运动分量方程 $x=x(t)$，$y=y(t)$，$z=z(t)$ 各分量式中的时间参量 t 以后，所得到的方程

$$f(x,\ y,\ z)=0 \tag{1-3}$$

称为质点的轨迹方程，它给出了质点的运动轨迹.

位矢 $\boldsymbol{r}$ 的大小可表示为

$$r=|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

位矢 $\boldsymbol{r}$ 的方向可用它的方向余弦来表示

$$\cos\alpha=\frac{x}{r},\quad \cos\beta=\frac{y}{r},\quad \cos\gamma=\frac{z}{r}$$

它们满足

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

三、位移矢量，速度，加速度

1. 位移矢量（简称位移）

位移是质点的位矢在时间 $t\to t+\Delta t$ 内的变化量，即增量：

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t) \tag{1-4}$$

在直角坐标系中：

$$\Delta\boldsymbol{r}=\Delta x\boldsymbol{i}+\Delta y\boldsymbol{j}+\Delta z\boldsymbol{k} \tag{1-5}$$

位移的大小：

$$|\Delta\boldsymbol{r}|=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}$$

方向余弦：

$$\cos\alpha=\frac{\Delta x}{\Delta r},\quad \cos\beta=\frac{\Delta y}{\Delta r},\quad \cos\gamma=\frac{\Delta z}{\Delta r}$$

必须注意，位移表示质点的位置改变，它不是质点所经历的路程，在图 1-2 中，位移是有向线段 $\overrightarrow{AB}$，是一个矢量. 它的大小 $|\Delta\boldsymbol{r}|$ 就是割线 AB 的长度，而路程是标量就是曲线 $\overset{\frown}{AB}$ 的实际长度 Δs. 只有当 Δt 趋近于零时，Δs 与 $|\Delta\boldsymbol{r}|$ 才可看作相等. 其次位移矢量的大小为

$$|\Delta \boldsymbol{r}| = \sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}$$

不同于 $\Delta|\boldsymbol{r}| = |\boldsymbol{r}_2| - |\boldsymbol{r}_1| = \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2} - \sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$，在国际单位制（SI）中位矢和位移的单位是 m（米）.

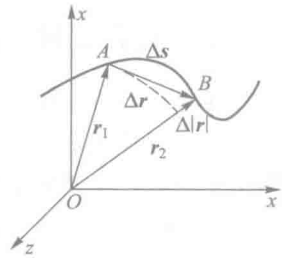


图 1-2 位移矢量

2. 速度

位移 $\Delta \boldsymbol{r}$ 和发生这段位移所经历的时间 Δt 的比值称为质点在这段时间内的**平均速度**：

$$\bar{\boldsymbol{v}} = \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} \tag{1-6}$$

在直角坐标系可表示为

$$\bar{\boldsymbol{v}} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\boldsymbol{i}+\frac{\Delta y}{\Delta t}\boldsymbol{j}+\frac{\Delta z}{\Delta t}\boldsymbol{k} = \bar{v}_x\boldsymbol{i}+\bar{v}_y\boldsymbol{j}+\bar{v}_z\boldsymbol{k}$$

平均速度的大小

$$\bar{v} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2}$$

平均速度的方向就是位移 $\Delta \boldsymbol{r}$ 的方向. 平均速度的大小和方向在很大程度上依赖于所取的时间间隔 Δt. 如图 1-3 所示，设 t 时刻质点处于 A，经历 $\Delta t'$ 时间质点到达 B'，位移为 $\Delta \boldsymbol{r}'$，在这段时间内质点的平均速度 $\overline{\boldsymbol{v}'} = \frac{\Delta \boldsymbol{r}'}{\Delta t'}$，如果经过 $\Delta t''$ 时间，质点从 A 到达 B''，位移为 $\Delta \boldsymbol{r}''$，那么在这段时间内质点的平均速度 $\overline{\boldsymbol{v}''} = \frac{\Delta \boldsymbol{r}''}{\Delta t''}$. 显然，这两个平均速度的大小方向都不相同. 我们把质点所经过的路程 Δs 和所需要的时间 Δt 的比值即

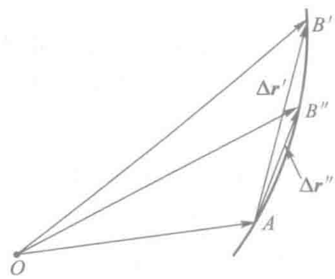


图 1-3 位移与时间间隔有关

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \tag{1-7}$$

称为质点在 $t \to t+\Delta t$ 时间内的**平均速率**. 平均速率是标量. 它等于质点在单位时间内所通过的路程，而不考虑运动方向.

当所取的时间间隔 Δt 趋近于零时，平均速度的极限称为质点在该时刻 t 的**瞬时速度**（简称**速度**）：

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \tag{1-8}$$

在直角坐标系中：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v} &= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}\\ &= v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

瞬时速度的方向是平均速度方向的极限，沿着轨迹的切向，指向质点前进的一侧. 在一般曲线运动中瞬时速度和平均速度的大小、方向都不相同.

瞬时速度的大小

$$|\boldsymbol{v}|=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}$$
$$=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2}$$

我们把 Δt 趋近零时平均速率的极限定义为质点运动的**瞬时速率**（简称速率）：

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \tag{1-9}$$

因为当 Δt 趋近于零时，路程 Δs 的极限等于位移矢量模的极限，所以

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|=|\boldsymbol{v}| \tag{1-10}$$

在国际单位制中，速度、速率的单位都是 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$（米每秒）.

3. 加速度

当质点的运动速度随时间变化时，速度的变化情况用加速度来描述.

如图 1-4 所示，设质点 t 时刻位于 A 时速度是 $\boldsymbol{v}_A$，在 $t+\Delta t$ 时刻位于 B 点时速度是 $\boldsymbol{v}_B$. 在 Δt 时间内质点的速度增量为 $\Delta\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_B-\boldsymbol{v}_A$，则质点的**平均加速度**定义为

$$\overline{\boldsymbol{a}}=\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t} \tag{1-11}$$

它的方向就是 $\Delta\boldsymbol{v}$ 的方向. 它表示质点在 Δt 时间内速度的平均变化率.

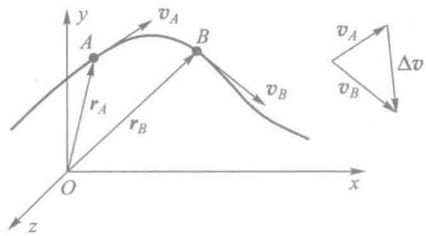


图 1-4 平均加速度

为了精确描述质点在任一时刻（或任一位置处）的速度变化率，必须引入瞬时加速度的概念.

瞬时加速度（简称**加速度**）定义为

$$\boldsymbol{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} \tag{1-12}$$

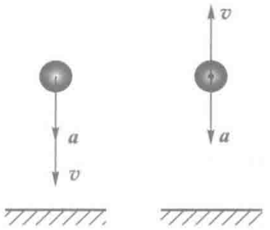
在直角坐标系中，加速度的三个分量分别为

$$a_x=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2},\quad a_y=\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2},\quad a_z=\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}$$

所以加速度的大小为

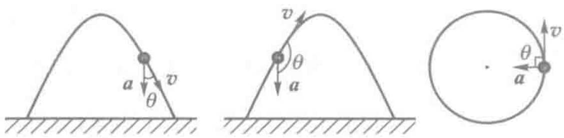
$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$$

加速度 $\boldsymbol{a}$ 的方向是速度增量 $\Delta\boldsymbol{v}$ 的极限方向. 必须指出，$\Delta\boldsymbol{v}$ 的方向和它的极限方向一般不同于 $\boldsymbol{v}$ 的方向，因此加速度的方向一般与该时刻的速度方向不一致. 例如，质点作直线运动时，如果速率是增加的，如图 1-5(a) 所示，那么，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 同方向. 反之，如果速率是减小的，如图 1-5(b) 所示，那么 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 反方向. 因此在直线运动中加速度和速度虽然在同一直线中，也有同向和反向的两种情况. 当质点作曲线运动时，加速度的方向总是指向曲线的凹侧. 如果速率增加，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 成锐角，则如图 1-6(a) 所示. 如果速率减小，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 成钝角，则如图 1-6(b) 所示. 如果速率不变，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 成直角则如图 1-6(c) 所示. 总之，曲线运动中一定存在加速度.



(a) (b)

图 1-5 直线运动中的速度和加速度



(a) (b) (c)

图 1-6 曲线运动中的速度和加速度

例 1-1 一质点的运动方程为 $\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{i}+4t^2\boldsymbol{j}+t\boldsymbol{k}$ (m)

试求：(1) 它的速度与加速度；(2) 它的轨迹方程.

解 (1) 由速度定义

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{i}+4t^2\boldsymbol{j}+t\boldsymbol{k})}{\mathrm{d}t}=8t\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}\ (\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1})$$

即 $v_x=0$，$v_y=8t\ (\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1})$，$v_z=1\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$

速度大小 $$|\boldsymbol{v}|=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}=\sqrt{(8t)^2+1}\ (\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1})$$

方向为 $$\tan\theta=\frac{v_z}{v_y}=\frac{1}{8t}$$

由加速度定义 $$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(8t\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})}{\mathrm{d}t}=8\boldsymbol{j}\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$$

即 $a=a_y=8\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^2$，方向沿 y 轴正方向

(2) 由运动方程 $\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{i}+4t^2\boldsymbol{j}+t\boldsymbol{k}$ (m)

可知： $$x(t)=1,\ y(t)=4t^2,\ z(t)=t$$

消去 t 得轨迹方程 $$x=1\ \mathrm{m},\ y=4z^2$$

例 1-2 一气球以 v_0 匀速从地面上升，由于风的影响，随着高度上升的气球的水平速度 $v=by$ 增大，其中 b 为正常量，y 是从地面算起的高度，x 轴取水平向右为正，试求：

(1) 气球的运动方程；

(2) 气球的水平飘移距离和高度的关系（轨迹）.

解 (1) 取坐标如图 1-7 所示，令 $t=0$ 时气球位于坐标原点，由题意：

$$v_x=by,\ v_y=v_0$$

即

$$y=v_0t \tag{1}$$

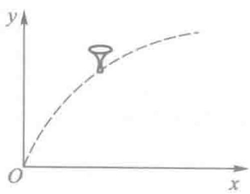


图 1-7 例题 1-2

由定义 $v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=by=bv_0t$

分离变量，两边积分，有

$$\int_0^x \mathrm{d}x=\int_0^t bv_0t\mathrm{d}t$$

解得

$$x=\frac{bv_0t^2}{2} \tag{2}$$

气球的运动方程

$$\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}=\frac{bv_0t^2}{2}\boldsymbol{i}+v_0t\boldsymbol{j} \tag{3}$$

（2）从（1）式和（2）式中消去 t 得气球轨迹方程

$$x=\frac{b}{2v_0}y^2$$

1-3 直线和圆周运动

一、直线运动

当质点作直线运动时，我们将该直线设为 Ox 轴，这时质点的位置 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}$、位移 $\Delta\boldsymbol{r}=\Delta x\boldsymbol{i}$、速度 $\boldsymbol{v}=v\boldsymbol{i}$、加速度矢量 $\boldsymbol{a}=a\boldsymbol{i}$ 都在同一直线上. 我们将这些矢量简化为代数形式，用它们在 x 轴上的分量 x、Δx、v、a 来表示. 设在时刻 t_1，质点位置为 x_1，在时刻 t_2 质点运动到位置 x_2，在时间 $\Delta t=t_2-t_1$ 内，质点的位移为 $\Delta x=x_2-x_1$，这段时间内质点的平均速度为

$$\bar{v}=\frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{1-13}$$

当 $\Delta x>0$ 时，$x_2>x_1$，质点向 x 轴正方向运动；当 $\Delta x<0$ 时，$x_2<x_1$，质点向 x 轴负方向运动. 当 $\Delta t\to 0$ 时，质点的速度为

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \tag{1-14}$$

可以注意到直线运动中速度 v 的符号代表了质点的运动方向. 当质点朝 x 轴正向运动时，$v>0$；当质点朝 x 轴负向运动时，$v<0$. 加速度的方向也用符号表示. 当速度、加速度符号相同，即同方向时，质点的速率增加；当速度、加速度符号相反时，速度和加速度方向相反，速率减少.

1. 直线运动的图示法

图 1-8 显示的是某一质点位置 x 随时间 t 变化的曲线图. 由于速度 $v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，$x-t$ 曲线上各点的切线的斜率就是速度. 质点改变运动方向的位置对应 $v=0$ 的位置.

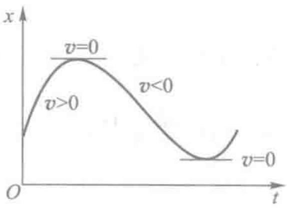


图 1-8 直线运动 $x-t$ 图

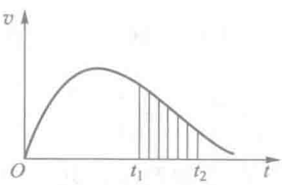


图 1-9 直线运动 $v-t$ 图

图 1-9 显示的是速度与时间的关系. $v-t$ 曲线上各点的斜率代表的是加速度. $v-t$ 曲线下的面积代表的是质点在 t_1 至 t_2 时间间隔内发生的位移：$\Delta x=x_2-x_1=\int_{x_1}^{x_2}\mathrm{d}x=\int_{t_1}^{t_2}v\mathrm{d}t$. 值得注意的是此面积可正、可负. 当质点沿 x 轴正向运动时，位移为正，曲线下的面积也是正的. 但如果质

点是沿 x 轴负方向运动的话，速度 $v<0$，这时曲线下的面积为负值.

在直线运动过程中，如果质点的运动方向改变的话，位移大小 $|\Delta x|$ 不等于路程. 如果质点运动方向始终保持不变，那么位移大小 $|\Delta x|$ 将等于路程.

2. 特殊的直线运动（设运动方向在 x 轴上）

有两类直线运动是大家熟悉的，即匀速直线运动和匀加速直线运动.

在匀速直线运动中，质点速度的大小和方向都始终不变，位移：$\Delta x = v\Delta t$.

在匀加速直线运动中，加速度保持不变. 设 $t=0$ 时，质点的初始位置为 x_0、初始速度为 v_0，由 $a=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$，得 $\int_{v_0}^{v}\mathrm{d}v=\int_0^t a\mathrm{d}t$，$v-v_0=at$，即 $v=v_0+at$.

同理，由 $v=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，$\int_{x_0}^{x}\mathrm{d}x=\int_0^t v\mathrm{d}t=\int_0^t(v_0+at)\mathrm{d}t$，得位移

$$\Delta x = x-x_0 = v_0t+\frac{1}{2}at^2$$

这里 x_0、v_0、v、a 等都为代数值，也就是说速度 v 和加速度 a 不一定是同方向的. 从上式还可推出

$$v^2-v_0^2=2a\Delta x$$

二、圆周运动

1. 圆周运动的加速度

对一般圆周运动来说，加速度并不一定指向圆心. 我们首先从匀速率圆周运动的加速度着手，然后推广到一般圆周运动. 设一质点作匀速率圆周运动，经 Δt 时间从 A 运动到 B.

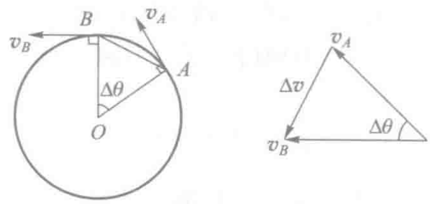


图 1-10　匀速圆周运动的速度

如图 1-10 所示，质点的速率不变：$|\boldsymbol{v}_A|=|\boldsymbol{v}_B|=v$，速度方向变化带来速度的增量 $\Delta\boldsymbol{v}$. 速度矢量 $\boldsymbol{v}_A$、$\boldsymbol{v}_B$ 和 $\Delta\boldsymbol{v}$ 构成一个等腰三角形，$\boldsymbol{v}_A$ 和 $\boldsymbol{v}_B$ 分别与半径 OA 和 OB 垂直. $\boldsymbol{v}_A$ 和 $\boldsymbol{v}_B$ 之间的夹角等于半径 OA 和 OB 之间的夹角 $\Delta\theta$. 因此 $\boldsymbol{v}_A$、$\boldsymbol{v}_B$ 和 $\Delta\boldsymbol{v}$ 组成的三角形与三角形 $\triangle OAB$ 相似，则它们的对应边的比例相等：$\dfrac{\Delta v}{v}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{OA}}=\dfrac{\overline{AB}}{R}$. 按平均加速度定义：$\overline{\boldsymbol{a}}=\dfrac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}$，当 $\Delta t\to 0$ 时，$\Delta\theta\to 0$，加速度方向即速度增量 $\Delta\boldsymbol{v}$ 极限方向与速度垂直并指向圆心.

加速度大小为 $a=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{v}{R}\dfrac{\overline{AB}}{\Delta t}$，而 $\overline{AB}$ 将趋近圆弧长 $\mathrm{d}s$，$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\overline{AB}}{\Delta t}=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=v$，由于这个加速度是指向圆心的，称为**向心加速度**，其大小为

$$a=\frac{v^2}{R} \tag{1-15}$$

在变速率圆周运动中，质点从 A 运动到 B，质点的速率是要变化的. 设在 B 点，质点的速率是变大的，如图 1-11 所示. 这时我们注意到速度增量是可分成两部分的：$\Delta\boldsymbol{v}=\Delta\boldsymbol{v}_n+\Delta\boldsymbol{v}_t$. 其中 $\Delta\boldsymbol{v}_n$ 就是匀速圆周运动中因速度方向变化引起的速度增量，在 $\Delta t\to 0$ 时，它是指向圆心

的. $\Delta \boldsymbol{v}_t$ 则是速度大小变化引起的，方向与该点的速度在同一直线上，也就是说沿该点的切线方向. 不难看出，当质点的速率变大时，$\Delta \boldsymbol{v}_t$ 与该点的速度方向一致；当质点速率变小时，$\Delta \boldsymbol{v}_t$ 与该点的速度方向相反. 平均加速度为 $\overline{\boldsymbol{a}}=\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}=\frac{\Delta \boldsymbol{v}_n}{\Delta t}+\frac{\Delta \boldsymbol{v}_t}{\Delta t}$，在 $\Delta t\to 0$ 时，平均加速度将趋近于瞬时加速度：$\boldsymbol{a}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{v}_n}{\Delta t}+\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{v}_t}{\Delta t}$. 令 $\boldsymbol{a}_n=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{v}_n}{\Delta t}$ 和 $\boldsymbol{a}_t=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{v}_t}{\Delta t}$，加速度写为

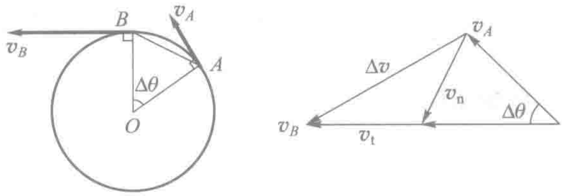


图 1-11 变速圆周运动的速度

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_n+\boldsymbol{a}_t \tag{1-16}$$

$\boldsymbol{a}_n$ 称为**法向加速度**，是由速度方向变化引起的加速度，方向指向圆心，其值为

$$a_n=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v_n}{\Delta t}=\frac{v^2}{R} \tag{1-17}$$

$\boldsymbol{a}_t$ 称为**切向加速度**，它是因速率变化引起的，方向沿该点的切线方向，其值为

$$a_t=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v_t}{\Delta t}=\frac{dv}{dt} \tag{1-18}$$

切向加速度代表速率 v 随时间的变化率. $a_t>0$ 时，$\boldsymbol{a}_t$ 与速度方向一致，表示速率在增加；$a_t<0$ 时，$\boldsymbol{a}_t$ 与速度方向相反，表示速率在减少.

2. 圆周运动的角量表示法

质点作圆周运动时与圆心的距离始终不变，因此我们可以用角量来描述质点的位置. 设质点绕圆心 O 作半径为 R 的圆周运动. 如图 1-12 所示，t 时刻质点位于 A 点，位置矢量与 Ox 轴正方向的夹角为 θ，称为角位置：$\theta=\theta(t)$.

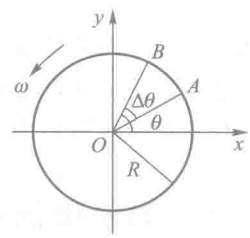


图 1-12 圆周运动的角量表示

上式也可称为运动方程，代表质点位置与时间的变化关系. 经 Δt 时间，质点由 A 运动到 B 点，角位置的变化 $\Delta\theta$ 称为**角位移**. 角位置和角位移的单位都为弧度（rad）. 角位置变化的快慢用角速度表示：

$$\omega=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}=\frac{d\theta}{dt} \tag{1-19}$$

在国际单位制中，角速度的单位为 $rad\cdot s^{-1}$，方向一般都是以逆时针方向为正. 角速度变化的快慢用角加速度表示：

$$\alpha=\frac{d\omega}{dt}=\frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{1-20}$$

从图中可看出，质点由 A 点运动到 B 点所经过的路程 Δs 与角位移 $\Delta\theta$ 的关系为 $\Delta s=R\Delta\theta$. 质点的速率与角速度的数值关系为

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{ds}{dt}=R\frac{d\theta}{dt}=R\omega \tag{1-21}$$

质点的切向加速度为

$$a_t=\frac{dv}{dt}=R\frac{d\omega}{dt}=R\alpha \tag{1-22}$$

法向加速度为

$$a_n=\frac{v^2}{R}=R\omega^2 \tag{1-23}$$

当质点匀角速转动时，角速度 ω 为常量. 角位移 $\Delta\theta=\omega\Delta t$，速率 $v=R\omega$ 不变. 质点沿圆周运动一周所需的时间，即运动的周期为

$$T=\frac{2\pi R}{v}=\frac{2\pi}{\omega}$$

当质点作匀角加速转动时，角加速度 α 为常量. 设 $t=0$ 时，质点的初始角位置为 θ_0、初始角速度为 ω_0，由 $\alpha=\frac{d\omega}{dt}$，积分：$\int_{\omega_0}^{\omega}d\omega=\int_0^t\alpha dt$，得

$$\omega=\omega_0+\alpha t$$

又由 $\omega=\frac{d\theta}{dt}$，积分得

$$\int_{\theta_0}^{\theta}d\theta=\int_0^t\omega dt=\int_0^t(\omega_0+\alpha t)dt$$

角位移为

$$\Delta\theta=\theta-\theta_0=\omega_0 t+\frac{1}{2}\alpha t^2$$

从圆周运动的角量描述可以注意到，质点匀角加速转动的表达式与匀加速直线运动相似. 另外角速度、角加速度等都为代数值. 当角速度与角加速度符号相同时，质点将加速转动. 当角速度与角加速度符号相反时，质点将减速.

1-4 自然坐标系中的切向加速度、法向加速度

在一般曲线运动中，质点的速度大小和方向都在改变着，即存在加速度. 为了使加速度的概念更加清晰，通常引入切向加速度和法向加速度的概念. 沿着质点的运动轨迹所建立的坐标系称为**自然坐标系**. 取轨迹上任一点 A 为坐标系原点 O，其中一根轴沿轨迹的切向，该方向上单位矢量用 $\boldsymbol{e}_t$ 表示. 另一根轴沿轨迹的法向并指向曲线凹侧，相应的单位矢量用 $\boldsymbol{e}_n$ 表示，如图 1-8 所示. 显然沿轨迹的各点坐标轴的方位是在不断地变化着的. 因为质点运动速度总是沿着轨迹的切向的，所以在自然坐标系中

$$\boldsymbol{v}=v\boldsymbol{e}_t \tag{1-24}$$

根据加速度的定义

$$\boldsymbol{a}=\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\frac{dv}{dt}\boldsymbol{e}_t+v\frac{d\boldsymbol{e}_t}{dt}$$

上式中第一项 $\frac{dv}{dt}\boldsymbol{e}_t$ 显然表示由于速度大小变化所引起的加速度分量，大小等于速率对时间 t 的

变化率，方向沿着轨迹的切向，所以称为**切向加速度**，用 a_t 表示，即 $a_t=\dfrac{dv}{dt}$.

在图 1-13 中表示质点在 t 时刻处于轨迹上的 A 点，设此处的切向单位矢量为 $\boldsymbol{e}_t$，经过 Δt 时间到达 B 点，B 点处切向单位矢量为 $\boldsymbol{e}_t'=\boldsymbol{e}_t+\Delta\boldsymbol{e}_t$. 将切向单位矢量 $\boldsymbol{e}_t$ 和 $\boldsymbol{e}_t'=\boldsymbol{e}_t+\Delta\boldsymbol{e}_t$ 平移到 O' 点. 两矢端分别为 A' 和 B'. 由 A' 点指向 B' 点的有向线段 $\overrightarrow{A'B'}$ 就是单位矢量增量 $\Delta\boldsymbol{e}_t$. 当 Δt 趋向零时，B 点趋近于 A 点，与此相应的等腰三角形 $O'A'B'$ 的顶角 $\Delta\theta$ 趋近零. 所以 $\Delta\boldsymbol{e}_t$ 的极限方向必定垂直于 $\boldsymbol{e}_t$ 指向轨迹的凹侧，即和法向单位矢量 $\boldsymbol{e}_n$ 一致. 并且有

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\boldsymbol{e}_t|}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

即：$\dfrac{de_t}{dt}=\dfrac{d\theta}{dt}$

那么，

$$\frac{d\boldsymbol{e}_t}{dt}=\frac{d\theta}{dt}\boldsymbol{e}_n \tag{1-25}$$

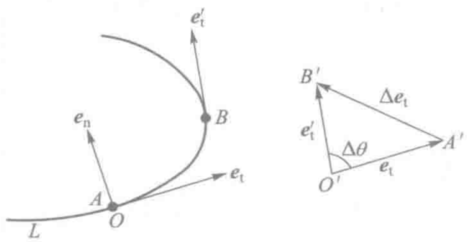


图 1-13 自然坐标系

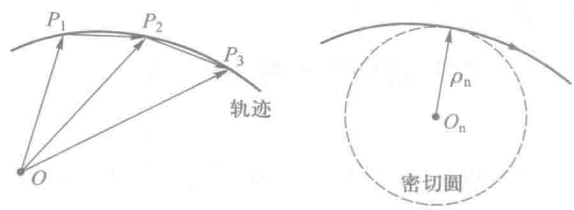


图 1-14 曲率半径

经过三点可唯一地确定一个圆，由无限邻近的三点确定的圆必与实际轨迹相切，称为轨迹在该点处的**密切圆**，如图 1-14 所示. 密切圆的半径 ρ 称为曲率半径. 实际路径上每一段微弧都可看作密切圆上一段微弧. 质点在任一段微路径上运动都可看作在密切圆上做圆周运动，即，可以用圆周运动来描述各种平面上的曲线运动. 这样

$$\frac{d\boldsymbol{e}_t}{dt}=\frac{d\theta}{dt}\boldsymbol{e}_n=\frac{\rho d\theta}{\rho dt}\boldsymbol{e}_n=\frac{ds}{\rho dt}\boldsymbol{e}_n=\frac{v}{\rho}\boldsymbol{e}_n$$

式中 ds 为质点在 dt 时间内经过的微弧长，将上式代入（1-13）式

$$\boldsymbol{a}=\frac{dv}{dt}\boldsymbol{e}_t+\frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{e}_n \tag{1-26}$$

由此可见，曲线运动中的加速度可分解为相互正交的切向分量和法向分量. 这个法向分量称为**法向加速度**，用 a_n 表示，$a_n=\dfrac{v^2}{\rho}$ 描述了质点速度方向变化快慢. 切向加速度 $a_t=\dfrac{dv}{dt}$ 表示质点速率变化的快慢. 总的加速度 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_n+\boldsymbol{a}_t$，大小为

$$a=\sqrt{a_n^2+a_t^2}=\sqrt{\left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2+\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}$$

方向可用它和 $\boldsymbol{e}_n$ 之间的夹角表示