- 本章小结
- 释疑解难
- 典型例题分析
- 课后习题精解
- 模拟检测题
- 模拟检测题答案与提示

新三导丛书

XIN SAN DAO CONG SHU

高等数学（上）

（同济·第六版）

导教·导学·导考

主编　吕成军

西北工业大学出版社

三导丛书

高等数学

（同济·第六版）

导教·导学·导考

（上册）

主　编　吕成军

副主编　商妮娜　刘同波

编　者　吕成军　徐　峰　周爱华　王效义
冯青华　王玉田　孙文华　商妮娜
毕玉昌　耿红玲　刘同波

西北工业大学出版社

【内容简介】 本书是按照高等学校工科数学课程教学指导委员会颁布的教学大纲"高等数学教学基本要求"编写的,内容结构主要参考了同济大学数学系编的《高等数学》(第六版)的章节顺序,共十二章,每章分为本章小结、释疑解难、典型例题分析、课后习题精解、模拟检测题、模拟检测题答案与提示六个部分. 本书可与《高等数学》(第六版)配套使用,也可独立使用.

本书可作为高等数学课程教学、学习和应试的辅导书,也可供考研人员及相关工程技术人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学导教·导学·导考/吕成军主编.—西安:西北工业大学出版社,2008.8
(新三导丛书)
ISBN 978-7-5612-2144-0

Ⅰ.高… Ⅱ.吕… Ⅲ.高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第119832号

出版发行:西北工业大学出版社
通信地址:西安市友谊西路127号 **邮编**:710072
电　　话:(029)88493844　88491757
网　　址:www.nwpup.com
印 刷 者:陕西宝石兰印务有限责任公司
开　　本:787 mm×960 mm 1/16
印　　张:42.75
字　　数:1 142千字
版　　次:2008年8月第1版　2008年8月第1次印刷
定　　价:全书定价:56.00元(本册定价:30.00元)

前 言

高等数学是理工科院校的一门重要基础课．为了帮助读者在数学概念、计算技能和数学思维等方面得到充分的训练，培养学生的空间想象能力、逻辑思维能力和科学表达能力，我们根据多年的教学经验，在对教学大纲和课程内容进行深入研究和理解的基础上编写了本书，希望能为学习高等数学课程的读者提供辅导和帮助．

本书的内容结构主要参考了同济大学数学系编的《高等数学》(第六版)的章节顺序，共十二章，每章分为六个部分：

(1)**本章小结** 对每章的内容做了小结，理顺了各知识点之间的关系，并指出了重点和难点．

(2)**释疑解难** 从释疑解难入手，分析概念，诠释难点．

(3)**典型例题分析** 通过典型例题(所选例题大多为历年考研真题)介绍解题方法，注重分析和一题多解，使读者在巩固基本概念的基础上掌握高等数学解题方法和技巧．

(4)**课后习题精解** 对同济大学数学系所编的《高等数学》(第六版)的课后习题做了详细解答，以方便学习时参考．

(5)**模拟检测题** 精心设计基础知识模拟检测题和考研模拟训练题，力求通过练与考使读者掌握考点．

(6)**模拟检测题答案与提示** 对模拟题进行了解答．

本书分上、下两册，精心设计了基础知识期末考试模拟题各一份，并提供了试题的参考答案，还附有 2008 年考研数学一试题及答案与解析供读者参考．

本书是理工科院校本科生学习高等数学课程的同步辅导书，也可作为研究生入学考试的复习资料，同时可供本专业教师及相关工程技术人员参考．

限于编者水平所限，书中难免有不妥之处，恳请读者批评指正．

编 者

2008 年 6 月

目　录

第 1 章　函数与极限 …… 1

一、本章小结 …… 1
二、释疑解难 …… 8
三、典型例题分析 …… 11
四、课后习题精解 …… 23
五、模拟检测题 …… 53
六、模拟检测题答案与提示 …… 57

第 2 章　导数与微分 …… 60

一、本章小结 …… 60
二、释疑解难 …… 62
三、典型例题分析 …… 66
四、课后习题精解 …… 74
五、模拟检测题 …… 100
六、模拟检测题答案与提示 …… 102

第 3 章　中值定理与导数的应用 …… 104

一、本章小结 …… 104
二、释疑解难 …… 108
三、典型例题分析 …… 110
四、课后习题精解 …… 128
五、模拟检测题 …… 161
六、模拟检测题答案与提示 …… 163

第 4 章　不定积分 …… 168

一、本章小结 …… 168
二、释疑解难 …… 169
三、典型例题分析 …… 171
四、课后习题精解 …… 184

五、模拟检测题 …… 205
六、模拟检测题答案与提示 …… 208

第 5 章 定积分 …… 212

一、本章小结 …… 212
二、释疑解难 …… 215
三、典型例题分析 …… 219
四、课后习题精解 …… 229
五、模拟检测题 …… 255
六、模拟检测题答案与提示 …… 257

第 6 章 定积分的应用 …… 259

一、本章小结 …… 259
二、释疑解难 …… 261
三、典型例题分析 …… 263
四、课后习题精解 …… 273
五、模拟检测题 …… 289
六、模拟检测题答案与提示 …… 292

第 7 章 微分方程 …… 294

一、本章小结 …… 294
二、释疑解难 …… 297
三、典型例题分析 …… 301
四、课后习题精解 …… 314
五、模拟检测题 …… 354
六、模拟检测题答案与提示 …… 356

附录一 期末考试模拟试题及参考答案 …… 359

参考文献 …… 363

第 1 章　函数与极限

一、本章小结

(一) 本章小结

1. 映射的概念

设 X,Y 是两个非空集合，如果存在一个法则 f，使得对 X 中的每个元素 x，按法则 f，在 Y 中有唯一确定的元素 y 与之对应，则称 f 为从 X 到 Y 的映射，记作 $f:X\to Y$. 其中 y 称为元素 x（在映射 f 下）的像，记作 $f(x)$，即 $y=f(x)$；集合 X 称为映射 f 的定义域，记作 D_f，即 $D_f=X$；X 中的所有元素的像组成的集合称为映射 f 的值域，记作 R_f 或 $f(X)$，即 $R_f=f(X)=\{f(x)\mid x\in X\}$.

注　① 构成一个映射必须具备三个要素：集合 X，即定义域 $D_f=X$；集合 Y，即值域 $R_f\subset Y$；对应法则 f，使对每个 $x\in X$，有唯一确定的 $y=f(x)$ 与之对应.

② 对每个 $x\in X$，元素 x 的像 y 是唯一的；而对每个 $y\in R_f$，y 的原像不一定唯一；映射 f 的值域 R_f 是 Y 的子集，即 $R_f\subset Y$.

2. 函数的概念

设数集 $D\subset R$，则称映射 $f:D\to R$ 为定义在 D 上的函数，记作 $y=f(x)$，$x\in D$. 称 D 为该函数的定义域，x 为自变量，y 为因变量或函数.

注　① 确定函数的两个要素：定义域和对应法则.

② 两个函数相同的条件：定义域相同，且对应法则相同.

3. 函数的特性

(1) 有界性：设函数 $f(x)$ 在 I 上有定义（I 可以是 $f(x)$ 的整个定义域，也可以是定义域的一部分），如果存在正数 M，使得 $x\in I$ 时，$|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 I 上有界；如果这样的 M 不存在，则称函数 $f(x)$ 在 I 上无界.

注　① 正数 M 不是唯一的，但也不是任意的.

② 由于正数 M 不唯一，因此定义中的 $|f(x)|\leqslant M$ 也可以换成 $|f(x)|<M$.

③ 函数 $f(x)$ 是否有界与所讨论的区间有关. 例如，$f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上有界，但在 $(0,+\infty)$ 内无界.

(2) 单调性：设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$，如果对于 I 内的任何两点 x_1,x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$（或 $f(x_1)>f(x_2)$），则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内是单调增加（或减少）的函数. 这时区间 I 称

为单调区间.

单调增加和单调减少的函数统称为单调函数.

注　单调性与区间有关.例如,$y=x^2$ 在 $(-\infty,0]$ 上是单调减少,在 $[0,+\infty)$ 上是单调增加,因而在 $(-\infty,0]$ 或 $[0,+\infty)$ 上是单调的,但在 $(-\infty,+\infty)$ 上不是单调的.

(3) 奇偶性:设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称(即若 $x\in D$,必有 $-x\in D$),如果对于任一 $x\in D$,都有 $f(-x)=f(x)$(或 $f(-x)=-f(x)$),则称 $f(x)$ 为偶(或奇)函数.

注　① 偶函数的图形关于 y 轴对称,奇函数的图形关于原点对称.

② $f(x)=0$ 既是奇函数又是偶函数的函数,而且是唯一的.

(4) 周期性:设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,如果存在一个不为零的数 T,对于任一 $x\in D$,有 $(x\pm T)\in D$,且 $f(x+T)=f(x)$ 恒成立,则称 $f(x)$ 为周期函数,T 称为 $f(x)$ 的周期.

注　① 若 T 是 $f(x)$ 的周期,则 kT(k 为整数)也是 $f(x)$ 的周期,通常周期函数的周期是指最小正周期.

② 不是任何周期函数都有最小正周期.例如,$f(x)=c$(c 为常数)是周期函数,但没有最小正周期.

③ 若 $f(x)$ 是周期为 T 的函数,则在定义域内每一个长度为 T 的区间上,函数图形有相同的形状.

4. 反函数

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D,值域为 W,如果对于 W 中的每一个 y 值,在 D 上必有确定的 x 值(这样的 x 值可能不止一个)与之对应,使 $f(x)=y$,这时 x 也是 y 的函数,称为 $y=f(x)$ 的反函数,记作 $x=\varphi(y)$,或 $x=f^{-1}(y)$.

注　① 通常以 x 表示自变量,y 表示因变量,反函数 $x=\varphi(y)$ 或 $x=f^{-1}(y)$ 记为 $y=\varphi(x)$ 或 $y=f^{-1}(x)$.

② 把函数 $y=f(x)$ 和它的反函数 $y=\varphi(x)$ 画在同一坐标平面上,这两个图形关于直线 $y=x$ 对称.

③ 若 $y=f(x)$ 是单值单调增加(或减少)的,则它的反函数 $y=\varphi(x)$ 也是单值单调增加(或减少)的.

5. 复合函数

如果 y 是 u 的函数,$y=f(u)$,而 u 又是 x 的函数,$u=\varphi(x)$,且 $\varphi(x)$ 的值域全部或部分在 $f(u)$ 的定义域内,那么 y 为 x 的函数,记作 $y=f[\varphi(x)]$. 这个函数称为由 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数,u 称为中间变量.

注　函数的复合是有条件的,不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数,只有 $u=\varphi(x)$ 值域与 $y=f(x)$ 定义域的交非空时,它们才能复合.

6. 基本初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数及反三角函数统称为基本初等函数.

注　一定要掌握基本初等函数的定义域、值域、图形和它们所具有的函数特性.

7. 初等函数

由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合而得到的,并且可用一个式子表示的函数称

为初等函数.

8. 双曲函数

(1) 双曲正弦函数　　$\mathrm{sh}x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

(2) 双曲余弦函数　　$\mathrm{ch}x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

(3) 双曲正切函数　　$\mathrm{th}x = \dfrac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

9. 取整函数

设 x 为任一实数，不超过 x 的最大整数称为 x 的取整函数，记作 $y = [x]$.

10. 极限的概念

(1) 数列极限的定义：如果数列 $\{x_n\}$ 与常数 a 有下列关系：对于任意给定的 $\varepsilon > 0$（不论它多么小），总存在正整数 N，使得对于 $n > N$ 的一切 x_n，不等式 $|x_n - a| < \varepsilon$ 成立，则称常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限，或称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，记作 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 或 $x_n \to a (n \to \infty)$. 如果数列没有极限则称数列是发散的.

注　① ε 是任意给定的正数，ε 的作用是刻画变量 x_n 与常数 a 的接近程度. ε 是任意给定的，一旦给定就相对固定了，即在寻找正整数 N 的过程中不变.

② N 是正整数，N 的作用是刻画了从 N 以后所有的项 x_n 都满足 $|x_n - a| < \varepsilon$. N 依赖于 ε，但不唯一.

③ 数列 $\{x_n\}$ 的极限为 a 的几何解释：对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，数列 $\{x_n\}$ 落在 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 之外的点至多是有限个（即 N 个）（见图 1.1）. 由此推知收敛数列必有界.

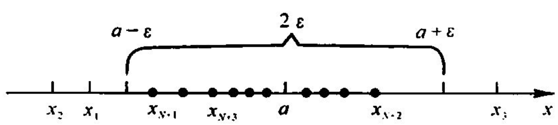

图　1.1

(2) $x \to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限的定义：设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义（点 x_0 可除外），如果任给 $\varepsilon > 0$（不论多么小），存在 $\delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，$|f(x) - A| < \varepsilon$，则常数 A 称为函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限. 记作 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ 或 $f(x) \to A (x \to x_0)$.

注　① ε 是任意给定的正数，ε 的作用是刻画 $f(x)$ 与常数 A 的接近程度. ε 是任意给定的，一旦给定就相对固定下来了，即在寻找 δ 的过程中不变.

② δ 是正数，它用来刻画 x 与 x_0 的接近程度，δ 与 ε 和 x_0 有关，当 x_0 给定后，δ 依赖于 ε. δ 不唯一.

③ 当 $x \to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限存在与否，与点 x_0 邻域的函数值变化趋势有关，与 $f(x)$ 在点 x_0 是否有定义无关. 若有定义，与 $f(x_0)$ 的值是什么也无关. 这就是在定义中为什么不把 $0 < |x - x_0| < \delta$ 写成 $|x - x_0| < \delta$ 的原因.

④ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ 的几何解释：任给 $\varepsilon > 0$，作平行于 x 轴的两条直线 $y = A + \varepsilon$，$y = A - \varepsilon$，介于这两条直线之间是一横条区域，依定义，对于给定的 x_0，存在点 x_0 的一个 δ 邻域 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$，当 $y = f(x)$ 的图形

上点的横坐标 x 在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 内取值时，这些点的纵坐标 $f(x)$ 满足 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 或 $A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$，亦即这些点落在上面所作的横条区域内(见图 1.2).

⑤ 由极限定义以及左右极限的定义可知，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充要条件是 $f(x_0-0)=f(x_0+0)=A$.

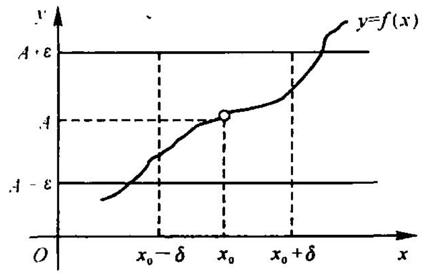

图 1.2

(3) $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限的定义：设函数 $f(x)$ 对绝对值无论多大的 x 都有定义，如果任给 $\varepsilon>0$，存在 $X>0$，当 $|x|>X$ 时，$|f(x)-A|<\varepsilon$，则常数 A 称为函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限，记作 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to\infty)$.

如果 $x>0$ 且无限增大(记作 $x\to+\infty$)，只把上面定义中的 $|x|>X$ 改为 $x>X$，可得 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 的定义；同样，$x<0$ 且 $|x|$ 无限增大(记作 $x\to-\infty$)，只把上面定义中 $|x|>X$ 改为 $x<-X$，便得 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$ 的定义.

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}f(x)=A$$

11. 极限的性质

(1) 极限的唯一性：若数列或函数的极限存在，则极限值一定唯一.

(2) 收敛数列的有界性：若数列 $\{x_n\}$ 收敛，则数列 $\{x_n\}$ 一定有界. 反之，结论不真.

(3) 函数极限的局部保号性：如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，且 $A>0$(或 $A<0$)，则存在点 x_0 某一去心邻域 $\mathring{U}(x_0)$，当 $x\in\mathring{U}(x_0)$ 时，有 $f(x)>0$(或 $f(x)<0$). 特别地，当 $A\neq0$ 时，则存在点 x_0 某一去心邻域 $\mathring{U}(x_0)$，当 $x\in\mathring{U}(x_0)$ 时，有 $|f(x)|>\dfrac{|A|}{2}$.

(4) 保不等式性：如果在点 x_0 的某一去心邻域内，$f(x)\geqslant0$(或 $f(x)\leqslant0$)，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，那么 $A\geqslant0$(或 $A\leqslant0$).

12. 无穷大与无穷小

(1) 无穷小的定义：设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内有定义(或 $|x|$ 大于某一正数时有定义)，若任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$(或 $X>0$)，当 $0<|x-x_0|<\delta$(或 $|x|>X$) 时，$|f(x)|<\varepsilon$，那么称函数 $f(x)$ 为 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$) 时的无穷小，记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$(或 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$).

(2) 无穷大的定义：如果任给 $M>0$(M 无论多大)，存在 $\delta>0$(或 $X>0$)，当 $0<|x-x_0|<\delta$(或 $|x|>X$) 时，$|f(x)|>M$，那么称函数 $f(x)$ 为 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$) 时的无穷大，记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$(或 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$).

注　① 不要把无穷小与很小的数混为一谈．无穷小是在自变量某一变化过程中以零为极限的量．除"0"外任何一个绝对值很小很小的数都不能作为无穷小，仅"0"是唯一的无穷小常数．

② 无穷小（或无穷大）是对自变量的某一变化过程而言的．说函数是无穷小（或无穷大）时一定要强调自变量的变化过程．

③ 若函数 $f(x)$ 是无穷大，则 $f(x)$ 必无界；反之，不一定成立．例如，函数 $f(x)=x\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内无界，但由于 $f(x)$ 的绝对值并不是无限增大的，故 $f(x)=x\cos x$ 当 $x\to\infty$ 时不是无穷大．

④ 无穷大与无穷小的关系：在自变量的同一变化过程中，若 $f(x)$ 为无穷大，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小；反之，若 $f(x)$ 为无穷小，且 $f(x)\neq 0$，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大．

⑤ 函数极限与无穷小的关系：$\lim f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$，其中 $\alpha(x)$ 为无穷小．

13. 无穷小的比较

(1) 设 α 及 β 是同一极限过程中的两个无穷小，且 $\alpha\neq 0$.

若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$，则称 β 是比 α 高阶的无穷小，记作 $\beta=o(\alpha)$.

若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\infty$，则称 β 是比 α 低阶的无穷小．

若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=c\neq 0$，则称 β 与 α 是同阶的无穷小．

若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=1$，则称 β 与 α 是等价无穷小，记作 $\alpha\sim\beta$.

若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha^k}=c\neq 0,\ k>0$，则称 β 是 α 的 k 阶无穷小．

(2) 等价无穷小的重要性质：若 $\alpha\sim\alpha',\ \beta\sim\beta'$，且 $\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$ 存在，则 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$.

(3) 常用的一些等价无穷小：当 $x\to 0$ 时，有

$$\sin x\sim x,\quad \tan x\sim x,\quad \arcsin x\sim x,\quad \arctan x\sim x$$

$$\ln(1+x)\sim x,\quad e^x-1\sim x,\quad 1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,\quad \sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\sim x$$

$$\sqrt{1+x}-1\sim\frac{1}{2}x,\quad \sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{x}{n},\quad a^x-1\sim x\ln a\ (a>1,\ a\neq 1)$$

14. 极限的运算法则

(1) 有限个无穷小的和是无穷小．

(2) 有界函数与无穷小的积是无穷小．

(3) 有限个无穷小的积是无穷小．

(4) 若 $\lim f(x)=A,\ \lim g(x)=B$，则

① $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$

② $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=AB$

③ $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}(B\neq 0)$

注 ① 运算法则对数列同样成立.

② 由运算法则(4)中的①,②可推广到有限个函数的情形.

③ 由运算法则(4)中的②可推知:

$$\lim cf(x) = c\lim f(x) \quad (c\text{ 为常数})$$

$$\lim[f(x)]^n = [\lim f(x)]^n \quad (n\text{ 为正整数})$$

(5) 几个常用公式:

① $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & n=m\\ 0, & n>m\\ \infty, & n<m\end{cases}$

② 当 $a>0$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$

③ $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$

(6) 复合函数的极限运算法则:设 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$,且在 x_0 某去心邻域内 $\varphi(x)\neq a$,又 $\lim\limits_{u\to a}f(u)=A$,则 $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]$ 存在,且 $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=\lim\limits_{u\to a}f(u)=A$.

注 把上述法则中 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$ 换成 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)=\infty$,而把 $\lim\limits_{u\to a}f(u)=A$ 换成 $\lim\limits_{u\to\infty}f(u)=A$,则有 $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=\lim\limits_{u\to\infty}f(u)=A$ 或 $\lim\limits_{x\to\infty}f[\varphi(x)]=\lim\limits_{u\to\infty}f(u)=A$.

15. 极限存在准则

(1) 单调有界原理:单调有界数列必有极限.

(2) 夹逼准则:若 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$,且 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}g(x)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}h(x)=A$,则 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=A$. 特别地,若 $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$,且 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

16. 两个重要极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ (或 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$)

17. 连续函数的概念

(1) 函数在一点连续的定义:

① 定义 1:设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义,若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$,则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

② 定义 2:若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0(\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0))$,则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

③ 定义 3:若任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,当 $|x-x_0|<\delta$ 时,$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$,则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续. 特别地,若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$,则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 左连续. 若 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$,则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 右连续.

$f(x)$ 在点 x_0 连续的充要条件:$f(x)$ 在点 x_0 既左连续又右连续.

(2) 函数的间断点的定义：设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义(点 x_0 可以除外)，若函数具有下列三种情形之一：① 在 $x=x_0$ 没有定义；② 虽在 $x=x_0$ 有定义，但 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在；③ 虽在 $x=x_0$ 有定义，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 不连续，点 x_0 称为 $f(x)$ 的间断点．

(3) 间断点的分类：设 x_0 是 $f(x)$ 的间断点，且 $f(x_0-0)$ 及 $f(x_0+0)$ 都存在，则称 x_0 为 $f(x)$ 的第一类间断点．特别地，若 $f(x_0-0)=f(x_0+0)$，则称 x_0 为可去间断点．若 $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$，则称 x_0 为跳跃间断点、不属于第一类间断点的就称为第二类间断点．

18. 连续函数的运算

(1) 若 $f(x)$ 及 $g(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续，则 $f(x)\pm g(x)$，$f(x)g(x)$，$\dfrac{f(x)}{g(x)}(g(x_0)\neq 0)$，$|f(x)|$ 在 $x=x_0$ 处也连续．

(2) 反函数的连续性：若 $y=f(x)$ 在某区间上单调且连续，则其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 在相应区间上也单调且连续．

(3) 复合函数的连续性：若 $y=f(u)$ 在点 u_0 连续，$u=\varphi(x)$ 在点 x_0 连续，且 $u_0=\varphi(x_0)$，则复合函数 $f[\varphi(x)]$ 在点 x_0 连续，且有

$$\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=f[\lim_{x\to x_0}\varphi(x)]=f[\varphi(x_0)]=f(u_0)$$

或
$$\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=\lim_{u\to u_0}f(u)=f(u_0)$$

注　此式表示在上述条件下，求复合函数 $f[\varphi(x)]$ 的极限时，函数符号“f”与极限符号“lim”可以交换次序．

19. 初等函数的连续性

基本初等函数在其定义域内连续；初等函数在其定义区间上连续．

20. 闭区间上连续函数的性质

(1) 最值定理：闭区间上的连续函数一定有最大值和最小值．

(2) 介值定理：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，c 是介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任何一个值($f(a)\neq f(b)$)，则存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=c$.

(3) 零点定理：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号，即 $f(a)f(b)<0$，则在 (a,b) 内至少有一点 ξ，使 $f(\xi)=0$.

(二) 基本要求

(1) 理解函数的概念，会求函数的定义域、表达式及函数值，会求分段函数的定义域、函数值，并会作出简单分段函数的图形．

(2) 理解和掌握函数的单调性、奇偶性、有界性和周期性，会判断所给函数具有的特性．

(3) 了解函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 之间的关系(定义域，值域，图形)，会求单调函数的反函数.

(4) 理解和掌握函数的四则运算与复合运算，熟练掌握复合函数的复合过程．

(5) 掌握基本初等函数的简单性质及其图形．

(6) 了解初等函数的概念．

(7) 会建立简单实际问题的函数关系式.

(8) 理解极限的概念(对极根的 $\varepsilon-N$, $\varepsilon-\delta$, $\varepsilon-X$ 定义可在学习过程中逐步加深理解. 对于给出 ε,求 N, δ 或 X 没有过高要求),能根据极限的概念分析函数的变化趋势,会求函数在一点处的左极限与右极限,了解函数在一点处极限存在的充要条件.

(9) 了解极限的性质,掌握极限的四则运算法则.

(10) 理解无穷小与无穷大的概念,掌握无穷小的性质,无穷小与无穷大的关系,会进行无穷小阶的比较(高阶,低阶,同阶和等价),掌握利用等价无穷小代换求极限.

(11) 了解两个极限存在准则(夹逼准则和单调有界准则),熟练掌握用两个重要极限求极限的方法.

(12) 理解函数在一点连续与间断的概念,掌握判断函数(包括分段函数) 在一点的连续性,理解函数在一点的连续性与极限存在关系.

(13) 会求函数的间断点,并会确定间断点的类型.

(14) 理解初等函数在其定义区间上的连续性,并会利用连续性求极限.

(15) 掌握闭区间上连续函数的性质(最值定理,零点定理, 介值定理),会运用这些性质推证一些简单命题.

(三) 重点与难点

重点:函数的概念,基本初等函数和初等函数的概念,复合函数的概念; 数列极限和函数极限的概念,极限运算法则和极限存在准则,两个重要极限;无穷小阶的比较及等价无穷小在求极限中的应用;连续函数的概念和初等函数的连续性,间断点的概念和间断点类型的判断,闭区间上连续函数的性质.

难点:复合函数,极限概念,极限存在的准则,连续函数的概念,闭区间上连续函数性质的应用.

二、释疑解难

问题 1.1 函数 $y=\ln\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}\right)$ 与 $y=2\ln\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$ 是相同的函数吗?

答 不同. 原因是它们的定义域不同. $y=\ln\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}\right)$ 的定义域为 $D_1=\{x \mid x\neq 0,\ x\in\mathbf{R}\}$, $y=2\ln\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$ 的定义域为 $D_2=\{x \mid x>0,\ x\in\mathbf{R}\}$.

判断两个函数是否相同,应考虑它们的定义域及对应法则是否相同,这是函数定义的两个要素.

问题 1.2 $y=2\ln x$ 及 $x=2\ln y$ 是相同的函数吗?

答 相同. 虽然 $y=2\ln x$ 及 $x=2\ln y$ 在同一直角坐标系 xOy 中确实表示两条不同的曲线,但不同的曲线并不一定表示不同的函数. 曲线作为函数的几何表示,是要涉及坐标系的,而函数概念本身并不指定要与什么坐标相联系. 判断两个函数是否相同的标准,只是函数定义的两个要素,而与变量用什么字母表示无关,与坐标系的选取方式也无关.

因为函数 $y=2\ln x$ 与 $x=2\ln y$,其自变量有相同的定义域,因变量与自变量有相同的对应法则,所以它们是相同的函数.

由此可知,$y=e^x$ 的反函数既可以用 $x=\ln y$ 表示,也可以用 $y=\ln x$ 表示.

显然下列解答是错误的．因为从 $x=2\ln y$ 中可解出等价的关系式 $y=e^{\frac{x}{2}}$，显然 $y=2\ln x$ 与 $y=e^{\frac{x}{2}}$ 是两个不同的函数，所以 $y=2\ln x$ 与 $x=2\ln y$ 是不同的函数．

问题 1.3　如何求复合函数的定义域？并求函数 $y=\arcsin\left[\lg\dfrac{x-1}{x-10}\right]$ 的定义域．

答　考虑复合函数定义域时应由最外层的复合关系算起，逐层向内推算，最后确定自变量 x 的取值范围．若先由里层的复合关系算起，必然会顾此失彼．

函数 y 是一个复合函数，其复合关系为 $y=\arcsin u$，$u=\lg v$，$v=\dfrac{x-1}{x-10}$.

由于 $y=\arcsin u$ 的定义域为 $-1\leqslant u\leqslant 1$，从而推知 $-1\leqslant \lg v\leqslant 1$，即有 $0.1\leqslant v\leqslant 10$，最后归结为解不等式 $0.1\leqslant\dfrac{x-1}{x-10}\leqslant 10$，故所求定义域为 $\{x\mid x\geqslant 11\}\cup\{x\mid x\leqslant 0\}$.

问题 1.4　数列极限的定义是否可叙述为“对任意给定的 $\varepsilon\in(0,1)$，总存在正整数 N，当 $n>N$ 时，恒有 $|x_n-a|\leqslant 2\varepsilon$”？

答　本题涉及数列极限的实质问题．由数列极限定义可知，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 的充分必要条件是，对任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在正整数 N，当 $n>N$ 时，恒有 $|x_n-a|<\varepsilon$ 成立．这里 $\varepsilon>0$ 是任意给定的要多小就有多小的正数，用以描述 x_n 与 a 之间的距离随着 n 的增大越来越小，在极限定义中，只要求 $\varepsilon>0$ 且充分小即可，因此，可限定 $0<\varepsilon<1$. 其次，由于 $|x_n-a|\leqslant 2\varepsilon$ 中 2ε 仍可充分小，它同样描述了 x_n 与 a 之间的距离随着 n 的增大要多小就有多小这一事实，因此，题中的叙述也可看做是数列 $\{x_n\}$ 以 a 为极限的定义，即为充分必要条件．

问题 1.5　函数极限与数列极限有什么联系？

答　如果对于任何以 x_0 为极限的数列 $x_n(x_n\neq x_0)$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$，那么 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$. 反之，如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，那么对任何以 x_0 为极限的数列 $x_n(x_n\neq x_0)$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$.

由此命题可知，如果 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}x_n'=x_0$，并且 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)\neq\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n')$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在．例如，$f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$，取 $x_n=\dfrac{2}{(4n+1)\pi}$，$x_n'=\dfrac{2}{(4n-1)\pi}$，且 $n=1,2,\cdots$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}x_n'=0$，但是 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n')=-1$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)\neq\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n')$，所以，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在．此命题是判断极限不存在的一个有效工具．

问题 1.6　讨论函数的极限时，在什么情况下要考虑左、右极限？

答　一般地说，讨论函数 $f(x)$ 在点 x_0 的极限时，应先看一看左、右两侧极限的情况，如果当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 在点 x_0 的两侧变化一致，即 $f(x)$ 在点 x_0 的两侧的表达式一样，则不必分开研究；如果左、右两侧的变化趋势可能有差别，即 $f(x)$ 在点 x_0 的两侧的表达式不一样，就应分开研究．尤其求分段函数在分段点处的极限时，须研究左、右极限；有些函数在特殊点的左、右极限不一样，在求极限时应加以注意．如 $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$，$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$；$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\tan x=+\infty$，$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\tan x=-\infty$；$\lim\limits_{x\to 0^-}\arctan\dfrac{1}{x}=-\dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to 0^+}\arctan\dfrac{1}{x}=\dfrac{\pi}{2}$；$\lim\limits_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{x}}=0$，$\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$.

问题 1.7　指出下列各题解法中的错误，并写出正确解法：

(1) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x}{x-3}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 3}x}{\lim\limits_{x\to 3}(x-3)}=\infty$；

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x^3-x+1)=\lim\limits_{x\to\infty}2x^3-\lim\limits_{x\to\infty}x+1=\infty-\infty+1$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1^2}{n^3}+\dfrac{2^2}{n^3}+\cdots+\dfrac{n^2}{n^3}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2}{n^3}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^2}{n^3}+\cdots+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n^3}=0+0+\cdots+0=0$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{(-1)^n}{n+1}\sin n!\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+1}\lim\limits_{n\to\infty}\sin n!=0$.

答 (1) 错用了商的极限运算法则．因为分母的极限为零，所以不能用商的极限运算法则．正确解法是利用无穷小与无穷大的关系来求．

因为
$$\lim_{x\to3}\frac{x-3}{x}=\frac{\lim\limits_{x\to3}(x-3)}{\lim\limits_{x\to3}x}=\frac{0}{3}=0$$

所以
$$\lim_{x\to3}\frac{x}{x-3}=\infty$$

(2) 错用了函数代数和的极限运算法则．因为$\lim\limits_{x\to\infty}2x^3=\infty$，$\lim\limits_{x\to\infty}x=\infty$都属于极限不存在情形，所以不能用代数和的极限运算法则．"∞"只是一个记号，不能进行四则运算．正确的解法应该利用无穷小与无穷大的关系来求．

因为
$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x^3-x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x^3}}{2-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^3}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right)}=\frac{0}{2}=0$$

所以
$$\lim_{x\to\infty}(2x^3-x+1)=\infty$$

(3) 错用了和的极限运算法则．因为式中的项数随 n 的无限增大而无限增多，不是有限项，所以不能用上述法则．正确解法是先化为有限项代数和或有限项乘积形式再求极限．

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^2}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\cdots+\frac{n^2}{n^3}\right)=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1^2+2^2+\cdots+n^n}{n^3}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{n^3}=$$
$$\frac{1}{6}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{6}\times1\times2=\frac{1}{3}$$

(4) 错用了极限的乘法法则．因为$\lim\limits_{n\to\infty}\sin n!$不存在，所以不能用乘法法则．正确解法是根据无穷小与有界函数的乘积是无穷小的定理来求．

因为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+1}=0$，$|\sin n!|\leqslant1$，即 $\sin n!$有界，所以
$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n+1}\cdot\sin n!\right]=0$$

问题 1.8 "凡分段函数都不是初等函数"对吗？

答 不对．初等函数是指由常数及基本初等函数经过有限次四则运算及有限次复合所得到的，并能用一个式子表示的函数．分段函数不是用一个式子表示的函数，但不能说"凡分段函数都不是初等函数"．例如，$y=\begin{cases}x, & x\geqslant0\\-x, & x<0\end{cases}$是一个分段函数，但它也可用一个式子 $y=\sqrt{x^2}$ 来表示．事实上，$y=\sqrt{x^2}$ 是由 $y=\sqrt{u}$，$u=x^2$ 复合而成，因此，这个分段函数是初等函数．又如，$y=\begin{cases}x, & x\geqslant0\\1, & x<0\end{cases}$是一个分段函数，却不是初等函数．

问题 1.9 为什么说初等函数在其定义区间上都是连续的，而不说在其定义域上都连续呢？

答 定义区间与定义域是不同的，定义区间是包含在定义域内的区间，是一个区间；定义域不一定是区

间．基本初等函数在其定义域上连续，是因为基本初等函数的定义域都是区间，但初等函数在其定义域的某些点上不一定连续．例如，初等函数 $f(x)=\sqrt{\frac{x^2}{x+1}+4}$ 的定义域为 $x=-2$ 及 $(-1,+\infty)$．$(-1,+\infty)$ 是 $f(x)$ 的定义区间，$x=-2$ 是 $f(x)$ 定义域内的一个孤立点．因为 $f(x)$ 在 $x=-2$ 附近没有定义，所以 $f(x)$ 在 $x=-2$ 间断．故函数 $f(x)$ 在它的定义区间 $(-1,+\infty)$ 内连续，在其定义域 $x=-2$ 及 $(-1,+\infty)$ 内不连续．

问题 1.10 利用闭区间上连续函数的性质时应注意什么？

答 如果 $f(x)$ 是闭区间 $[a,b]$ 上连续的函数，则在这闭区间内一定有最大值和最小值，这就是最值定理．还有，如果 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号（即 $f(a)f(b)<0$），则在开区间 (a,b) 内一定有 $f(\xi)=0(a<\xi<b)$，即在 (a,b) 内一定有方程 $f(x)=0$ 的根，这就是零点定理．这两个定理中 $f(x)$ 在闭区间上连续的条件是很重要的，若把闭区间改为开区间结论不一定成立．例如，$y=\tan x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内连续，但是它在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内既无最大值也无最小值．又如 $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 在 $(-1,1)$ 内连续，它在 $(-1,1)$ 内无最大值．但是，1 是它的最小值．当然，在开区间内连续的函数也可能既有最大值，又有最小值．例如，$\sin x$ 在 $(-\pi,\pi)$ 内连续，它有最大值 1 与最小值 -1．又如函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, & 0<x\leqslant 1\\ -1, & x=0\end{cases}$ 在 $(0,1)$ 内连续，且 $f(0)=-1<0$，$f(1)=2>0$，但在 $(0,1)$ 内方程 $f(x)=0$ 没有根，即函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内无零点．再如 $f(x)=\begin{cases}x-\frac{1}{2}, & 0<x\leqslant 1\\ -1, & x=0\end{cases}$ 在 $(0,1)$ 内连续，且 $f(0)=-1<0$，$f(1)=\frac{1}{2}>0$，但是，在 $(0,1)$ 内，$x=\frac{1}{2}$ 是方程 $f(x)=0$ 的根．

三、典型例题分析

例 1.1 设 $f(x)=e^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$，且 $\varphi(x)\geqslant 0$，求 $\varphi(x)$ 及其定义域．

解 由 $f(x)=e^{x^2}$ 知，$f[\varphi(x)]=e^{\varphi^2(x)}=1-x$，又 $\varphi(x)\geqslant 0$，则 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$，由

$$\ln(1-x)\geqslant 0\Rightarrow 1-x\geqslant 1\Rightarrow x\leqslant 0$$

可知，$\varphi(x)$ 的定义域为 $x\leqslant 0$.

例 1.2 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$，则 $f[f(x)]=$ ________.

分析 因为 $|f(x)|\leqslant 1$，所以 $f[f(x)]=1$.

答案 1.

例 1.3 设 $g(x)=\begin{cases}2-x, & x\leqslant 0\\ x+2, & x>0\end{cases}$，$f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0\\ -x, & x\geqslant 0\end{cases}$，则 $g[f(x)]=$（　　）.

A. $\begin{cases}2+x^2, & x<0\\ 2-x, & x\geqslant 0\end{cases}$　　B. $\begin{cases}2+x^2, & x<0\\ 2-x, & x\geqslant 0\end{cases}$

C. $\begin{cases}2-x^2, & x<0\\ 2-x, & x\geqslant 0\end{cases}$　　D. $\begin{cases}2+x^2, & x<0\\ 2+x, & x\geqslant 0\end{cases}$