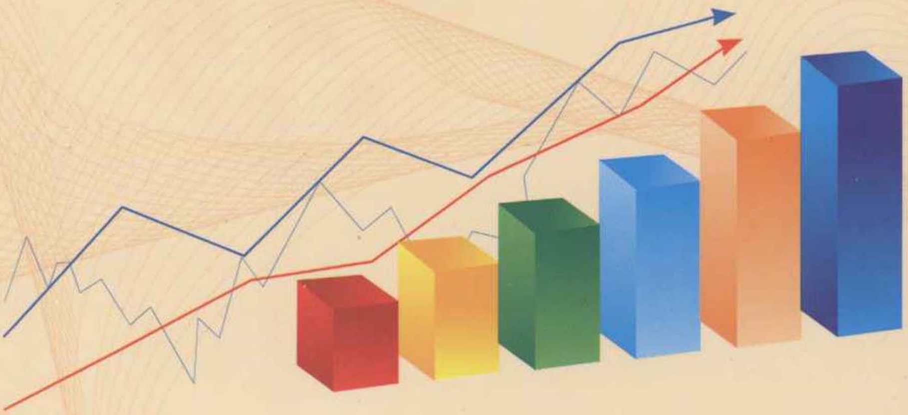
高等学校网络教育规划教材

经济数学基础（下）

JINGJISHUXUE JICHU

线性代数 概率统计

主编 陆 全 副主编 孙 浩



西北工业大学出版社

高等学校网络教育规划教材

经济数学基础（下）

线性代数　概率统计

主　编　陆　全

副主编　孙　浩

编　者　吕全义　孙　浩

西北工业大学出版社

【内容简介】 本书分上、下册。上册内容包括函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、多元函数微分学。下册内容包括行列式、矩阵、线性方程组、随机事件与概率、随机变量及其数字特征、统计推断、方差分析与回归分析。

本书既可作为高等学校网络教育的教材使用，也可供其他院校相关专业作为教材选用。

图书在版编目（CIP）数据

经济数学基础/陆全主编. —西安：西北工业大学出版社，2009.12

ISBN 978-7-5612-2707-7

Ⅰ.经… Ⅱ.陆… Ⅲ.经济数学—高等学校—教材 Ⅳ.F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 223987 号

出版发行： 西北工业大学出版社
通信地址： 西安市友谊西路 127 号 邮编 710072
电　　话： (029)88493844 88491757
网　　址： www.nwpup.com
印 刷 者： 陕西丰源印务有限公司
开　　本： 727 mm×960 mm 1/16
印　　张： 31.5
字　　数： 530 千字
版　　次： 2009 年 12 月第 1 版 2009 年 12 月第 1 次印刷
定　　价： 50.00 元(套)

前　　言

随着我国经济建设的不断发展，数学方法在经济领域中得到越来越广泛的应用，经济数学基础成为高等学校经济管理类专业重要的数学基础课程。本书是为适应社会发展对于高等经济与管理人才的要求及经管类教学改革的需要，按照教学大纲的基本要求，集编者多年教学经验并参考了大量国内外资料编写而成的。

本书主要面向接受网络教育的学生使用。与在校大学生相比，他们的学习条件更艰苦，学习时间更紧张，学习环境更困难，但他们追求真理的求知欲望和在校大学生是完全一样的。怎样使本书更能适应网络教育大学生的实际水平，方便他们的学习，基于这些思考，编者做了许多创造性的工作，使本书具有下述特点：①简明化。从节约学生学习时间考虑，教材力求简明扼要，注重对基本理论和主要观点的介绍，对一些人人皆知的知识性问题一般不做过多阐述，尽量避免冗言赘语。②条理化。注重经管类学生的特点，在保证数学概念的准确性和基本理论的系统性的基础上，对传统教学内容进行了必要的调整，尽可能从自然科学及经济分析的实例出发，借助几何直观引入数学概念，深入浅出，循序渐进；淡化运算技巧，并适当降低了部分内容的理论要求，如一元函数极限、线性方程组解的存在性、随机变量函数的分布等内容，力求使教材内容精练，条理清晰，表述流畅，易教易学，以必需、够用为度，以实用为原则。③实用化。注重对学生应用意识与能力的培养，特别是经济学方面应用能力的培养，选用了几何、物理、经济学等多方面的应用实例，有益于学生学以致用，也对提高学习兴趣，拓宽视野有帮助，体现以应用为目的。④兼顾多种需求。注重兼顾各层次学生的需要，强调对经济数学基本概念、基本方法的掌握，例题、习题的选择紧扣知识点，难易适度，题型多样。每节配有同步习题，按章配有特点鲜明的总习题，其中包含足量的是非题、选择题、填空题，便于教与学。⑤配有习题集。便于学生巩固知识点、复习、考试使用。

本书由西北工业大学网络教育学院组织策划，西北工业大学陆全教授任主编，孙浩副教授任副主编。各章分工为：第1～4章由陆全编写，第5,6章由

郑红婵编写,第 7 章由郭千桥编写,第 8～10 章由吕全义编写,第 11～14 章由孙浩编写,全书由陆全、孙浩统纂定稿。

由于编者水平所限,书中疏漏和不妥之处在所难免,恳请读者批评指正。

编　者

2009 年 8 月

目 录

(下册)

第一篇 线性代数

第二篇　概率统计

第一篇 线性代数

第8章 行 列 式

行列式是线性代数中的一个基本概念，其理论起源于解线性方程组的问题，它在自然科学的许多领域里都有广泛的应用.

一、教学内容

行列式：行列式的定义、性质与计算.

克拉默法则：线性方程组的概念，应用行列式求解线性方程组的方法.

二、重要概念、结论与公式

1. 行列式概念

(1) 2 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

(2) n 阶行列式 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}A_{1k}$.

2. 行列式性质

(1) 保值性质：

1) $D = D^{\mathrm{T}}$；

2) $D \xlongequal[(\text{或 } c_i + kc_j)]{r_i + kr_j} D_1$.

(2) 变号性质：$D \xlongequal[(\text{或 } c_i \leftrightarrow c_j)]{r_i \leftrightarrow r_j} -D_2$.

(3) 零值性质：

1) $D \xlongequal[(\text{或 } c_i = c_j)]{r_i = r_j} 0$；

2) $D \xlongequal[(\text{或 } c_i = kc_j)]{r_i = kr_j} 0$；

3) $D \xlongequal[(\text{或 } c_j = 0)]{r_i = 0} 0$.

(4) 公因子性质：行列式某行(或列)的公因子可提到行列式符号外.

$$kD = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & ka_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & ka_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(5) 拆和性质：若行列式 D 某行(或列)的各元素均为两项之和，则 D 可写成两个相应行列式之和.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j}+b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj}+b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

3. 克拉默法则

线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

当 $D \neq 0$ 时存在唯一解：

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D}$$

式中，D 为线性方程组的系数行列式，D_j 表示用常数列 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 替代系数行列式 D 中第 j 列元素而得的行列式.

8.1 行列式的定义

一、2 阶行列式

考虑二元一次方程组

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

的求解.采用消元法得

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12} \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21} \end{cases}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时,方程组(1) 有唯一解

$$\left.\begin{aligned} x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

为了便于记忆,此求解公式引入 2 阶行列式的概念.

定义 1 用 2^2 个数组成的符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

称为 2 阶行列式,其表示数 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

式中,$a_{ij}(i,j=1,2)$ 称为行列式第 i 行第 j 列的元素,横排称行,竖排称列.

在这个 2 阶行列式中有两条对角线,从左上角到右下角的对角线叫做主对角线,即连接图 1.1 中 a_{11} 与 a_{22} 的连线,从右上角到左下角的对角线叫做次对角线,即连接 a_{12} 与 a_{21} 的连线.

2 阶行列式的数值就是主对角线元素的乘积减次对角线元素的乘积,这种计算方法称为对角线法.可根据图 1.1 来记忆.

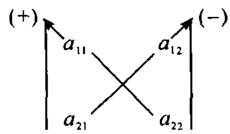


图 1.1

由定义 1,方程组(1) 的解可简记为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}$$

式中,$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$，$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$，$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$. 行列式 D 称为方程组的系数行列式.

例 1　计算下列 2 阶行列式:

(1)$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$　　(2)$\begin{vmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$

解　(1)$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=4-6=-2$

(2)$\begin{vmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

例 2　解二元一次方程组

$$\begin{cases} x_1-2x_2=1 \\ 2x_1+3x_2=2 \end{cases}$$

解　因为 $D=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=7\neq 0$

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=7,\quad D_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=0$$

所以 $x_1=\dfrac{D_1}{D}=1$，　$x_2=\dfrac{D_2}{D}=0$.

二、n 阶行列式

下面以 2 阶行列式为基础,定义 n 阶行列式.

1.3 阶行列式

定义 2　由 3^2 个数组成的符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

称为 3 阶行列式,它表示的数值为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

它的规律是:将行列式的第一行各元素乘以划掉该元素所在的行和列之

后剩下的 2 阶行列式，前面加上正、负相间的符号，然后再求它们的代数和. 如果把从行列式中划去第 i 行第 j 列 $(i,j=1,2,3)$ 后所剩下的 2 阶行列式记为 M_{ij}，那么有

$$M_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},\quad M_{13}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

故

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}M_{11}-a_{12}M_{12}+a_{13}M_{13}$$

若令 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，则

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$$

这里的 M_{ij} 称为元素 a_{ij} 的余子式，A_{ij} 称为元素 a_{ij} 的代数余子式.

类似地定义 4 阶行列式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}+$$

$$a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}-a_{14}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

如果同样用 M_{ij} 表示划去行列式的第 i 行第 j 列 $(i,j=1,2,3,4)$ 后所剩的 3 阶行列式，仍令 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，那么 4 阶行列式的定义可简写为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}+a_{14}A_{14}$$

这个定义是以 3 阶行列式的定义作为它的基础. 显然，有了 4 阶行列式的定义，就可以类似地定义 5 阶行列式，6 阶行列式，等等. 一般 n 阶行列式可用数学归纳法定义如下.

2. n 阶行列式

定义 3 2 阶行列式的定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

设 $n-1$ 阶行列式已经定义,则 n 阶行列式定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$$

其中,$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$,M_{ij} 表示划去行列式第 i 行第 j 列($i,j=1,2,\cdots,n$)所剩下的 $n-1$ 阶行列式.

M_{ij} 称为元素 a_{ij} 的余子式,A_{ij} 称为元素 a_{ij} 的代数余子式,n 阶行列式常用 D 或 D_n 表示,在不混淆的情况下,也可把 n 阶行列式简记做 $D=|a_{ij}|$ 或 $D_n=|a_{ij}|_n$,规定 1 阶行列式为 $|a_{11}|=a_{11}$.

例 3 计算 3 阶行列式:

$$(1)D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix} \qquad (2)D=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

解 $(1)D=1\times\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}=1$

$$(2)D=2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=-2+5=3$$

注 上面是利用行列式的第 1 行元素来定义行列式的,这个式子通常称为行列式按第 1 行元素的展开式. 可以证明,行列式按第 1 列元素展开也有相同的结果,即

$$D=|a_{ij}|=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\cdots+a_{n1}A_{n1}$$

还可以证明,行列式按任意一行(列)展开,都有相同的结果,其展开式为

$$D=|a_{ij}|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik} \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

$$D=|a_{ij}|=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj} \qquad (j=1,2,\cdots,n)$$

例 4 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

解　按第 2 列元素展开，则有

$$D=2\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2 & 1\\3 & 4\end{vmatrix}=-10$$

例 5　计算行列式

(1)$D=\begin{vmatrix}a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0\\a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$　　(2)$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\0 & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\\vdots & \vdots & & \vdots\\0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$

解　(1) 按第 1 行展开后，再按同一方法继续下去：

$$D=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & 0 & \cdots & 0\\a_{32} & a_{33} & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & & \vdots\\a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=\cdots=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

这个行列式称为下三角行列式，下三角行列式等于主对角线上元素的乘积.

(2) 按第 1 列展开后，再按同一方法继续下去：

$$D=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n}\\0 & a_{33} & \cdots & a_{3n}\\\vdots & \vdots & & \vdots\\0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=\cdots=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

可见，下(上)三角行列式的值就是主对角元素的乘积，计算非常简单，而一般情况，行列式的求解将非常烦琐. 为了化简行列式的计算，须研究行列式的性质.

习　题　8.1

1. 计算以下行列式：

(1) $\begin{vmatrix}1 & 2\\3 & 1\end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\2\sin\alpha & 2\cos\alpha\end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\2 & 2 & 0 & 0\\3 & 3 & 3 & 0\\4 & 4 & 4 & 4\end{vmatrix}$　　(4) $\begin{vmatrix}4 & 4 & 4 & 4\\0 & 3 & 3 & 3\\0 & 0 & 2 & 2\\0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$

(5) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ (6) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

2. 解下列方程:

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & x & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0$ (2) $\begin{vmatrix} x & x & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}=1$

3. 解下面线性方程组:

(1) $\begin{cases} 3x_1+2x_2=0 \\ 2x_1+x_2=1 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x_1-x_2=1 \\ 2x_1+2x_3=2 \end{cases}$

8.2 行列式的性质

若一个行列式中没有 0 元素(或 0 元素很少),那么按定义计算时,运算量很大.因而需要研究计算行列式的方法.为此,本节讨论行列式的性质,这些性质对行列式的计算及理论研究都有重要的作用.

设 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

定义 1 将行列式 D 的行变成同序号的列后得到的行列式称为 D 的转置行列式,记为 D^{T},即

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

下面引入行列式的性质.

1. 保值性质

(1) 行列式与其转置行列式相等,即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

此性质说明,行列式中行与列具有相同的地位,即凡对行成立的性质对列也成立,反之亦然.

(2) 将行列式 D 中某一行(列)各元素的 k 倍加到另一行(列)对应的元素上去,行列式的值不变,即有

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{r_i+kr_j} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

其中 r_i+kr_j 表示第 j 行各元素的 k 倍加到第 i 行上去(若是第 j 列的 k 倍加到第 i 列上去,则记做 c_i+kc_j).

例 1 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

解法 1 用上面的性质将 D 化为上三角行列式.

$$D \xlongequal[\substack{r_3+r_1 \\ r_4-4r_1}]{r_2-2r_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & -4 & -7 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -5 & -15 & 9 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2+r_3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 6 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -5 & -15 & 9 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4-5r_2]{r_3+3r_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -5 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & -21 \end{vmatrix} = 1\times(-1)\times(-5)\times(-21)=-105$$

解法 2 用上面性质将 D 的某行(列)化出 3 个 0 元,然后展开,继续这样,最后变成求解 2 阶行列式.

$$D \xlongequal[c_4-2c_2]{c_1+c_2} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 & -5 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{3\text{行展}} 1\times(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 7 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$