理工社®

所有的胜利
与征服自己的胜利比起来
都微不足道！

2017
升级版

考研数学

线性代数必修10课

主编 姜晓干

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

考研数学

线性代数必修 10 课

主　编　姜晓千

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目（CIP）数据

考研数学线性代数必修 10 课 / 姜晓千主编. —北京：北京理工大学出版社，2016.3

ISBN 978 – 7 – 5682 – 1932 – 7

Ⅰ. ①考… Ⅱ. ①姜… Ⅲ. ①线性代数—研究生—入学考试—自学参考资料 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 042723 号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 /（010）68914775（总编室）
（010）82562903（教材售后服务热线）
（010）68948351（其他图书服务热线）
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 北京泽宇印刷有限公司
开　　本 / 710 毫米 × 1000 毫米　1/16
印　　张 / 13
字　　数 / 350 千字
版　　次 / 2016 年 3 月第 1 版　2016 年 3 月第 1 次印刷
定　　价 / 25.80 元

责任编辑 / 陈莉华
文案编辑 / 陈莉华
责任校对 / 周瑞红
责任印制 / 边心超

本书前言

本书严格按照教育部考试中心《考研数学考试大纲》编写，对于数一、数二、数三的同学具有普适性.

本书是多位考研一线专家老师集体智慧的结晶，写作过程中充分结合了同学需求及授课效果. 为此本书共设十课，每课大致分为五部分：导语、考试大纲、知识体系、考试内容分析、典型例题分析.

(1)导语. 对本讲内容的主要概括以及本课在考试中的地位的说明.

(2)考试大纲. 让同学们清楚地知道考研数学到底“考什么”，知道哪些内容只需了解，哪些内容则要重点掌握，这样在复习备考过程中才能真正做到有的放矢.

(3)知识体系. 通过逻辑框架将本讲所有知识点完美呈现，简洁明了.

(4)考试内容分析. 对考研数学的每个考点都做了全面细致地讲解，同时每个考点都紧跟经典题目供同学们强化练习，正所谓“光说不练假把式，光练不说真把式，连说带练全把式”.

(5)典型例题分析. 本书经过改版，对体例和板块进行了很大调整，为大家提供了280道左右的线性代数经典好题，囊括了历年真题、大学数学竞赛试题、各大名校期末试题等，并在每一课的末尾处增加了部分习题供大家练习. 相信同学们若能把这部分题目做好吃透，那么考研数学线性代数得满分指日可待.

最后，祝福所有为了梦想而努力拼搏的考研学子们，祝大家梦圆考研！

姜晓千
2016年春于北京

目　　录

第1课　行列式

导　语

行列式是矩阵最基本的运算之一，有着广泛的应用. 考试中除了直接考查行列式的计算，往往结合行列式的应用. 例如，判定矩阵可逆、求矩阵的逆、判定线性相关性、判定线性方程组的解、计算特征值、判定二次型的正定等.

大纲要求

(1)了解行列式的概念，掌握行列式的性质.

(2)会用行列式的性质和行列式按行(列)展开定理计算行列式.

知识体系

- 行列式
  - 定义：所有不同行、不同列元素乘积的代数和($n!$ 项)
  - 性质
    - 行列互换，行列式的值不变
    - 两行互换，行列式变号
    - 一行乘 k 等于行列式乘 k
    - 拆行分配
    - 一行乘 k 加到另一行，行列式的值不变
    - 两行成比例，行列式为零
  - 计算★
    - 数字行列式
      - 利用重要行列式
      - 按行(列)展开定理
    - 抽象行列式(利用行列式的公式)
  - 应用★
    - 可逆的判定($\boldsymbol{A}$ 可逆$\Leftrightarrow|\boldsymbol{A}|\neq 0$)
    - 利用伴随矩阵求逆$\left(\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{\boldsymbol{A}^*}{|\boldsymbol{A}|}\right)$
    - 线性相关(无关)的判定(n 个 n 维向量)
    - 线性方程组解的判定(克拉默法则)
    - 特征值的计算
      - 利用特征方程($|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$)
      - 利用特征值的性质($|\boldsymbol{A}|=\prod\lambda_i$)
    - 二次型正定的判定(顺序主子式>0)

1.1　考试内容分析

1.1.1　行列式的定义

定义 1.1　在一个排列中，如果一个大的数排在小的数之前，就称这两个数逆序，一个排列的逆序总数称为逆序数，用 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 表示. 如果一个排列的逆序数是偶数，则称这个排列为偶排列，否则为奇排列.

例如，在排列 54321 中，有逆序 54，53，52，51，43，42，41，32，31，21，逆序数为 10，即 $\tau(54321)=10$，从而排列 54321 是偶排列.

定义 1.2　n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为所有不同行不同列的 n 个元素乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的代数和，其中 $j_1j_2\cdots j_n$ 是 1，2，…，n 的一个排列. 当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是偶排列时，该项符号为正；当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是奇排列时，该项符号为负，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

【注】(1)由行列式的定义，知 $\boxed{\text{行列式为 } n! \text{ 项不同行不同列的元素乘积的代数和}}$.

(2)由行列式的定义，对于 2 阶行列式，有 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$，即 $\boxed{\text{2 阶行列式等于主对角线元素的乘积减副对角线元素的乘积}}$.

对于 3 阶行列式，有

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3-a_3b_2c_1.$$

(3)对于 2 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$，设向量 (a_{11},a_{12}) 的长度为 l，与 x 轴正半轴的夹角为 α，向量 (a_{21},a_{22}) 的长度为 m，与 x 轴正半轴的夹角为 β，不妨设 $0<\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{2}$，如图1.1所示：

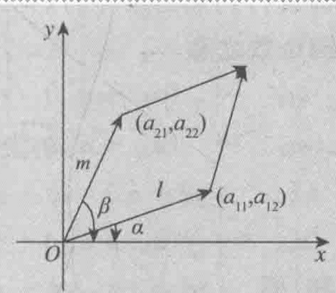

图 1.1

以(a_{11},a_{12})及(a_{21},a_{22})为邻边的平行四边形的面积为

$$\begin{aligned} S_{\square} &= lm\sin(\beta-\alpha) \\ &= lm(\sin\beta\cos\alpha-\cos\beta\sin\alpha) \\ &= l\cos\alpha\cdot m\sin\beta-l\sin\alpha\cdot m\cos\beta \\ &= a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}. \end{aligned}$$

又

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

从而$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=S_{\square}$，即二阶行列式等于以其行向量为邻边的平行四边形的面积.

同理可得，三阶行列式等于以其行向量为邻边的平行六面体的体积.

【例 1.1】求$\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & x & 3 \\ x & x & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & -3x \end{vmatrix}$的 x^4 的系数.

【分析与解答】由行列式的定义知，含有 x^4 的项只有$(-1)^{\tau(1324)}5x\cdot x\cdot x\cdot(-3x)$，从而 x^4 的系数为 15.

1.1.2 行列式的性质

性质 1 行列互换行列式的值不变，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 2 两行(列)互换，行列式变号.

性质 3 一行(列)乘 k，等于行列式乘 k.

性质 4 拆行(列)分配,即若行列式的某一行(列)元素都是两个数之和,例如行列式 D 的第 j 列元素都是两个数之和

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (a_{1j}+a'_{1j}) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (a_{2j}+a'_{2j}) & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{nj}+a'_{nj}) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则 D 等于以下两个行列式之和,即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a'_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a'_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a'_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 5 一行(列)乘 k 加到另一行(列),行列式的值不变.

性质 6 两行(列)成比例,行列式为零.

推论 1 两行(列)相等,行列式为零.

推论 2 一行(列)为零,行列式为零.

【注】(1)在行列式的性质中,$\boxed{\text{行、列的地位是平等的}}$,即行列具有相同的性质.

(2)行列式的性质主要用于化简行列式.

【例 1.2】 证明

$$D=\begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}=(a^3+b^3)\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}.$$

【证明】证法一: 由行列式的性质,得

$$D=\begin{vmatrix} ax & ay & az \\ ay & az & ax \\ az & ax & ay \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} ax & ay & bx \\ ay & az & by \\ az & ax & bz \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} ax & bz & az \\ ay & bx & ax \\ az & by & ay \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} ax & bz & bx \\ ay & bx & by \\ az & by & bz \end{vmatrix}+$$

$$\begin{vmatrix} by & ay & az \\ bz & az & ax \\ bx & ax & ay \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} by & ay & bx \\ bz & az & by \\ bx & ax & bz \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} by & bz & az \\ bz & bx & ax \\ bx & by & ay \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} by & bz & bx \\ bz & bx & by \\ bx & by & bz \end{vmatrix},$$

上式右端第 2,3,4,5,6,7 个行列式中都有两列成比例,所以

$$D=\begin{vmatrix} ax & ay & az \\ ay & az & ax \\ az & ax & ay \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} by & bz & bx \\ bz & bx & by \\ bx & by & bz \end{vmatrix}$$

$$=a^3\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}+b^3\begin{vmatrix} y & z & x \\ z & x & y \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$=a^3\begin{vmatrix}x&y&z\\y&z&x\\z&x&y\end{vmatrix}+b^3\begin{vmatrix}x&y&z\\y&z&x\\z&x&y\end{vmatrix}=(a^3+b^3)\begin{vmatrix}x&y&z\\y&z&x\\z&x&y\end{vmatrix}.$$

证法二：由行列式的公式得

$$D=\begin{vmatrix}ax+by&ay+bz&az+bx\\ay+bz&az+bx&ax+by\\az+bx&ax+by&ay+bz\end{vmatrix}=\left|\begin{pmatrix}a&b&0\\0&a&b\\b&0&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x&y&z\\y&z&x\\z&x&y\end{pmatrix}\right|$$

$$=\begin{vmatrix}a&b&0\\0&a&b\\b&0&a\end{vmatrix}\begin{vmatrix}x&y&z\\y&z&x\\z&x&y\end{vmatrix}=(a^3+b^3)\begin{vmatrix}x&y&z\\y&z&x\\z&x&y\end{vmatrix}.$$

【例 1.3】计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}a^2&(a+1)^2&(a+2)^2&(a+3)^2\\b^2&(b+1)^2&(b+2)^2&(b+3)^2\\c^2&(c+1)^2&(c+2)^2&(c+3)^2\\d^2&(d+1)^2&(d+2)^2&(d+3)^2\end{vmatrix}.$$

【分析与解答】将第一列乘 -1 加到其余各列，得

$$D=\begin{vmatrix}a^2&2a+1&4a+4&6a+9\\b^2&2b+1&4b+4&6b+9\\c^2&2c+1&4c+4&6c+9\\d^2&2d+1&4d+4&6d+9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a^2&2a+1&2&6\\b^2&2b+1&2&6\\c^2&2c+1&2&6\\d^2&2d+1&2&6\end{vmatrix}=0.$$

1.1.3　重要行列式

1. 上(下)三角行列式的值等于主对角线元素的乘积，即

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\&&\ddots&\vdots\\&&&a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&&&\\a_{21}&a_{22}&&\\\vdots&\vdots&\ddots&\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

特别地，

$$\begin{vmatrix}a_{11}&&&\\&a_{22}&&\\&&\ddots&\\&&&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

2. 关于副对角线的行列式

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1,n-1}&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2,n-1}&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\a_{n1}&0&\cdots&0&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&\cdots&0&a_{1n}\\0&\cdots&a_{2,n-1}&a_{2n}\\\vdots&&\vdots&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{n,n-1}&a_{nn}\end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

特别地，

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

3. 拉普拉斯展开式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & c_{11} & \cdots & c_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & c_{n1} & \cdots & c_{nm} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1n} & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1m} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nm} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ b_{11} & \cdots & b_{1m} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ b_{11} & \cdots & b_{1m} & c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} & c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{mn} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}.$$

【注】实际上，$\boxed{\text{拉普拉斯展开式就是分块矩阵求行列式,}}$可以简单地记为：

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|,$$

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|,$$

其中，

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{bmatrix}.$$

【例 1.4】设 $\boldsymbol{A}$ 为 m 阶方阵，$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵，且 $|\boldsymbol{A}|=a$，$|\boldsymbol{B}|=b$，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$，则 $|\boldsymbol{C}|=$________.

【分析与解答】由拉普拉斯展开式，

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{C}| &= \begin{vmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\end{vmatrix} = (-1)^{mn}\,|\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|\\ &= (-1)^{mn}ab.\end{aligned}$$

【例 1.5】4 阶行列式 $\begin{vmatrix}a_1 & 0 & 0 & b_1\\ 0 & a_2 & b_2 & 0\\ 0 & b_3 & a_3 & 0\\ b_4 & 0 & 0 & a_4\end{vmatrix}$ 的值等于(　　).

(A)$a_1a_2a_3a_4-b_1b_2b_3b_4$　　(B)$a_1a_2a_3a_4+b_1b_2b_3b_4$

(C)$(a_1a_2-b_1b_2)(a_3a_4-b_3b_4)$　　(D)$(a_2a_3-b_2b_3)(a_1a_4-b_1b_4)$

【分析与解答】先 2,4 两列互换，再 2,4 两行互换，把零元素调至行列式的一角，用拉普拉斯展开式，得

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}a_1 & 0 & 0 & b_1\\ 0 & a_2 & b_2 & 0\\ 0 & b_3 & a_3 & 0\\ b_4 & 0 & 0 & a_4\end{vmatrix} &= -\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & b_2 & a_2\\ 0 & 0 & a_3 & b_3\\ b_4 & a_4 & 0 & 0\end{vmatrix}\\ &= \begin{vmatrix}a_1 & b_1 & 0 & 0\\ b_4 & a_4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & a_3 & b_3\\ 0 & 0 & b_2 & a_2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ b_4 & a_4\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_3 & b_3\\ b_2 & a_2\end{vmatrix}.\end{aligned}$$

故应选(D).

4. 范德蒙行列式

$$D_n = \begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ x_1^2 & x_2^2 & & x_n^2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1}\end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j).$$

下面给出范德蒙行列式的证明：

对行列式阶数用数学归纳法.

当 $n=2$ 时，

$$D_2 = \begin{vmatrix}1 & 1\\ x_1 & x_2\end{vmatrix} = x_2-x_1 = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant 2}(x_i-x_j),$$

结论成立.

假设对 $n-1$ 阶范德蒙行列式结论成立,下面证明 n 阶范德蒙行列式也成立.

$$D_n=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\0&x_2-x_1&x_3-x_1&\cdots&x_n-x_1\\0&x_2(x_2-x_1)&x_3(x_3-x_1)&\cdots&x_n(x_n-x_1)\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&x_2^{n-2}(x_2-x_1)&x_3^{n-2}(x_3-x_1)&\cdots&x_n^{n-2}(x_n-x_1)\end{vmatrix},$$

按第 1 列展开,并提出每一列的公因子 (x_i-x_1),有

$$D_n=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\x_2&x_3&\cdots&x_n\\x_2^2&x_3^2&\cdots&x_n^2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_2^{n-2}&x_3^{n-2}&\cdots&x_n^{n-2}\end{vmatrix}.$$

上式右端为 $n-1$ 阶范德蒙行列式. 由归纳法假设,它等于所有 (x_i-x_j) 因子的乘积,其中 $2\leqslant j<i\leqslant n$,从而

$$\begin{aligned}D_n&=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\prod_{2\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)\\&=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j).\end{aligned}$$

【例 1.6】 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}b+c&c+a&a+b\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{vmatrix}=$________.

【分析与解答】 把第 2 行加到第 1 行,提取公因式 $a+b+c$,得到范德蒙行列式

$$D=\begin{vmatrix}b+c&c+a&a+b\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a+b+c&a+b+c&a+b+c\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{vmatrix}=(a+b+c)(b-a)(c-a)(c-b).$$

【例 1.7】 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}9&8&7&6\\1&2^2&3^2&4^2\\1&2^3&3^3&4^3\\1&2&3&4\end{vmatrix}=\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

【分析与解答】 将行列式第 4 行加到第 1 行,提取公因子 10,再将第 4 行逐行相换至第 2 行,得

$$D=10\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2^2&3^2&4^2\\1&2^3&3^3&4^3\\1&2&3&4\end{vmatrix}=10\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\1&2^2&3^2&4^2\\1&2^3&3^3&4^3\end{vmatrix}$$

$=10(2-1)(3-1)(4-1)(3-2)(4-2)(4-3)$

$=120.$

【注】应用$\boxed{\text{范德蒙行列式一定要注意用列数大的减列数小的}}$.

例如，

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\n&n-1&n-2\\n^2&(n-1)^2&(n-2)^2\end{vmatrix}=(n-1-n)(n-2-n)(n-2-n+1)=-2.$$

1.1.4 按行(列)展开定理

定义 1.3 在 n 阶行列式 $\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$ 中划去 a_{ij} 所在的第 i 行、第 j 列，剩下的$n-1$阶行列式

$$\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1,j-1}&a_{1,j+1}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{i-1,1}&\cdots&a_{i-1,j-1}&a_{i-1,j+1}&\cdots&a_{i-1,n}\\a_{i+1,1}&\cdots&a_{i+1,j-1}&a_{i+1,j+1}&\cdots&a_{i+1,n}\\\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{n,j-1}&a_{n,j+1}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

称为 a_{ij} 的余子式，记为 M_{ij}. 称$(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为 a_{ij} 的代数余子式，记为 A_{ij}，即

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}.$$

例如，已知行列式 $\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}$，$a_{22}$ 的代数余子式 $A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1&3\\7&9\end{vmatrix}=-12.$

按行展开**定理**：设 n 阶行列式 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$ 的代数余子式为

$A_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$，则 $a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{cases}|\boldsymbol{A}|, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$

推论 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$.

以 3 阶矩阵为例，

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13} & a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23} & a_{11}A_{31}+a_{12}A_{32}+a_{13}A_{33}\\ a_{21}A_{11}+a_{22}A_{12}+a_{23}A_{13} & a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23} & a_{21}A_{31}+a_{22}A_{32}+a_{23}A_{33}\\ a_{31}A_{11}+a_{32}A_{12}+a_{33}A_{13} & a_{31}A_{21}+a_{32}A_{22}+a_{33}A_{23} & a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}|\boldsymbol{A}|&0&0\\0&|\boldsymbol{A}|&0\\0&0&|\boldsymbol{A}|\end{pmatrix}=|\boldsymbol{A}|\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}.$$

同理可证 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$.

【例 1.8】设行列式

$$D=\begin{vmatrix}3&0&4&0\\2&2&2&2\\0&-7&0&0\\5&3&-2&2\end{vmatrix}.$$

(1)求第 4 行各元素余子式之和；

(2)求第 4 行各元素代数余子式之和.

【分析与解答】(1)**解法一**：直接计算 $M_{4j}(j=1,\cdots,4)$，可得 $\sum_{j=1}^{4}M_{4j}=-28$.

解法二：$M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}=-A_{41}+A_{42}-A_{43}+A_{44}$

$$=\begin{vmatrix}3&0&4&0\\2&2&2&2\\0&-7&0&0\\-1&1&-1&1\end{vmatrix}$$

$$=(-7)(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}3&4&0\\2&2&2\\-1&-1&1\end{vmatrix}=-28.$$

(2)**解法一**：直接计算 $A_{4j}=(-1)^{4+j}M_{4j}(j=1,\cdots,4)$，可得 $\sum_{j=1}^{4}A_{4j}=0$.

解法二：

$$A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=\begin{vmatrix}3 & 0 & 4 & 0\\ 2 & 2 & 2 & 2\\ 0 & -7 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=0.$$

【例 1.9】证明：

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}+x & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x\\ a_{21}+x & a_{22}+x & \cdots & a_{2n}+x\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1}+x & a_{n2}+x & \cdots & a_{nn}+x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}+x\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}.$$

其中，$A_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$为$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$的代数余子式.

【分析与解答】

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x\\ a_{21} & a_{22}+x & \cdots & a_{2n}+x\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2}+x & \cdots & a_{nn}+x\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x\\ x & a_{22}+x & \cdots & a_{2n}+x\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x & a_{n2}+x & \cdots & a_{nn}+x\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}+x\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}+x\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}+x\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ x & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11} & x & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & x & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & x & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=\cdots$$

$$=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ x & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1(n-1)} & x\\ a_{21} & \cdots & a_{2(n-1)} & x\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{n(n-1)} & x\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}+\sum_{i=1}^{n}xA_{i1}+\sum_{i=1}^{n}xA_{i2}+\cdots+\sum_{i=1}^{n}xA_{in}$$

$$=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}+x\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}.$$

1.1.5 行列式的公式

若 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 是 n 阶矩阵，则