

21世纪

高等学校电子信息类规划教材



《电磁场与电磁波(第三版)》 学习指导

王家礼 朱满座 路宏敏 王新稳 编著



西安电子科技大学出版社
<http://www.xduph.com>

21 世纪高等学校电子信息类规划教材

《电磁场与电磁波(第三版)》学习指导

王家礼 朱满座 路宏敏 王新稳 编著

西安电子科技大学出版社

内 容 简 介

本书是依据《电磁场与电磁波(第三版)》一书(西安电子科技大学出版社2009年8月出版),为指导学生深入理解“电磁场与电磁波”课程内容,提高学习水平而编写的。全书分8章,每章都由“基本内容与公式”、“例题示范”和“习题及参考答案”三部分组成。

本书既可作为“电磁场与电磁波”课程的学习指导书,也可作为学生、读者报考相关专业研究生的复习参考书。

图书在版编目(CIP)数据

《电磁场与电磁波(第三版)》学习指导/王家礼等编著.

—西安:西安电子科技大学出版社,2011.10

21世纪高等学校电子信息类规划教材

ISBN 978-7-5606-2662-8

I. ①电… II. ①王… III. ①电磁场—高等学校—教学参考资料 ②电磁波—高等学校—教学参考资料 IV. ①O441.4

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第167560号

策 划 云立实

责任编辑 云立实 李恩科

出版发行 西安电子科技大学出版社(西安市太白南路2号)

电 话 (029)88242885 88201467 邮 编 710071

网 址 www.xduph.com 电子邮箱 xdupfxb001@163.com

经 销 新华书店

印刷单位 陕西光大印务有限责任公司

版 次 2011年10月第1版 2011年10月第1次印刷

开 本 787毫米×1092毫米 1/16 印张 11.5

字 数 269千字

印 数 1~3000册

定 价 20.00元

ISBN 978-7-5606-2662-8/O·0114

XDUP 2954001-1

* * * 如有印装问题可调换 * * *

本社图书封面为激光防伪覆膜,谨防盗版。

前 言

本书作为高等学校电子类专业“电磁场与电磁波”课程的学习指导书，是与西安电子科技大学出版社出版的教材《电磁场与电磁波(第三版)》(2009.8)配套使用的。王家礼、朱满座、路宏敏、王新稳参加了全书的编写工作，其中第一、八章由王新稳负责编写，第二、三、四章由朱满座负责编写，第五、六、七章由路宏敏负责编写，王家礼负责全书的统稿工作。

西安电子科技大学出版社相关人员为本书的出版付出了艰辛的劳动，在此表示衷心的感谢。

由于编者水平有限，书中难免出现不当之处，衷心希望使用本书的老师、同学和读者批评指正。

目 录

第一章 矢量分析	1
一、基本内容与公式	1
二、例题示范	2
三、习题及参考答案	11
第二章 静电场	24
一、基本内容与公式	24
二、例题示范	25
三、习题及参考答案	30
第三章 恒定电流的电场和磁场	40
一、基本内容与公式	40
二、例题示范	42
三、习题及参考答案	48
第四章 静态场的解	64
一、基本内容与公式	64
二、例题示范	64
三、习题及参考答案	70
第五章 时变电磁场	85
一、基本内容与公式	85
二、例题示范	87
三、习题及参考答案	95
第六章 平面电磁波	110
一、基本内容与公式	110
二、例题示范	111
三、习题及参考答案	120
第七章 电磁波的辐射	136
一、基本内容与公式	136
二、例题示范	137
三、习题及参考答案	145
第八章 导行电磁波	151
一、基本内容与公式	151
二、例题示范	152
三、习题及参考答案	166

第一章 矢量分析

一、基本内容与公式

1. 我们讨论的物理量若只有大小, 则它是一个标量函数, 该标量函数在某一空间区域内确定了该物理量的一个场, 该场称为标量场。若我们讨论的物理量既有大小又有方向, 则它是一个矢性函数, 该矢性函数在某一空间区域内确定了该物理量的一个场, 该场称为矢量场。矢量运算应满足矢量运算法则。

2. 标量函数 u 在某点沿 l 方向的变化率 $\frac{\partial u}{\partial l}$, 称为标量场 u 沿该方向的方向导数。标量场 u 在该点的梯度 $\text{grad} u = \nabla u$ 与方向导数的关系为

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \nabla u \cdot l$$

标量场 u 的梯度是一个矢量, 它的大小和方向就是该点最大变化率的大小和方向。

在标量场 u 中, 具有相同 u 值的点构成一等值面。在等值面的法线方向上, u 值变化最快。因此, 梯度的方向也就是等值面的法线方向。

3. 矢量 \mathbf{A} 穿过曲面 S 的通量为 $\Psi = \int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$ 。矢量 \mathbf{A} 在某点的散度定义为

$$\text{div } \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta V}$$

它是一标量, 表示从该点散发的通量体密度, 描述了该点的通量源强度。其散度定理为

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

4. 矢量 \mathbf{A} 沿闭合曲线 c 的线积分 $\oint_c \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$, 称为矢量 \mathbf{A} 沿该曲线的环量。矢量 \mathbf{A} 在某点的旋度定义为

$$\text{rot } \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\left[\oint_c \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \right]_{\max}}{\Delta S}$$

它是一矢量, 其大小和方向是该点最大环量面密度的大小和此时的面元方向, 它描述旋涡源强度。其斯托克斯定理为

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

5. 哈密顿微分算子 ∇ 是一个兼有矢量和微分运算作用的矢量运算符号。 $\nabla \cdot \mathbf{A}$ 可看做两个矢量的标量积, $\nabla \times \mathbf{A}$ 可看做两个矢量的矢量积。计算时, 先按矢量运算法则展开, 然后再做微分运算。 ∇u 可看做矢量与标量相乘。在直角坐标系中, 其 ∇ 算子可表示为

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z$$

在圆柱坐标系中, 其 ∇ 算子可表示为

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial \rho} \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z$$

在球面坐标系中, ∇ 算子可表示为

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi$$

6. 亥姆霍兹定理总结了矢量场共同的性质: 矢量场可由矢量场的散度和旋度唯一地确定; 矢量场的散度和旋度各对应矢量场中的一种源。所以分析矢量场时, 应从研究它的散度和旋度入手, 旋度方程和散度方程构成了矢量场的基本方程。

二、例题示范

例 1-1 求数量场 $\varphi = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ 通过点 $M(1, 2, 3)$ 的等值面方程。

解: 函数在点 $M(1, 2, 3)$ 处的值为

$$\varphi = \ln(1 + 4 + 9) = \ln 14$$

故通过点 $M(1, 2, 3)$ 的等值面为

$$\ln(x^2 + y^2 + z^2) = \ln 14$$

即

$$x^2 + y^2 + z^2 = 14$$

例 1-2 设

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_x + a_2 \mathbf{e}_y + a_3 \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{r} = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z$$

求矢量场 $\mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{r}$ 的矢量线。

解: 由矢量积的运算规则可得

$$\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = (a_2 z - a_3 y) \mathbf{e}_x + (a_3 x - a_1 z) \mathbf{e}_y + (a_1 y - a_2 x) \mathbf{e}_z$$

则矢量线所满足的微分方程为

$$\frac{dx}{a_2 z - a_3 y} = \frac{dy}{a_3 x - a_1 z} = \frac{dz}{a_1 y - a_2 x} \quad (1-1)$$

上式是一个等比式, 设比值为 K , 根据分子分母同乘一个数比值不变, 则(1-1)式第一项分子分母同乘 a_1 , 第二项分子分母同乘 a_2 , 第三项分子分母同乘 a_3 , 比值不变, 可得

$$\frac{a_1 dx}{a_1(a_2 z - a_3 y)} = \frac{a_2 dy}{a_2(a_3 x - a_1 z)} = \frac{a_3 dz}{a_3(a_1 y - a_2 x)} = K$$

则可写成如下形式:

$$\frac{a_1 dx}{a_1(a_2 z - a_3 y)} = K \quad \text{或} \quad a_1 dx = Ka_1(a_2 z - a_3 y)$$

$$\frac{a_2 dy}{a_2(a_3 x - a_1 z)} = K \quad \text{或} \quad a_2 dy = Ka_2(a_3 x - a_1 z)$$

$$\frac{a_3 dz}{a_3(a_1 y - a_2 x)} = K \quad \text{或} \quad a_3 dz = Ka_3(a_1 y - a_2 x)$$

对上面三式求和可得

$$\begin{aligned} a_1 dx + a_2 dy + a_3 dz &= d(a_1 x) + d(a_2 y) + d(a_3 z) \\ &= d(a_1 x + a_2 y + a_3 z) = 0 \end{aligned}$$

因为 $d(a_1 x + a_2 y + a_3 z) = 0$, 所以

$$a_1 x + a_2 y + a_3 z = C_1 \quad (1-2)$$

式中 C_1 为任意常数。

再将(1-1)式第一项分子分母同乘 x , 第二项分子分母同乘 y , 第三项分子分母同乘 z , 比值不变, 同理可以求出

$$x dx + y dy + z dz = 0$$

因为 $x dx + y dy + z dz = d(x^2 + y^2 + z^2) = 0$, 所以

$$x^2 + y^2 + z^2 = C_2 \quad (1-3)$$

式中 C_2 为任意常数。

则矢量线方程为

$$\begin{cases} a_1 x + a_2 y + a_3 z = C_1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = C_2 \end{cases}$$

式中 C_1, C_2 为任意常数。

例 1-3 求函数 $\varphi = 3x^2 y - y^3 z^2$ 在点 $M(1, -2, -1)$ 处沿矢量 $\mathbf{a} = yz\mathbf{e}_x + xz\mathbf{e}_y + xy\mathbf{e}_z$ 方向的方向导数。

解: 矢量 \mathbf{a} 在 M 点处的值为

$$\mathbf{a} |_M = 2\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y - 2\mathbf{e}_z$$

其方向余弦为

$$\cos\alpha = \frac{2}{3}, \quad \cos\beta = -\frac{1}{3}, \quad \cos\gamma = -\frac{2}{3}$$

而

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_M = 6xy |_M = -12$$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|_M = (3x^2 - 3y^2 z^2) |_M = 3 - 12 = -9$$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_M = -2y^3 z |_M = -16$$

于是所求方向导数为

$$\frac{\partial \varphi}{\partial l} \Big|_M = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cos \gamma \Big|_M = -12 \times \frac{2}{3} + 9 \times \frac{1}{3} + 16 \times \frac{2}{3} = \frac{17}{3}$$

例 1-4 求函数 $\varphi = 3x^2y - y^2$ 在点 $M(2, 3)$ 处沿曲线 $y = x^2 - 1$ 朝 x 增大一方的方向导数。

解: 函数 φ 在某点处沿某曲线的某一方向的方向导数等于函数 φ 在该点处沿同方向的切线方向的方向导数, 而曲线 $y = x^2 - 1$ 在点 M 处沿所取方向的切线斜率为

$$y' \Big|_M = 2x \Big|_M = 4$$

即

$$\tan \alpha = 4$$

其方向余弦

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{17}}, \quad \cos \beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$$

而 $\frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_M = 6xy \Big|_{(2,3)} = 36$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_M = (3x^2 - 2y) \Big|_{(2,3)} = 6$$

于是所求的方向导数为

$$\frac{\partial \varphi}{\partial l} \Big|_M = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos \beta \Big|_M = 36 \times \frac{1}{\sqrt{17}} + 6 \times \frac{4}{\sqrt{17}} = \frac{60}{\sqrt{17}}$$

例 1-5 求数量场 $\varphi = \frac{1}{r}$ 在过点 $M\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ 的等值面上过该点的切平面方程。

解: 数量场 $\varphi = \frac{1}{r}$ 的等值面方程为 $\frac{1}{r} = c$, 即

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{c^2}$$

而通过点 $M\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ 的等值面则为单位球面:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

由于过点 M 的切平面的法线矢量 \mathbf{n} 垂直于等值面, 也就是该数量场在 M 点处的梯度, 即

$$\mathbf{n} = \nabla \varphi \Big|_M = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} \Big|_M = -\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{e}_x + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{e}_y + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{e}_z\right)$$

所以, 所求的切平面方程为

$$-\frac{1}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\left(y - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\left(z - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0$$

即

$$x + y + z = \sqrt{3}$$

例 1-6 如图 1-1 所示, 设 P 为焦点在 A 、 B 处的某一椭圆上的任一点。试证明, 直线 AP 、 BP 与椭圆在 P 点的切线所成之夹角相等。

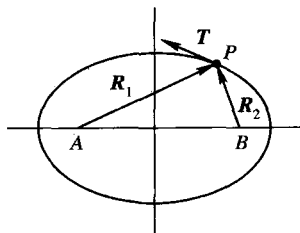


图 1-1 例 1-6 用图

证明：令 $R_1 = AP$, $R_2 = BP$ 分别代表由焦点 A 、 B 至 P 点的向量, T 为椭圆在 P 点的单位切向量。 R_1 与 T 的夹角为 α_1 , R_2 与 $-T$ 的夹角为 α_2 。

根据椭圆的性质可知, 该椭圆方程为 $R_1 + R_2 = C$ (C 为一常数), 则该椭圆的法向量 n 为

$$n = \nabla(R_1 + R_2)$$

显然 $n \cdot T = 0$, 即

$$\nabla(R_1 + R_2) \cdot T = 0$$

或

$$\nabla R_1 \cdot T = \nabla R_2 \cdot (-T)$$

由于

$$\nabla R_1 = \frac{\mathbf{R}_1}{R_1} = \mathbf{R}_1^0 \text{ (单位矢量)}$$

$$\nabla R_2 = \frac{\mathbf{R}_2}{R_2} = \mathbf{R}_2^0 \text{ (单位矢量)}$$

所以

$$\nabla R_1 \cdot T = \cos \alpha_1, \quad \nabla R_2 \cdot (-T) = \cos \alpha_2$$

即

$$\alpha_1 = \alpha_2$$

该题的物理解释是: 由椭圆的一个焦点发出的光线、电磁波或声波, 会被椭圆反射后经过另一个焦点。 $\alpha_1 = \alpha_2$ 表明, 入射角等于反射角。

例 1-7 已知矢量场 $\mathbf{A} = (axz + x^2)\mathbf{e}_x + (by + xy^2)\mathbf{e}_y + (z - z^2 + cxz - 2xyz)\mathbf{e}_z$, 试确定 a 、 b 、 c , 使得 \mathbf{A} 成为一无源场。

解：要使矢量场 \mathbf{A} 无源, 则必要求 $\text{div } \mathbf{A} = 0$, 即

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{A} &= \nabla \cdot \mathbf{A} = ax + 2x + b + 2xy + 1 - 2z + cx - 2xy \\ &= (a - 2)z + (2 + c)x + b + 1 = 0 \end{aligned}$$

要使上式成立, 必须有

$$a - 2 = 0, \quad 2 + c = 0, \quad b + 1 = 0$$

故

$$a = 2, \quad b = -1, \quad c = -2$$

此时

$$\mathbf{A} = (2xz + x^2)\mathbf{e}_x + (xy^2 - y)\mathbf{e}_y + (z - z^2 - 2xz - 2xyz)\mathbf{e}_z$$

例 1-8 如图 1-2 所示, 设 S 是由柱面 $x^2 + y^2 = a^2$ 及平面 $z = 0$ 和 $z = h$ 围成的封闭曲面, 求矢径 \mathbf{r} 穿出 S 的柱面部分的通量。

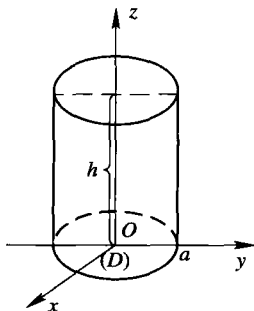


图 1-2 例 1-8 用图

解: 设 S_1 和 S_2 为闭曲面 S 的顶部与底部的圆面, 则所求的通量可用穿出闭曲面 S 的总通量减去穿出 S_1 和 S_2 面的通量求得, 即

$$\begin{aligned} \Psi &= \oiint_S \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} - \iint_{S_1+S_2} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{r} dV - \iint_{S_1} h dx dy + \iint_{S_2} 0 \cdot dx dy \\ &= \iiint_{\Omega} 3 dV - \pi a^2 h + 0 \\ &= 3\pi a^2 h - \pi a^2 h \\ &= 2\pi a^2 h \end{aligned}$$

例 1-9 已知 $\varphi = 3x^2y$, $\mathbf{A} = x^3yze_y + 3xy^2e_z$, 求 $\text{rot}(\varphi\mathbf{A})$ 。

解: $\text{rot}(\varphi\mathbf{A}) = \nabla \times (\varphi\mathbf{A}) = \varphi \nabla \times \mathbf{A} + \nabla\varphi \times \mathbf{A}$

而

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & x^3yz & 3xy^2 \end{vmatrix} = (6xy - x^3y)\mathbf{e}_x - 3y^2\mathbf{e}_y + 3x^2yze_z$$

$$\nabla\varphi \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 6xy & 3x^2 & 0 \\ 0 & x^3yz & 3xy^2 \end{vmatrix} = 9x^3y^2\mathbf{e}_x - 18x^2y^3\mathbf{e}_y + 6x^4y^2ze_z$$

所以

$$\nabla \times (\varphi\mathbf{A}) = 3x^2y^2[(9x - x^3)\mathbf{e}_x - 9y\mathbf{e}_y + 5x^2ze_z]$$

例 1-10 证明矢量场

$$\mathbf{A} = (y^2 + 2xz^2)\mathbf{e}_x + (2xy - z)\mathbf{e}_y + (2x^2z - y + 2z)\mathbf{e}_z$$

证明：若 \mathbf{A} 为有势场，则其源应是发散的，而非涡旋源，即

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = 0$$

由于

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 + 2xz^2 & 2xy - z & 2x^2z - y + 2z \end{vmatrix} \\ &= (-1 + 1)\mathbf{e}_x - (4xz - 4xz)\mathbf{e}_y + (2y - 2y)\mathbf{e}_z = 0 \end{aligned}$$

所以 \mathbf{A} 为有势场。

由 $\nabla \times (\nabla \varphi) \equiv 0$ 可知， \mathbf{A} 可表示成势函数 φ 的梯度，即

$$\mathbf{A} = -\nabla \varphi$$

由此可得如下三个方程：

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= -A_x = -(y^2 + 2xz^2) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= -A_y = z - 2xy \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= -A_z = -(2x^2z + 2z - y) \end{aligned}$$

由第一个方程对 x 积分得

$$\varphi = -xy^2 - x^2z^2 + c(y, z) \quad (1-4)$$

其中 $c(y, z)$ 暂时是任意的。为了确定它，将上式对 y 求导得

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -2xy + \frac{\partial c(y, z)}{\partial y}$$

与第二个方程比较可得

$$c'_y(y, z) = z, \quad c(y, z) = yz + c(z)$$

代回(1-4)式可得

$$\varphi = -xy^2 - x^2z^2 + yz + c(z) \quad (1-5)$$

为确定 $c(z)$ ，将(1-5)式对 z 求导，并与第三个方程比较可得

$$c'_z(z) = -2z, \quad c(z) = z^2 + c$$

故所求势函数为

$$\varphi = -xy^2 - x^2z^2 + yz - z^2 + c$$

并且

$$\mathbf{A} = -\nabla \varphi$$

例 1-11 试证明 $\mathbf{A} = yze_x + xze_y + xye_z$ 为调和场，并求出场的势函数 φ (φ 也称为调和函数)。

证明：若矢量场 \mathbf{A} 中恒有 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ 与 $\nabla \times \mathbf{A} = 0$ ，则该矢量场 \mathbf{A} 称为调和场。也就

是说,调和场是指既无源又无旋的矢量场。

由 $\nabla \times (\nabla \varphi) \equiv 0$ 可知,调和场存在势函数 φ 满足

$$\mathbf{A} = -\nabla \varphi$$

又由于 $\nabla \cdot \mathbf{A} \equiv 0$, 即

$$\nabla \cdot (\nabla \varphi) = \nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (1-6)$$

可知,势函数 φ 还满足方程(1-6),而方程(1-6)称为拉普拉斯方程。满足拉普拉斯方程的势函数 φ 也叫调和函数。而

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

称为拉普拉斯算子。

对于题目中给出的矢量 \mathbf{A} , 由于

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz & zx & xy \end{vmatrix} = (x-x)\mathbf{e}_x - (y-y)\mathbf{e}_y + (z-z)\mathbf{e}_z \\ &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{A} &= 0 \end{aligned}$$

所以,矢量场 \mathbf{A} 为调和场。由于 $\mathbf{A} = -\nabla \varphi$, 即

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -yz, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -zx, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -xy$$

解之有

$$\varphi = -xyz + c$$

又由于

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= -yz, & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= -xz, & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} &= 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= -xy, & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} &= 0 \end{aligned}$$

即

$$\nabla^2 \varphi = 0$$

所以 $\varphi = -xyz + c$ 即为所求调和函数。

例 1-12 设 $\psi(x, y, z)$ 为任意函数, $\mathbf{A}(x, y, z)$ 为任意矢量函数, 试证明下列矢量恒等式成立。

- (1) 任意函数梯度的旋度恒等于零, 即 $\nabla \times \nabla \psi \equiv 0$
- (2) 任意矢量旋度的散度恒等于零, 即 $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} \equiv 0$

$$(3) \nabla \cdot \nabla \psi = \nabla^2 \psi$$

$$(4) \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

解:(1) 根据梯度的定义,可知

$$\nabla \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial \psi}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial \psi}{\partial z} \mathbf{e}_z = B_x \mathbf{e}_x + B_y \mathbf{e}_y + B_z \mathbf{e}_z = \mathbf{B}$$

$$\nabla \times \nabla \psi = \nabla \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ B_x & B_y & B_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial y} \right) \mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial z} \right) \mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial x} \right) \mathbf{e}_z$$

因为

$$\frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial y} = 0$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial z} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial x} = 0$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial x} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = 0$$

所以

$$\nabla \times \nabla \psi = \left(\frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial y} \right) \mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial z} \right) \mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial x} \right) \mathbf{e}_z \equiv 0$$

证明完毕。

(2) 已知

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_y}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) \mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x} \right) \mathbf{e}_z \\ &= C_x \mathbf{e}_x + C_y \mathbf{e}_y + C_z \mathbf{e}_z = \mathbf{C} \end{aligned}$$

因为

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{C} = \frac{\partial C_x}{\partial x} + \frac{\partial C_y}{\partial y} + \frac{\partial C_z}{\partial z}$$

$$\frac{\partial C_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_y}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial C_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial y}$$

$$\frac{\partial C_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial z}$$

所以

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = \frac{\partial C_x}{\partial x} + \frac{\partial C_y}{\partial y} + \frac{\partial C_z}{\partial z} = \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial z} \equiv 0$$

证明完毕。

(3)

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \nabla \psi &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z \right) \cdot \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial \psi}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial \psi}{\partial z} \mathbf{e}_z \right) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z \right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z \right) \psi \\ &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi = \nabla^2 \psi\end{aligned}$$

证明完毕。

(4) 已知

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{A} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial A_y}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) \mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x} \right) \mathbf{e}_z \\ &= B_x \mathbf{e}_x + B_y \mathbf{e}_y + B_z \mathbf{e}_z = \mathbf{B}\end{aligned}$$

式中

$$B_x = \left(\frac{\partial A_y}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial y} \right)$$

$$B_y = \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \right)$$

$$B_z = \left(\frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x} \right)$$

$$\begin{aligned}\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} &= \nabla \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ B_x & B_y & B_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial y} \right) \mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial z} \right) \mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial x} \right) \mathbf{e}_z\end{aligned}$$

式中

$$\frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_y}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 A_x}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial z}$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_y}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 A_y}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial x \partial z}$$

因此

$$\begin{aligned}
\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} &= \left(\frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial y} \right) \mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial z} \right) \mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial x} \right) \mathbf{e}_z \\
&= \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial y} \right) \mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z \partial y} \right) \mathbf{e}_y \\
&\quad + \left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial x \partial z} \right) \mathbf{e}_z \\
&= - \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} \right) \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_z}{\partial z} + \frac{\partial A_y}{\partial y} \right) \mathbf{e}_x - \left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \right) \mathbf{e}_y \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \mathbf{e}_y - \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} \right) \mathbf{e}_z + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_x}{\partial x} \right) \mathbf{e}_z \\
\Delta^2 A_x &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) A_x \\
\Delta^2 A_x - \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}
\end{aligned}$$

同理

$$\begin{aligned}
\Delta^2 A_y &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) A_y, & \Delta^2 A_y - \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \\
\Delta^2 A_z &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) A_z, & \Delta^2 A_z - \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2}
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} &= - \left(\Delta^2 A_x - \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} \right) \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_z}{\partial z} + \frac{\partial A_y}{\partial y} \right) \mathbf{e}_x - \left(\Delta^2 A_y - \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} \right) \mathbf{e}_y \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \mathbf{e}_y - \left(\Delta^2 A_z - \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \right) \mathbf{e}_z + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_x}{\partial x} \right) \mathbf{e}_z
\end{aligned}$$

又因为

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, & \nabla \cdot \mathbf{A} - \frac{\partial A_x}{\partial x} &= \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\
\nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, & \nabla \cdot \mathbf{A} - \frac{\partial A_y}{\partial y} &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\
\nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, & \nabla \cdot \mathbf{A} - \frac{\partial A_z}{\partial z} &= \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_x}{\partial x} \\
\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} &= - \left(\Delta^2 A_x - \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} \right) \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial x} \left(\nabla \cdot \mathbf{A} - \frac{\partial A_x}{\partial x} \right) \mathbf{e}_x \\
&\quad - \left(\Delta^2 A_y - \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} \right) \mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nabla \cdot \mathbf{A} - \frac{\partial A_y}{\partial y} \right) \mathbf{e}_y \\
&\quad - \left(\Delta^2 A_z - \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \right) \mathbf{e}_z + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nabla \cdot \mathbf{A} - \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \mathbf{e}_z
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} &= -(\nabla^2 A_x) \mathbf{e}_x + \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial x} (\nabla \cdot \mathbf{A}) \mathbf{e}_x - \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} \mathbf{e}_x \\ &\quad - (\nabla^2 A_y) \mathbf{e}_y + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} \mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial y} (\nabla \cdot \mathbf{A}) \mathbf{e}_y - \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} \mathbf{e}_y \\ &\quad - (\nabla^2 A_z) \mathbf{e}_z + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \mathbf{e}_z + \frac{\partial}{\partial z} (\nabla \cdot \mathbf{A}) \mathbf{e}_z - \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \mathbf{e}_z \\ \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} &= -\nabla^2 \mathbf{A} + \nabla \nabla \cdot \mathbf{A} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A} \end{aligned}$$

证明完毕。

三、习题及参考答案

1-1 矢径 $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$ 与各坐标轴正向的夹角为 α, β, γ 。请用坐标 (x, y, z) 来表示 α, β, γ , 并证明:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

解: 由于

$$\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \cos \beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

所以

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^2} = 1$$

1-2 已知 $\mathbf{A} = \mathbf{e}_x - 9\mathbf{e}_y - \mathbf{e}_z$, $\mathbf{B} = 2\mathbf{e}_x - 4\mathbf{e}_y + 3\mathbf{e}_z$, 求:

(1) $\mathbf{A} + \mathbf{B}$

(2) $\mathbf{A} - \mathbf{B}$

(3) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$

(4) $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$

解:

$$(1) \mathbf{A} + \mathbf{B} = 3\mathbf{e}_x - 13\mathbf{e}_y + 2\mathbf{e}_z$$

$$(2) \mathbf{A} - \mathbf{B} = -\mathbf{e}_x - 5\mathbf{e}_y - 4\mathbf{e}_z$$

$$(3) \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 2 + 36 - 3 = 35$$

$$(4) \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 1 & -9 & -1 \\ 2 & -4 & 3 \end{vmatrix} = -31\mathbf{e}_x - 5\mathbf{e}_y + 14\mathbf{e}_z$$

1-3 已知 $\mathbf{A} = \mathbf{e}_x + b\mathbf{e}_y + c\mathbf{e}_z$, $\mathbf{B} = -\mathbf{e}_x + 3\mathbf{e}_y + 8\mathbf{e}_z$, 若使 $\mathbf{A} \perp \mathbf{B}$ 及 $\mathbf{A} \parallel \mathbf{B}$, 则 b 和 c 各为多少?

解:

(1) 若使 $\mathbf{A} \perp \mathbf{B}$, 则要求 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$, 即

$$-1 + 3b + 8c = 0$$