研究生教育创新工程教材

Random Process and Queuing Theory

随机过程与排队论

◎ 何选森 编著

湖南大学出版社
Hunan University Press

研究生教育创新工程教材

Random Process and Queuing Theory

随机过程与排队论

◎ 何选森 编著

湖南大學出版社
Hunan University Press

内容简介

全书共分六章。介绍了随机过程的基本概念和常用的变换方法；着重讨论了马尔可夫链、纯不连续马尔可夫过程、泊松过程、转移概率方程及生灭过程的统计特性；在马尔可夫过程的基础上重点讨论了M/M·排队系统的性态和模型，并对非马尔可夫排队系统规律作了分析。

本书可供理工科及管理类等相关专业研究生和高年级本科生作为教材或参考书，也可供有关工程技术、管理人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

随机过程与排队论/何选森编著. —长沙：湖南大学出版社，2010. 1

ISBN 978 - 7 - 81113 - 765 - 1

Ⅰ.①随… Ⅱ.①何… Ⅲ.①随机过程 ②排队论

Ⅳ.①O211.6 ②O226

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 011102 号

随机过程与排队论

Suiji Guocheng yu Paiduilun

编　　著：何选森

责任编辑：张建平

出版发行：湖南大学出版社　　**责任印制：**陈　燕

社　　址：湖南·长沙·岳麓山　　**邮　　编：**410082

电　　话：0731 - 88822559(发行部)，88820006(编辑室)，88821006(出版部)

传　　真：0731 - 88649312(发行部)，88822264(总编室)

电子邮箱：presszhangjp@hnu.cn

网　　址：http://press.hnu.cn

印　　装：长沙国防科大印刷厂

开本：787×1092　16 开　　**印张：**17.25　　**字数：**399 千

版次：2010 年 8 月第 1 版　　**印次：**2010 年 8 月第 1 次印刷

书号：ISBN 978 - 7 - 81113 - 765 - 1/O·77

定价：34.00 元

前　言

《随机过程与排队论》是信息处理与通信工程、公共事业管理、交通与运输、经济管理、工程控制等专业研究生的必修课程。

全书共分六章。第一章随机过程概论为复习本科阶段所学的内容，强调了随机过程的特征函数与母函数、拉普拉斯一斯帝尔阶斯变换以及复变函数的儒歇定理等。第二章马尔可夫链，包括马尔可夫过程的基本概念和特点，马尔可夫链与切普曼-柯尔莫哥洛夫方程，马尔可夫链中状态的分类，转移概率的渐近性质和平稳分布，非常返态的分析以及鞅过程概念。第三章泊松过程，包括可数状态马尔可夫过程的基本概念，齐次泊松过程及分布特性，非齐次泊松过程、复合泊松过程、过滤泊松过程的统计特性以及维纳过程的基本概念。第四章转移概率方程与生灭过程，包括转移概率的可微性、跳跃强度与 Q 矩阵的基本概念，柯尔莫哥洛夫一费勒前进方程与后退方程，转移概率的遍历性，生灭过程与更新过程的概念与特性。第五章基于生灭过程的排队系统，包括排队系统的基本概念，平衡状态的 M/M/· 系统的分布特性与主要目标参量，利特尔公式，瞬时状态的 M/M/· 系统的统计特性以及系统忙期的概念。第六章其他排队系统，包括 M/Er/1 系统、Er/M/1 系统、$M/M^r/1$ 系统、$M^k/M/1$ 系统、M/G/1 系统、G/M/n 系统等的分布特性与主要目标参量，对于离散时间排队模型，主要讨论 Geom/Geom/1 与 Geom/Geom/n 系统的平稳特性。

马尔可夫链的概念为概率论拓展了研究领域，从一族相互独立的随机变量推广到具有某种依赖性的随机变量族，从而形成了概率论中的随机过程论。随机过程是研究随机变化过程的特点与规律性的学科。排队论又称为等待线问题、随机服务系统理论等，是运筹学的一个分支，是研究由于随机因素干扰而出现的各种排队与服务系统的统计规律性的科学。随机过程与排队论有着本质的联系，随机过程是排队论的基础，排队论的应用又促进了随机过程的发展。

随机过程与排队论广泛应用于通信、计算机、自动控制、随机振动、生物医学、气象预报、地震信号处理、生产与服务系统、军事、经济、交通与运输、管理运筹等领域。随着科学技术的发展，随机过程与排队论的应用将日益广泛和深入。

本书是作为信息处理与通信工程、计算机科学等专业研究生的教材编写的，在内容的安排上，力求物理概念清楚，理论分析严密，对于一些难于理解的推导尽量给出详细的步骤，使读者能更好地理解和掌握。各章最后附有部分习题，读者通过做适量的习题，对巩固和加深理解各章的内容是很必要和有益的。其内容适应于 48～60 学时的需要，在教学中可根据需要对本书内容加以取舍，同时本书也可供有关工程技术人员参考。

本书是在作者多年为湖南大学信息处理与通信工程、信息安全、计算机科学等专业研

究生讲授《随机过程与排队论》课程讲义的基础上，根据教学大纲，结合教学工作体会和从事相关科研工作的经验而编写的。本书得到了湖南大学出版社和湖南大学研究生院的大力支持和帮助，在此表示诚挚的谢意。由于作者水平有限，书中难免有缺点和错误，欢迎广大读者对本书提出宝贵的意见和建议，对不妥之处提出批评指正。

作　者

2010 年 5 月

目　次

第四章 转移概率方程与生灭过程

第五章 基于生灭过程的排队系统

第六章　其他排队系统

第一章　随机过程基础

众所周知，现实世界一切随时间变化的过程，往往都要受到某种不确定因素的作用。这些不确定因素往往又服从某种统计规律，我们把这种具有统计规律的不确定因素称为“随机因素”。用数学语言来讲，这类事物的变化过程不能用一个或几个时间 t 的确定性函数来描述。如果对这类事物的变化全过程进行一次观察，可得到一个时间 t 的函数，但是若对这类过程作重复多次的独立观测时，各次观测所得到的时间 t 的函数是互不相同的，而且在每次观测之前均不能预知是哪一个结果发生。从另一个角度来看，如果固定某一个观察时刻 t，事物在时刻 t 所取的值或所处的状态是随机的。我们把这类过程叫做随机过程。

随机过程虽然不能用一个确定性的函数来描述，但是随机过程也并非是没有规律的。我们的任务就是研究如何描述一个随机过程以及随机过程的性质和规律。

§1.1　随机过程的概念

定义 1.1：设有一个过程 $X(t)$，如果对于每一个固定的时刻 $t_j(j=1,2,\cdots)$，$X(t_j)$ 是一个随机变量，则称 $X(t)$ 为随机过程。或者说：依赖于时间 t 的一族随机变量 $X(t)$ 叫做随机过程。

对于随机过程 $X(t)$，若 t 取任意可能的时刻，x 为此时刻 $X(t)$ 的取值，则其一维分布函数为

$$F_X(x,t)=P\{X(t)<x\} \tag{1.1.1}$$

同样，随机过程 $X(t)$ 的 n 维分布函数为

$$F_X(x_1,x_2,\cdots,x_n;,t_1,t_2,\cdots,t_n)=P\{X(t_1)<x_1,X(t_2)<x_2,\cdots,X(t_n)<x_n\} \tag{1.1.2}$$

从随机过程 $X(t)$ 的 n 维联合分布函数可知，这一族有限维分布函数不仅刻划出对应于每一个时刻 $t_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的随机变量 $X(t_i)$ 的统计规律，而且也刻划出该过程在不同时刻 $t_i,t_k(i\neq k)$ 的随机变量 $X(t_i)$ 与 $X(t_k)$ 间的关系。因此，随机过程 $X(t)$ 的统计规律性可由它的有限维分布函数族完整地描述出来。

随机过程 $X(t)$ 的一维分布函数对 x 求偏导数可得到随机过程的概率密度

$$f_X(x,t)=\frac{\partial F_X(x,t)}{\partial x} \tag{1.1.3}$$

随机过程 $X(t)$ 的 n 维分布函数对 x 求 n 阶偏导数可得到随机过程的 n 维概率密度

$$f_X(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)=\frac{\partial^n F_X(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)}{\partial x_1\partial x_2\cdots\partial x_n} \tag{1.1.4}$$

把随机过程 $X(t)$在 $t=t_k$ 时刻所取的值 $X(t_k)$称为随机过程在 $t=t_k$ 时的状态;随机过程的所有可能状态的集合,称之为状态空间。随机过程 $X(t)$的自变量 t 称为随机过程 $X(t)$的参数,自变量 t 所有可能的取值称为随机过程的参数集 T。

定义 1.2:设随机试验 E 的样本空间 $S=\{e_i,(i=1,2,\cdots)\}$,若对每一个基本事件 $e_i\in S$,均能以某种规则确定一个时间 t 的函数,则由所有 $e_i(i=1,2,\cdots)$确定的一族 t 的函数叫做随机过程。其中每一个 t 的函数称为随机过程的样本函数或简称样本。

从定义 1.1 和定义 1.2 可知,这两种定义在本质上是一样的,只是从不同的角度来描述随机过程。这两个定义是相互补充的,在作实际观测时,通常采用定义 1.2;在进行理论分析时,通常采用定义 1.1。

§1.2　随机过程的数字特征

在实际工作中,要确定随机过程的多维概率分布及多维概率密度是比较困难的,甚至是不可能的。因此在实际应用中,对随机过程仅研究它的几个最主要的数字特征。

定义 1.3:随机过程 $X(t)$的数学期望为

$$E[X(t)]=m_X(t)=\int_{-\infty}^{\infty}xf_X(x,t)dx \tag{1.2.1}$$

定义 1.4:随机过程 $X(t)$的方差为

$$D[X(t)]=\sigma_X^2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}[X(t)-m_X(t)]^2f_X(x,t)dx \tag{1.2.2}$$

随机过程的数学期望和方差是时间 t 的确定性函数。其中数学期望表示随机过程 $X(t)$的瞬时统计均值,是对随机过程所有样本函数在时间 t 的所有取值进行概率加权平均,所以又称为集合平均。随机过程的方差为非负函数,它是随机过程的二阶中心矩,描述了随机过程诸样本偏离其数学期望的程度,方差的平方根 $\sigma_X(t)$称为随机过程的根方差或标准差。

由随机过程的数学期望和方差表示式可得

$$D[X(t)]=E[X^2(t)]-E^2[X(t)] \tag{1.2.3}$$

定义 1.5:随机过程 $X(t)$的自相关函数定义为其二阶混合原点矩

$$R_X(t_1,t_2)=E[X(t_1)X(t_2)]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_1x_2f_X(x_1,x_2,t_1,t_2)dx_1dx_2 \tag{1.2.4}$$

其中 $X(t_1)$和 $X(t_2)$是随机过程 $X(t)$在参数为 t_1、t_2 时的状态,$f_X(x_1,x_2;t_1,t_2)$是其相应的二维概率密度。随机过程的自相关函数一般是参数 t_1、t_2 的函数。

随机过程的自相关函数可以为正、零或负值。自相关函数绝对值越大,表示随机过程的相关性越强。一般 t_1 和 t_2 相隔越远,其相关性越弱,自相关函数的绝对值就越小。当 $t_1=t_2=t$ 时,其相关性应是最强的,自相关函数 $R_X(t,t)$就有最大值

$$R_X(t,t)=E[X^2(t)]=D[X(t)]+E^2[X(t)] \tag{1.2.5}$$

定义 1.6:随机过程 $X(t)$的自协方差函数定义为其二阶混合中心矩

$$K_X(t_1,t_2)=E\{[X(t_1)-m_X(t_1)][X(t_2)-m_X(t_2)]\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[X(t_1)-m_X(t_1)][X(t_2)-m_X(t_2)]f_X(x_1,x_2,t_1,t_2)dx_1dx_2 \quad (1.2.6)$$

自协方差函数与自相关函数的关系为

$$K_X(t_1,t_2) = R_X(t_1,t_2) - E[X(t_1)]E[X(t_2)] \quad (1.2.7)$$

可见随机过程的自协方差函数与自相关函数所描述的特性是一致的。

当 $t_1=t_2=t$ 时，显然有

$$K_X(t,t) = E\{[X(t)-m_X(t)]^2\} = D[X(t)] \quad (1.2.8)$$

若随机过程的状态是离散的，则其数字特征可直接应用概率进行统计更为方便。设随机过程 $X(t)$ 共有 N 个离散状态，在任意时刻 t，其相应的状态为 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_N(t)$，而取这些状态的概率分布列为 $p_1(t),p_2(t),\cdots,p_N(t)$，则离散型随机过程的数字特征为

$$E[X(t)] = \sum_{i=1}^{N}x_i(t)p_i(t) \quad (1.2.9)$$

$$D[X(t)] = \sum_{i=1}^{N}[x_i(t)-m_X(t)]^2p_i(t) \quad (1.2.10)$$

$$R_X(t_1,t_2) = \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}x_i(t_1)x_j(t_2)p_{ij}(t_1,t_2) \quad (1.2.11)$$

$$K_X(t_1,t_2) = \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}[x_i(t_1)-m_X(t_1)][x_j(t_2)-m_X(t_2)]p_{ij}(t_1,t_2) \quad (1.2.12)$$

其中 $p_{ij}(t_1,t_2)$ 为 $t=t_1$ 时出现 x_i，$t=t_2$ 时出现 x_j 的联合概率。

对于随机过程统计特性的研究，一般有两条常见的途径：一条途径侧重于研究随机过程的概率结构，如研究某时刻过程所取状态与以前另一些时刻的状态的联合分布函数或联合概率密度，或研究某时刻状态的概率分布与前一些时刻状态的概率分布之间的关系；另一条途径则侧重于对随机过程统计平均性质的研究，如研究随机过程的数学期望和相关函数等。前一条研究途径主要用于对马尔可夫过程的研究，后一条研究途径主要用于对二阶矩过程、平稳过程等的研究。

§1.3 随机过程的特征函数与母函数

随机过程的特征函数是与其概率密度相对应的统计描述方法，而母函数是与状态离散随机过程的概率相对应的变换方法。

§1.3.1 特征函数

定义 1.7：随机过程 $X(t)$ 的一维特征函数为

$$C_X(w,t) = E[e^{jwX(t)}] = \int_{-\infty}^{\infty}e^{jwx}f_X(x,t)dx \quad (1.3.1)$$

从定义可以看出，特征函数与概率密度之间是傅立叶变换对的关系，即

$$f_X(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-jwx}C_X(w,t)dw \quad (1.3.2)$$

将一维特征函数对 w 求 n 阶偏导数

$$\frac{\partial^n C_X(w,t)}{\partial w^n} = \int_{-\infty}^{\infty} j^n x^n e^{jwx} f_X(x,t)dx \tag{1.3.3}$$

可得 $X(t)$ 的 n 阶原点矩为

$$E[X^n(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_X(x,t)dx = (-j)^n \left.\frac{\partial^n C_X(w,t)}{\partial w^n}\right|_{w=0} \tag{1.3.4}$$

如果 $X(t)$ 是状态离散的随机过程，其特征函数为

$$C_X(w,t) = E[e^{jwX(t)}] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jwx_k} p_k \tag{1.3.5}$$

其中 $p_k = P\{X(t)=x_k\}$。

定义 1.8:随机过程 $X(t)$ 的二维特征函数为

$$C_X(w_1,w_2;t_1,t_2) = E[e^{jw_1X(t_1)+jw_2X(t_2)}] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{jw_1x_1+jw_2x_2} f_X(x_1,x_2;t_1,t_2)dx_1dx_2 \tag{1.3.6}$$

其逆公式为

$$f_X(x_1,x_2;t_1,t_2) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-jw_1x_1-jw_2x_2} C_X(w_1,w_2;t_1,t_2)dw_1dw_2 \tag{1.3.7}$$

随机过程 $X(t)$ 的二阶原点矩函数也可由其二维特征函数表示。将二阶特征函数对 w_1 和 w_2 求偏导数

$$\frac{\partial^2 C_X(w_1,w_2;t_1,t_2)}{\partial w_1 \partial w_2} = -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1x_2 e^{jw_1x_1+jw_2x_2} f_X(x_1,x_2;t_1,t_2)dx_1dx_2 \tag{1.3.8}$$

可得 $X(t)$ 的自相关函数为

$$R_X(t_1,t_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1x_2 f_X(x_1,x_2;t_1,t_2)dx_1dx_2 = -\left.\frac{\partial^2 C_X(w_1,w_2;t_1,t_2)}{\partial w_1 \partial w_2}\right|_{w_1=w_2=0} \tag{1.3.9}$$

如果 $X(t)$ 是状态离散的随机过程，则其二维特征函数为

$$C_X(w_1,w_2;t_1,t_2) = E[e^{jw_1X(t_1)+jw_2X(t_2)}] = \sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{i=-\infty}^{\infty} e^{jw_1x_i+jw_2x_j} p_{ij} \tag{1.3.10}$$

其中 $p_{ij} = P\{X(t_1)=x_i, X(t_2)=x_j\}$。

从上述结论可以看出，用特征函数求随机过程的矩函数时，只需对特征函数作微分运算，而微分运算往往比积分运算简单得多。对于随机过程的多维特征函数，可依此类推。

§1.3.2 母函数

在离散型随机过程中，状态为非负整数值的随机过程（即其取值为 0,1,2,…）占有重要的地位。如二项分布、几何分布、泊松分布等的随机过程都取非负整数值。在分析和研究这类非负整值随机过程时，可采用母函数法。

定义 1.9:若随机过程 $X(t)$ 取非负整数值，其相应的概率分布为

$$p_k = P[X(t) = k](k = 0,1,2,\cdots) \tag{1.3.11}$$

定义与概率分布相对应的实变数 s 的实函数

$$G_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k \tag{1.3.12}$$

为随机过程 $X(t)$ 的母函数。

由式(1.3.12)显然有：$G_X(s)=E[s^k]$，事实上，如设 $s=e^{j\omega}$，则有

$$G_X(s) = G_X(e^{j\omega}) = E[e^{j\omega X(t)}] = E[e^{j\omega k}] = \sum_{k=0}^{\infty} p_k e^{j\omega k} = C_X(w) \tag{1.3.13}$$

即随机过程的母函数本质上就是特征函数。

根据全概率公式有 $\sum_{k=0}^{\infty} p_k=1$，从母函数定义可知，幂级数 $G_X(s)$ 至少在 $|s|\leqslant 1$ 时一致收敛且绝对收敛。因此母函数对任何非负整值随机过程都存在，并且在 $[-1,+1]$ 上是一致连续的。

定理 1.1：设随机过程 $X(t)$ 的母函数为 $G_X(s)$，则 $X(t)$ 的概率分布为

$$p_k = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{ds^k} G_X(s)\right]_{s=0} \tag{1.3.14}$$

证明：对 $G_X(s)$ 用幂级数展开，并逐项对 s 求导，可得

$$\frac{d^k}{ds^k} G_X(s) = k!p_k + \sum_{m=k+1}^{\infty} m(m-1)\cdots(m-k+1)p_m s^{m-k}$$

令 $s=0$，有

$$\left[\frac{d^k}{ds^k} G_X(s)\right]_{s=0} = k!p_k \text{ 即 } p_k = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{ds^k} G_X(s)\right]_{s=0}$$

定理 1.2：随机过程 $X(t)$ 的母函数 $G_X(s)$ 与其概率分布 p_k 是唯一对应的。

证明：设随机过程 $X(t)$ 的概率分布为 $\{p_k\}$，随机过程 $Y(t)$ 的概率分布为 $\{q_k\}$，它们对应的母函数分别为

$$G_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k; \qquad G_Y(s) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k s^k$$

且 $G_X(s)=G_Y(s)$。因为母函数 $G_X(s)$ 和 $G_Y(s)$ 均为幂级数，且当 $|s|\leqslant 1$ 时该幂级数均是收敛的，对 $G_X(s)$ 和 $G_Y(s)$ 求导 k 次，并令 $s=0$，由定理 1.1 可知

$$k!p_k = G_X^{(k)}(0) = G_Y^{(k)}(0) = k!q_k$$

即 $p_k=q_k(k=0,1,2,\cdots)$。由此可知，随机过程的概率分布和母函数是唯一对应的。

研究非负整值随机过程的概率分布及其性质可转化为对相应母函数的研究。由于母函数是幂级数，具有许多便于处理的性质，因此母函数是研究整值随机过程的有效工具。

定理 1.3：设随机过程 $X(t)$ 的母函数为 $G_X(s)$，则

$$G_X(1) = 1 \tag{1.3.15}$$

$$|G_X(s)| \leqslant G_X(1) = 1 \tag{1.3.16}$$

证明：设 $X(t)$ 的概率分布为 $\{p_k\}$，根据母函数定义有

$$G_X(1) = \left[\sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k\right]_{s=1} = \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$$

由于随机过程 $X(t)$ 的概率分布 $p_k\geqslant 0$，而且根据母函数存在的条件 $|s|\leqslant 1$ 有

$$|G_X(s)| = \sum_{k=0}^{\infty} p_k |s^k| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} p_k = G_X(1) = 1$$

定理 1.4:设随机过程 $X(t)$的母函数为 $G_X(s)$,则 $X(t)$的数学期望与方差为

$$E[X(t)]=\left[\frac{d}{ds}G_X(s)\right]_{s=1} \tag{1.3.17}$$

$$D[X(t)]=\left[\frac{d^2}{ds^2}G_X(s)\right]_{s=1}+\left[\frac{d}{ds}G_X(s)\right]_{s=1}-\left\{\left[\frac{d}{ds}G_X(s)\right]_{s=1}\right\}^2 \tag{1.3.18}$$

证明:将母函数 $G_X(s)$对 s 求导数,可得

$$\frac{d}{ds}G_X(s)=\sum_{k=1}^{\infty}kp_ks^{k-1},\frac{d^2}{ds^2}G_X(s)=\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)p_ks^{k-2}$$

上述两个级数至少在$|s|<1$ 是收敛的。

当随机过程 $X(t)$的数学期望 $E[X(t)]=\sum_{k=1}^{\infty}kp_k$ 存在时,显然有

$$\left[\frac{d}{ds}G_X(s)\right]_{s=1}=\sum_{k=1}^{\infty}kp_k=E[X(t)]$$

若随机过程 $X(t)$不存在数学期望,即 $\sum_{k=1}^{\infty}kp_k=\infty$,则$\lim\limits_{s\to1}\frac{d}{ds}G_X(s)=\infty$

同理,当随机过程 $X(t)$的方差存在时,因为

$$E\{X(t)[X(t)-1]\}=\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)p_k=\left[\frac{d^2}{ds^2}G_X(s)\right]_{s=1}$$

因此

$$\begin{aligned}D[X(t)]&=E[X^2(t)]-\{E[X(t)]\}^2\\&=\left[\frac{d^2}{ds^2}G_X(s)\right]_{s=1}+\left[\frac{d}{ds}G_X(s)\right]_{s=1}-\left\{\left[\frac{d}{ds}G_X(s)\right]_{s=1}\right\}^2\end{aligned}$$

定理 1.5:两个相互统计独立的非负整值随机过程之和的母函数是这两个随机过程相应母函数的乘积。

证明:设 $X(t)$和 $Y(t)$为两个相互统计独立的随机过程,其概率分布分别为$\{p_k\}$和$\{q_k\}$,相应的母函数分别为 $G_X(s)$及 $G_Y(s)$。

设随机过程 $Z(t)=X(t)+Y(t)$,显然 $Z(t)$也是状态为非负整值的随机过程,记 $Z(t)$的概率分布为 $r_j=P\{Z(t)=j\}$,则

$$r_j=p_0q_j+p_1q_{j-1}+\cdots+p_jq_0=\sum_{k=0}^{j}p_kq_{j-k}$$

上式就是离散卷积和公式。随机过程 $Z(t)$的母函数为 $G_Z(s)=\sum_{j=0}^{\infty}r_js^j$,利用母函数在$|s|<1$ 的一致收敛性和绝对收敛性得

$$G_X(s)G_Y(s)=\left(\sum_{k=0}^{\infty}p_ks^k\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty}q_is^i\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty}p_kq_is^{k+i}$$

令 $j=k+i$,则有

$$G_X(s)G_Y(s)=\sum_{j=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{j}p_kq_{j-k}\right]s^j=\sum_{j=0}^{\infty}r_js^j=G_Z(s) \tag{1.3.19}$$

定理 1.5 的结果可以推广到 n 个相互统计独立的随机过程的求和问题中。若非负整值随机过程 $X_1(t),X_2(t),\cdots,X_n(t)$是相互统计独立的,它们的母函数分别为 $G_1(s),G_2$

$(s),\cdots,G_n(s)$，则随机过程 $Y(t)=X_1(t)+X_2(t)+\cdots+X_n(t)$ 的母函数为

$$G_Y(s) = G_1(s)G_2(s)\cdots G_n(s) \tag{1.3.20}$$

特别是当 $X_i(t)(i=1,2,\cdots,n)$ 是独立同分布的非负整值随机过程时，每个随机过程的母函数是相同的，即 $G_i(s)=G_1(s)$，则 $Y(t)=X_1(t)+X_2(t)+\cdots+X_n(t)$ 的母函数为

$$G_Y(s) = [G_1(s)]^n \tag{1.3.21}$$

定理 1.6：设 $Y(t)=X_1(t)+X_2(t)+\cdots+X_V(t)$，其中 $X_1(t),X_2(t),\cdots,X_n(t),\cdots$ 是一串相互独立且具有同概率分布的非负整值随机过程，其母函数为 $G_X(s)$，V 是正整数的随机变量，其母函数为 $G_V(s)$，且 V 和 $\{X_i(t)\}$ 是相互统计独立的，则 $Y(t)$ 的母函数为

$$G_Y(s) = G_V[G_X(s)] \tag{1.3.22}$$

证明：设 $Y(t)$ 的概率分布为 $P\{Y(t)=j\}=r_j$，则

$$\begin{aligned} r_j = P\{Y(t) = j\} &= \sum_{n=1}^{\infty} P\{V = n\}P\{Y(t) = j \mid V = n\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P\{V = n\}P\{X_1(t) + X_2(t) + \cdots + X_V(t) = j \mid V = n\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P\{V = n\}P\{X_1(t) + X_2(t) + \cdots + X_n(t) = j\} \end{aligned} \tag{1.3.23}$$

由于 $X_1(t),X_2(t),\cdots,X_n(t)$ 是相互统计独立且同分布的，由式(1.3.21)得

$$\sum_{j=0}^{\infty} P\{X_1(t) + X_2(t) + \cdots + X_n(t) = j\}s^j = [G_X(s)]^n \tag{1.3.24}$$

而随机过程 $Y(t)$ 的母函数为 $G_Y(s) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} r_j s^j$，于是

$$\begin{aligned} G_Y(s) &= \sum_{j=0}^{\infty}\Big[\sum_{n=1}^{\infty} P\{V = n\}P\{X_1(t) + X_2(t) + \cdots + X_n(t) = j\}\Big]s^j \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P\{V = n\}\Big[\sum_{j=0}^{\infty} P\{X_1(t) + X_2(t) + \cdots + X_n(t) = j\}s^j\Big] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P\{V = n\}[G_X(s)]^n = G_V[G_X(s)] \end{aligned}$$

即随机个相互统计独立同分布随机过程之和的母函数是原来两个母函数的复合。

定理 1.7：设 $Y(t)=X_1(t)+X_2(t)+\cdots+X_V(t)$，其中 $X_1(t),X_2(t),\cdots,X_n(t),\cdots$ 是一串相互独立且具有同分布的非负整值随机过程，其母函数为 $G_X(s)$，V 是正整数的随机变量，其母函数为 $G_V(s)$，且 V 和 $\{X_i(t)\}$ 是相互统计独立的，则 $Y(t)$ 的数学期望和方差分别为

$$E[Y(t)] = E[V]E[X_i(t)] \tag{1.3.25}$$

$$D[Y(t)] = E^2[X_i(t)]D[V] + E[V]D[X_i(t)] \tag{1.3.26}$$

证明：根据定理 1.6，利用复合函数求导法则有

$$\frac{d}{ds}G_Y(s) = \frac{d}{ds}\{G_V[G_X(s)]\} = \frac{d}{ds}G_V[G_X(s)]\frac{d}{ds}G_X(s)$$

根据式(1.3.17)，当 $E[X_i(t)]$ 和 $E[V]$ 存在时，在上式中令 $s=1$，则

$$E[Y(t)]=\left[\frac{d}{ds}G_Y(s)\right]_{s=1}=\left[\frac{d}{ds}G_V(s)\right]_{s=1}\left[\frac{d}{ds}G_X(s)\right]_{s=1}=E[V]E[X_i(t)]$$

同样有

$$\frac{d^2}{ds^2}G_Y(s)=\frac{d^2}{ds^2}G_V[G_X(s)]\left[\frac{d}{ds}G_X(s)\right]^2+\frac{d}{ds}G_V[G_X(s)]\frac{d^2}{ds^2}G_X(s)$$

$$\left[\frac{d^2}{ds^2}G_Y(s)\right]_{s=1}=\left\{\frac{d^2}{ds^2}G_V(s)\right\}_{s=1}\left\{\left[\frac{d}{ds}G_X(s)\right]_{s=1}\right\}^2+\left\{\frac{d}{ds}G_V(s)\right\}_{s=1}\left\{\frac{d^2}{ds^2}G_X(s)\right\}_{s=1}$$

根据式(1.3.18)，随机过程 $Y(t)$ 的方差为

$$\begin{aligned}D[Y(t)]&=E[Y^2(t)]-E^2[Y(t)]\\&=\left\{\frac{d^2}{ds^2}G_Y(s)\right\}_{s=1}+\left\{\frac{d}{ds}G_Y(s)\right\}_{s=1}-\left\{\left[\frac{d}{ds}G_Y(s)\right]_{s=1}\right\}^2\\&=\left\{\frac{d^2}{ds^2}G_V(s)\right\}_{s=1}\left\{\left[\frac{d}{ds}G_X(s)\right]_{s=1}\right\}^2+\left\{\frac{d}{ds}G_V(s)\right\}_{s=1}\left\{\frac{d^2}{ds^2}G_X(s)\right\}_{s=1}\\&\quad+\left\{\frac{d}{ds}G_V(s)\right\}_{s=1}\left\{\frac{d}{ds}G_X(s)\right\}_{s=1}-\left\{\left[\frac{d}{ds}G_V(s)\right]_{s=1}\right\}^2\left\{\left[\frac{d}{ds}G_X(s)\right]_{s=1}\right\}^2\end{aligned}$$

经过整理，得到

$$D[Y(t)]=E^2[X_i(t)]D[V]+E[V]D[X_i(t)]$$

定理 1.8：设随机过程 $X(t)$ 的母函数为 $G_X(s)$，则 $X(t)$ 的线性函数 $Y(t)=aX(t)+b$ 的母函数为

$$G_Y(s)=s^bG_X(s^a) \tag{1.3.27}$$

其中 a,b 为非负常数。

证明：根据母函数定义有

$$G_Y(s)=\sum_{k=0}^{\infty}P[Y(t)=k]s^k=\sum_{k=0}^{\infty}P[aX(t)+b=k]s^k=\sum_{k=0}^{\infty}P\left[X(t)=\frac{k-b}{a}\right]s^k$$

令 $(k-b)/a=j$，则

$$G_Y(s)=\sum_{j=-b/a}^{\infty}P[X(t)=j]s^{aj+b}$$

由于常数 a,b 和随机过程 $X(t)$ 的状态为非负的，即

$$G_Y(s)=\sum_{j=0}^{\infty}p[X(t)=j]s^{aj+b}=s^b\sum_{j=0}^{\infty}P[X(t)=j](s^a)^j=s^bG_X(s^a)$$

定义 1.10：设 $\{X_1(t),X_2(t)\}$ 为二维非负整值随机过程，其二维联合概率分布为

$$p_{ij}=P\{X_1(t)=i,X_2(t)=j\}\quad(i,j=0,1,2,\cdots)$$

定义二维随机过程 $\{X_1(t),X_2(t)\}$ 的母函数为

$$G_{1,2}(s_1,s_2)=E[s_1^is_2^j]=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}p_{ij}s_1^is_2^j \tag{1.3.28}$$

上式中，$|s_1|\leqslant1$，$|s_2|\leqslant1$。$G_{1,2}(s_1,s_2)$ 有时也称为双变数母函数。

定理 1.9：设 $\{X_1(t),X_2(t)\}$ 为二维非负整值随机过程，对于任意 $|s_1|\leqslant1$，$|s_2|\leqslant1$，则

$$|G_{1,2}(s_1,s_2)|\leqslant G_{1,2}(1,1)=1 \tag{1.3.29}$$

证明：根据双变数母函数定义有