

И. И. 別茹霍夫 著

杜庆华 龐家駒

解伯民 譯

黃克智 張福范

彈性与塑性理論

人 民 教 育 出 版 社

弹性与塑性理論

И. И. 別茹霍夫著

杜庆华 龐家駒 解伯民譯
黃克智 張福范

人 民 教 育 出 版 社

本书系根据苏联国立技术理論书籍出版社 (Государственное издательство технико-теоретической литературы) 出版的別茹霍夫(Н. И. Безухов) 著“彈性与塑性理論”(Теория упругости и пластичности) 1953 年初版譯出。原书經苏联高等教育部审定为高等工业学校教科书。

本书系根据苏联現行彈性与塑性理論教学大綱編写而成的适于作为高等学校土建、机械、水利等各专业彈性与塑性理論課程的教学用书。全书内容共分十一章,首三章述彈性理論的基本問題,以后数章討論彈性理論的几个实际問題,包括平板的弯曲問題等。最后四章为塑性理論,它的首一章是塑性理論的基本方程。后三章則討論实例。

本书由清华大学材料力学教研組教师黄克智(第一章)、張福范(第二、三、五、六、七章)、龐家駒(第四章)、杜庆华(第八、九、十章)和解伯民(第十一章)翻譯。

彈 性 与 塑 性 理 論

Н. И. 別茹霍夫著

杜庆华, 龐家駒, 黄克智, 張福范, 解伯民譯

北京市书刊出版业营业許可証出字第2号

人民教育出版社出版(北京景山东街)

人 民 教 育 印 刷 厂 印 装

新华书店北京发行所发行

各 地 新 华 书 店 經 售

統一书号 K15010·248 开本 $850 \times 1168 \frac{1}{32}$ 印张 $13 \frac{4}{16}$

字数 364,000 印数 12,501—13,700 定价(7) ¥1.50

1956 年 12 月第 1 版 1964 年 9 月北京第 6 次印刷

目 录

序	9
第一章 緒論	13
§ 1. 彈性理論及其相鄰的科學	13
§ 2. 古典彈性理論的基本假設與基本理論	22
§ 3. 关于平衡力系的效应的局部性原理的評述	30
§ 4. 应力分量的标号 应力張量	36
§ 5. 位移分量及旋量分量的标号	42
§ 6. 变形分量的标号 变形張量	44
§ 7. 变形分解为“純体积变形”及“形狀变形”	49
§ 8. 位移, 应力及变形速度分量的标号	52
§ 9. 应力分量的其他标号 变形及其导数	53
§ 10. 彈性及塑性理論中問題的提出	55
§ 11. 再論材料力学的方法 彈性理論的方法	58
§ 12. 十九世紀及二十世紀初叶彈性理論發展的基本阶段	66
第二章 連續体的一般的力学方程	71
A. 应力状态的理論(靜力学方程)	71
§ 13. 在一已知点附近的諸应力分量的标号	71
§ 14. 平衡及运动微分方程(靜力学研究)	74
§ 15. 边界条件(靜力学研究的繼續)	78
§ 16. 物体內一点的应力状态的研究 主应力	81
§ 17. 应力張量的不变量	85
§ 18. 正八面体的应力	87
§ 19. 最大剪应力	91
§ 20. 关于应力理論的几点結論	93
B. 变形的几何理論(几何方程)	95
§ 21. 在一点附近的位移分量的标号	95
§ 22. 变形分量与位移分量間的微分关系(几何方程)	97
§ 23. 变形一致方程	101
§ 24. 在一点附近的变形的研究	105
§ 25. 根据非綫性彈性理論对于方程(2.25)的准确性的估价	109
第三章 彈性理論的基本方程	111

A. 应力与变形分量间的联系(彈性理論的物性方程).....	111
§ 26. 彈性定律	111
§ 27. 广义彈性定律的各种写法	114
§ 28. 續前: 体积改变定律及形狀改变定律	117
§ 29. 單位体积的位能	120
B. 方程的綜合	124
§ 30. 彈性理論的基本方程及其可能的解法	124
§ 31. 由位移解彈性理論問題	128
§ 32. 由应力解彈性理論問題	130
B. 特殊情形——平面問題	132
§ 33. 平面应力状态	132
§ 34. 再簡化	133
§ 35. 平面变形	134
§ 36. 对于平面問題的应力函数	136
§ 37. 極坐标的平面問題	139
§ 38. 軸对称的应力分布	141
§ 39. 在苏維埃时代彈性理論的平面問題理論的發展	142
Γ. 其他的特殊情形——軸对称应力分布的旋轉体	144
§ 40. 基本方程	144
§ 41. 由位移解此問題	147
§ 42. 由应力解題	148
§ 43. 对于軸对称变形的应力函数	149
§ 44. 关于彈性理論空間問題的应力函数的历史摘要	150
第四章 最簡單的彈性理論問題	153
§ 45. 純弯曲与純扭轉問題	153
§ 46. 用边界条件凑合法解題的例(均布荷重下悬臂梁的弯曲)	156
§ 47. 独立練習的例	163
§ 48. 用反逆法解題的例	170
§ 49. 独立練習运用应力函数的例	171
§ 50. 解悬臂梁弯曲問題的其他方法	173
§ 51. 以三角級数作为应力函数	176
§ 52. 梁-壁在几种特殊荷重情形下主要的分析結果	178
§ 53. 解極坐标問題的例 果劳文的問題	183
§ 54. 加多林与加辽金的問題	187
§ 55. 独立練習的例	190
§ 56. 独立練習运用应力函数的例(用極坐标)	190
§ 57. 厚壁球形容器的極对称变形	199
第五章 彈性理論的古典問題(彈性半平面, 彈性半空間).....	203

§ 58. 力作用于楔的頂端	203
§ 59. 作用于半無限板的直边上的一点的集中力	205
§ 60. 由于集中力作用的半無限板的变形	208
§ 61. 在特殊形式的荷重作用下半無限板的直边的撓度	209
§ 62. 圆孔(减弱)对于拉伸板的应力分布的影响	212
§ 63. 作用于半無限体的边界平面上的集中力	215
§ 64. 彈性半空間荷重的特殊情形	220
§ 65. 絕對剛硬的球对于彈性半空間所施的压力	225
§ 66. 两个互相接触的球形体之間的压力(球之間的彈性挤压)	227
第六章 續 (彈性扭轉問題, 彈性理論中的变分法)	231
§ 67. 非圆截面的扭轉 聖維那問題	231
§ 68. 橢圆截面的扭轉	236
§ 69. 在扭轉时橢圆截面的翹曲	237
§ 70. 狹長矩形截面的扭轉	238
§ 71. 狹長矩形截面及开口薄壁截面在扭轉时的翹曲	240
§ 72. 薄壁閉口截面的扭轉	242
§ 73. 約束扭轉的概念	245
§ 74. 分解应力張量場为基本的与修正的(巴普考維奇方法)	249
§ 75. 当荷重作用在边界上时彈性正六面体的应力状态	252
§ 76. 动力彈性理論情况的摘要	259
第七章 应用彈性理論的几个問題	261
§ 77. 在应用彈性及塑性理論中解题的一般特点	261
§ 78. 平板的弯曲 基本的定义和假設	263
§ 79. 板的彈性曲面微分方程的推演	266
§ 80. 平板弯曲的解题步驟 支座的边界条件	271
§ 81. 例——边界固定的橢圆形板	273
§ 82. 例——簡支的矩形板	275
§ 83. 应力及边界条件的其他写法(將平行于中間面的应力化作靜力相当的弯矩及 扭矩)	280
§ 84. 矩形板的通解	283
§ 85. 关于其他的解的摘要	285
§ 86. 圓板	285
§ 87. 橫向荷重及在板中間面內的力共同作用下板的弯曲	287
§ 88. 四边为鉸支并在一个方向受压的矩形板的穩定	292
§ 89. 两个方向受压的矩形板	293
§ 90. 平板理論的發展簡史	294
§ 91. 橢圓截面杆的約束扭轉	296
§ 92. 細長的薄壁杆件的組合抗力	299

§ 93. 續: 扭轉中心的坐標的決定	303
§ 94. 符拉索夫的約束扭轉理論的基本結果	304
§ 95. 薄壁杆的約束扭轉問題與縱橫彎曲杆的相似性	308
§ 96. 關於薄壁杆件理論的現狀	309
第八章 塑性理論的基本方程	311
§ 97. 主動及被動應變 非綫性彈性物體及塑性物體	311
§ 98. 超出彈性極限在主動應變時的應力與應變分量的關係	313
§ 99. 廣義應力與廣義應變間關係的各種表示法	317
§ 100. 一般變形定律的其他証述	320
§ 101. 依留辛關於簡單加載的理論	322
§ 102. 卸載理論	323
§ 103. 彈性-塑性變形規律彙集	324
§ 104. 特例——理想塑性物體	326
§ 105. 固體彈性-塑性變形力學的基本方程	328
§ 106. 特例——平面問題 理想塑性材料	330
§ 107. 關於在非綫性彈性理論和塑性理論中建立應力應變關係的注釋	332
第九章 塑性理論的最簡單問題	334
§ 108. 純彎曲	334
§ 109. 純扭轉	337
§ 110. 厚壁管的軸對稱彈性-塑性狀態	339
§ 111. 補充: 材料強化的計算	342
§ 112. 等速旋轉圓盤的軸對稱塑性變形	346
§ 113. 球形容器的極對稱彈性-塑性狀態	348
§ 114. 半反逆法解決問題的舉例	350
§ 115. 蘇聯的塑性理論概況	353
第十章 應用塑性理論若干問題解答的主要結果	361
§ 116. 本章之一般說明 截面承載能力 系統的承載能力	361
§ 117. 圓柱杆受拉及扭的承載能力	364
§ 118. 狹長矩形截面的承載能力	367
§ 119. 非圓截面自由扭轉的塑性狀態	369
§ 120. 圓板的軸對稱彈性-塑性彎曲 索柯洛甫斯基問題	372
§ 121. 薄壁杆件超過彈性極限的彎曲及扭轉(約束)	374
§ 122. 剛性模壓器對塑性介質的壓入力	378
§ 123. 松散介質極限平衡的條件 索柯洛甫斯基問題	379
§ 124. 對塑性流理論的一些說明	383
§ 125. 關於動力塑性理論萌芽的歷史	386
第十一節 彈性理論、結構力學、塑性理論和物體流變學的間關係	387

§ 126. 一般概念.....	387
§ 127. 彈性理論和結構力学的綜合方法 符拉索夫、費洛宁柯-鮑罗第契等的問題	388
§ 128. 塑性理論和結構力学的綜合方法 格沃茲捷夫等的問題.....	399
§ 129. 彈性力学和塑性力学的綜合方法(依留辛).....	403
§ 130. 随時間的变形过程(关于物体流变学方程的概念).....	407
§ 131. 結束語	412
参考書刊	414

序

在蘇維埃社會條件下，變形體力學的發展與其他科學一樣，是與實踐密切聯系的。這種情況使彈性理論、塑性理論及結構力學達到了高度的成就。從蘇聯規模宏大的建設事業的實踐中，變形體力學的這些部門獲得了發展的泉源，並把它的成就用於實踐，同時又在實踐中能驗證其新發現的正確性。

在這個意義之下，對於變形體力學來說，社會主義建設的實踐始終是個巨大的實驗室。

在豐富的科學著作與教學用書中反映了近年來的科學成就，在原則性上，在分析的深度上以及在各種不同建設部門中對於科學的廣泛運用上，這些著作都是傑出的。

為了了解在變形體力學的各個方面蘇維埃科學的豐富思想及實際意義，只須指出在這幾個方面榮獲斯大林獎金的傑出的研究工作以及許多其他的研究工作就夠了。這就是下列科學家的工作：在彈性理論問題方面有伽辽金院士，穆斯海里院什維里院士，列賓仲院士，蘇聯科學院通訊院士巴普考維奇教授；在塑性理論方面有蘇聯科學院通訊院士依留辛教授，蘇聯科學院通訊院士索柯洛甫斯基教授，烏茲別克蘇維埃社會主義共和國科學院院士拉赫馬都林教授；在彈性理論的專門問題方面有符拉索夫教授，列赫尼茨基教授。

功勳科學家及工程學者們的優秀教本和專門著作，在介紹學生及工程師們熟悉彈性理論在過去和今後都有着重大的意義，例如費羅寧柯-鮑羅第契教授，烏克蘭蘇維埃社會主義共和國科學院院士塞林生教授，蘇聯建築科學院院士熱莫契金教授，魯利耶教授，烏克蘭蘇維埃社會主義共和國科學院通訊院士什塔耶爾曼教授的著作；在彈性及塑性理

論的非綫性問題方面有諾沃瑞洛夫教授、卡恰諾夫教授等的專門著作。

以上所列举的及其他許多學者的著作^① 丰富了蘇維埃的變形體力學。從這些著作中，讀者可以找到自己在實際工程業務中所遇到許多問題的詳盡解答。

本書所討論的是比較簡單的問題。本書乃是一本根據蘇聯高等教育部批准的高等工業學校中現行教學時數為 50—70 小時的“彈性及塑性理論”課程教學大綱而編寫的教材。

彈性及塑性理論是高等工業學校高年級學生所學習的一門課程，這門課程對他們來說，在某種意義上是一般涉及各種工程結構的強度與變形計算的一系列技術課程（材料力學，結構力學，機械零件）的完成階段。

很自然地，在學習彈性理論時高等工業學校的學生通常不僅對這門科學的方法與原理感覺很有興趣，而且對於根據彈性理論的嚴格解答來評價他們從材料力學課程中所早已得知的那些結果也感到興味；那些在初等理論中所不能提出的問題的新結果也使他們發生興趣；他們關心到彈性理論與他們所早已熟習的相鄰的課（結構力學等）之間有效地合作的可能性，最後，他們注意到變形體力學成就的正確的方向，這些成就超出了教學大綱的範圍（可能也超出他們現時的數學修養的範圍），但是這些問題他們將來可能會碰見；此時需要介紹給他們書刊目錄，或指出從什麼地方可以找所有關的圖書簡介。

上述的問題同樣也是對那些在學生時代沒有學過彈性理論課程的工程師們所感覺興趣的（在很多高等工業學校的教學計劃中，一直到最近，彈性理論都列為選修課或完全不列）。

一般說來，上述讀者對彈性理論及塑性理論的要求是很高的，並且這個要求遠遠超過現時教學計劃所給予的時數。同時又應該以最簡單

① 這些著作的詳細目錄列在本書末。

及最易了解的形式来闡明彈性及塑性理論的基础，而不为复杂的数学計算所累。

要以一本篇幅不多的書来满足所有上面列举的要求当然是不可能的。但若这样一本书能够培养讀者独立地研讀彈性及塑性理論方面的巨著和專門的研究作品，而書中又不涉及那些远远超出这一簡短課程的教学大綱范围之外的内容，那末这就在相当大的程度上使满足这些要求的任务易于完成。这个教学法的基本思想也是著者在選擇本書材料时所遵循的。

为了开扩讀者的眼界(但也不使讀者苦于追循所有的結論)，在这本教材中亦叙述了某些專題解答的主要結果，并对作者們的方法、思想所采用的解法作一簡短的評述；这些都是近年来在苏联所得到的一系列有价值的解答。

同样为了开扩讀者的眼界，在本書中也作了关于彈性及塑性理論各个問題的現况的簡述，当然这些簡述是不能求其完备的。

在本書中标题为“独立練習例題”的各节，可作为学生在彈性理論方面習題課(在教室中)或課外作業的題目。

本書采用了讀者在材料力学及結構力学課程中所已熟知的一些符号；它們是与标准符号相符合的。同时也采用了在彈性理論中其他写法更簡潔的符号，以与讀者所熟習的符号相对照。

用小号字排印的材料，在初讀时或在極為精簡的課程中可以省去，这并不損害其余材料叙述的連貫性。

課文中引用書末所列参考書刊时，都用方括弧中的號碼标出引語的出处。

本書在准备付印时，著者系利用其前著“彈性及塑性理論概論”(建筑書籍出版社，1950年)一書，作了重大的修改，并补充了很多新材料。由于編写本書的目的与前著不同，著者便給了另一个書名。

著者謹对果尔琴勃拉特，扎符利耶夫，索柯洛甫斯基，費洛宁柯-鮑

罗第契及什塔耶尔曼諸位致以深切的謝意，他們曾对本書前一版或本版原稿提出寶貴的意見，著者是考虑了这些意見的。

著者

第一章 緒論

§ 1. 彈性理論及其相隣的科学

彈性理論是現代可變形固體力學的一分支，而可變形固體力學又是最廣義上來了解的力學部門之一，更是古典力學部門之一。

我們通常把古典理論力學理解作一門解析科學，這門科學研究物質運動的一種最簡單形態——質點、質點系、剛體以及理想液體與氣體的機械運動，但不超出古典的概念和抽象的範圍。

當然，古典力學的抽象和概念（質點，剛體，理想液體與氣體）不是人類思想的形式上的發明。在這些抽象創立的時期（十七世紀末及十八世紀初），它們是以一定的形式——這種形式能滿足當時實際問題的需要——反映了真實物體最簡單、最初步的性質。即使在現時，對於很多的問題，這些抽象仍完全保留着它的意義。

“從具體的東西上升到抽象的東西，思惟不是離開——如果它是正確的……—真理，而是接近真理。物質底抽象、自然規律底抽象、價值底抽象等等，一句話，一切科學的（正確的、鄭重的、不是胡謔的）抽象，都更深刻、更正確、更完全地反映着自然”（列寧，哲學筆記）^①。

迫於工程實踐及自然科學的需要，並由於在十九世紀和實驗的緊密聯繫，力學的專門部門得到巨大的發展；這些力學的專門部門為了其本身的需要，要求有新的抽象模型，這些模型更接近固體、液體（例如，粘滯性液體的動力學）及氣體的真實性質，因而在為新技術所特有的新的條件下也就更適宜於在理論上概括真實物體運動的客觀規律。

^① 蘇聯國立政治書籍出版社，1947，俄文版，第146頁。見列寧，黑格爾“邏輯學”一書摘要，人民出版社中譯本，1954年版，第134頁。

力学的一切部門的方法論，像所有的科学一样，是建立于列宁所提出的天才原理上：“从生动的直观到抽象的思維，从思維到實踐——这就是認識真理、認識客观实在的辯証法道路”（列宁，哲学筆記）^①。

現代的力学是一些科学課目廣泛的綜合，这些課目中有很多其实是从普通力学中划分出来的。

不仅如此，对于力学的某些新部門，它們的發展是近年来的事实，而且基本上是与苏联学者及工程师的工作分不开的（塑性理論等），以前在狹义的力学与物理学之間的界限就变成是因襲的（即人为地規定或約定的——譯者）了。

这些从古典力学發展出来的知識部門称为“力学課程”，有时称为实用力学或应用力学，我們用这个名称以強調它为一定的实际部門服务的实用性質。

我們来研究与結構物及机械的强度計算有关的实用力学課程的体系，并确定彈性及塑性理論在其中的地位。

а) 物体流变学（реология）物体流变学是一門建立关于在各种热力学条件及物理化学条件下、由于不同原因所引起的任何物体在变形时的構成及發展的一般規律的科学^②（关于物体流变的科学）。

在上面的陈述中，物体是被理解成任意的：它可以是固态的或液态的、彈性的、塑性的、粘性的等等。变形的原因也假設是各种各样的，例如：靜載荷或动載荷，描述外界介質（溫度場）或描述物体本身的参数的变化等等。

工程师也对在不同時間內的变形感到兴趣，例如：随着加载以后或当外界原因全部或部分被除去并經過很長時間以后，無論是在平衡狀

① 苏联国立政治書籍出版社，1947，俄文版第146—147頁。列宁，黑格尔“邏輯学”一書摘要，人民出版社中譯本，1954年版，第134頁。

② 在实物理学中不討論沒有物体变形的位移（例如，作为一絕對剛体从一位置轉移至另一位置等等）。

態或是在運動中等等。

換句話說，物體流變學必須回答下面的問題：當外界作用的參數及外界作用的過去歷史為已知時，在某一瞬間物體中某一點的變形及應力是怎樣的？

就上面列舉的問題的實質上說來，物體流變學是力學中研究較廣義的運動的一個新的部門（參看 § 130）。按上面所指出的普遍的提法來看，這些問題的解答的複雜性對於讀者說來應該是顯然的，如果讀者已經熟悉在材料力學課程中（其中也是研究固體的應力及變形）所敘述的關於結構物現代的“強度”計算。

在這些強度計算中採取了結構物本身的各种理想化了的圖形；此時摒棄了對材料應力或變形有影響的許多因素（對於虎克定律的偏差，徐滯現象，松弛現象等等），並且所有這些計算還時常是很繁重的。由於這個原因，在物體流變學發展的現階段中，似宜對上述在這門科學中的問題的過於普遍的提法作一些讓步，也就是說，把問題縮小些，把所研究的圖象公式化等等。因此，在本來的物體流變學中，如果把力學的這一分枝當作是獨立形成的科學，現時還只得到很少的（雖然是很重要的）結果。現時僅作過這樣的企圖，即建立對於典型物體系統（理想塑性的，理想粘性的，等等）的應力及變形間的單值對應關係，這個關係在這門科學中的重要性，正好像，譬如說，虎克定律在材料力學中一樣。

其實，物體的符合於所給的具體情況的某些抽象化，亦即有意棄去它的次要的屬性而僅保留其基本的屬性，這對工程實踐的目的說來是完全許可的。換句話說，在實際的計算中不可避免地要採用這種或那種假設，如果這些假設一般說來是被試驗所証實的。

不僅如此，正如科學及技術的歷史所指出的，抽象化的方法在上述的意義上是完全必要的，它是科學認識過程的條件之一。

但是這當然並不意味着物體流變學中培養對自然界，對物質的簡單化的觀點。

抽象化的方法必須估計到自然界無限复杂的無窮尽的性質，認識从来不可能絕對完全地窮尽自然界的客体，虽然認識將愈來愈接近它。

“人类的思想从現象到本質，無限地深化，从可以說是第一級的本質到第二級的本質并如此类推，永無穷尽”^①。

在物体流变学中，随着試驗数据及理論研究結果的积累，正也是應該如此。重要的是在于确定对于任何理想化圖形或假設体系的实际应用的限制。

6) **彈性理論** 固体的理想彈性所屬的性質是固体的这种理想化的結果之一。这个性質正是彈性理論——可变形固体力学的一个分支——的基础。

如讀者所已知，理想彈性是指变形物体当引起变形的原因除去以后完全回复其原来形狀的性能。換句話說，外力在其作用点的位移上所費的功是以可逆的形式，也就是說，以儲藏为物体中彈性能的形式被物体所接受，此彈性能在数值上等于外力所作的功。

这样，理想彈性体就体现了关于在隔离系統中能量守恒的热力学第一定律。

由于理想彈性体具有不遺留过去載荷的任何痕迹的性能(“遺忘它从前所經歷的一切”)，这种物体的形狀只与在既定瞬間作用在物体上的那些載荷有关，而与这些載荷如何逐漸“由零值增長”无关，即与在以前各瞬間的載荷情况無關^②。

非常显然，关于理想彈性体的假設在計算中帶來多么大的便利：“承繼性”影响(即：对給定瞬間的变形有影响的，除了此时作的力以外，

① B. И. 列宁，哲学筆記，俄文版第 237 頁，苏联国立政治書籍出版社，1947。

② 如果時間的因素(估計到很長的時間)在物体流变学中是基本的，那么沒有時間因素的存在在古典彈性理論中就是基本的了。在彈性理論中也研究載荷迅速增長的情形，此时物体各部分获得显著的加速度，对这种情形的研究構成彈性理論中的所謂动力問題；在本書中不討論這些問題。