工业和信息化普通高等教育
"十二五"规划教材立项项目

21世纪高等学校规划教材

大学物理实验

赵加强 仲明礼 主编
杜延飞 王劲松 孙晓红 高春 副主编

21st Century University
Planned Textbooks

人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

工业和信息化普通高等教育
“十二五”规划教材立项项目

21世纪高等学校规划教材

大学物理实验

赵加强 仲明礼 主编
杜延飞 王劲松 孙晓红 高春 副主编

21st Century University
Planned Textbooks

人民邮电出版社
北京

图书在版编目（CIP）数据

大学物理实验 / 赵加强，仲明礼主编. -- 北京 ：
人民邮电出版社，2012.1
21世纪高等学校规划教材
ISBN 978-7-115-25439-9

Ⅰ. ①大… Ⅱ. ①赵… ②仲… Ⅲ. ①物理学－实验
－高等学校－教材 Ⅳ. ①04-33

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第122848号

内 容 提 要

本书根据教育部大学物理实验课程教学基本要求，并结合编者多年教学经验编写而成。

本书分为误差和数据处理基本知识、基础实验、综合性实验和设计性实验 4 章，共包含 23 个实验。实验取材合适，内容广泛，并适当配以思考题，有助于学生理解实验中所蕴涵的理论及掌握实验的基本技能。

本书可作为普通高等院校理工类本、专科学生的物理实验教材。

工业和信息化普通高等教育“十二五”规划教材立项项目
21 世纪高等学校规划教材
大学物理实验

◆ 主　　编　赵加强　仲明礼
　副 主 编　杜延飞　王劲松　孙晓红　高　春
　责任编辑　董　楠

◆ 人民邮电出版社出版发行　　北京市崇文区夕照寺街 14 号
　邮编　100061　　电子邮件　315@ptpress.com.cn
　网址　http://www.ptpress.com.cn
　北京隆昌伟业印刷有限公司印刷

◆ 开本：787×1092　1/16
　印张：6.75　　　　2012 年 1 月第 1 版
　字数：173 千字　　2012 年 1 月北京第 1 次印刷

ISBN 978-7-115-25439-9

定价：15.00 元

读者服务热线：(010)67170985　印装质量热线：(010)67129223
反盗版热线：(010)67171154

前 言

本书根据教育部大学物理实验课程教学基本要求，以“加强基础、重视应用、开拓思维、培养能力、提高素质”的思想为指导，结合普通高等院校理工类专业物理实验的现状及编者的教学经验，并参考其他同类教材编写而成。

本书由理论部分和实验部分两部分组成。其中，第 1 章为理论部分，重点叙述误差的成因及处理方法；第 2 章～第 4 章为实验部分，包含基础实验、综合性实验、设计性实验。实验部分取材合适，难度适中，既顾及了传统实验，又考虑了大学物理实验仪器设备正在逐步或已经更新换代的事实。每个实验还配以思考题，有利于学生对实验所包含的实验原理或物理概念有更深刻的理解。

本书可作为普通高等院校理工类本、专科各专业学生的物理实验教材。

由于作者水平有限，书中难免存在疏漏之处，敬请读者批评指正。

编　者

2011 年 4 月

目 录

第 1 章 误差和数据处理基本知识

进行物理实验时，对物理量的测量是至关重要的，然而由于实验方法、测量条件等因素的限制，测量结果不可能和真值一致，所以需要对测量结果的可靠性作出一个评价，对其误差的范围作出一个估计，并能正确地表达实验结果。

本章主要介绍误差的基本概念，实验数据处理，以及实验结果表达等方面的一些基本知识。这些知识不仅在每个实验中都要用到，也是今后从事科学实验工作所必须了解和掌握的。

1.1 误差及其测量

1.1.1 测量

进行物理实验时，不仅要定性地观察各种变化的过程，而且还要测定相关的数值，找出它们之间的关系，因此就需要进行定量的测量。为了使测量结果更加有普遍意义，在物理实验中，物理单位大多采用“国际单位制”，即通常所说的“米·千克·秒”制。国际单位制可以用符号“SI”表示。

测量就是**借助仪器用某一计量单位通过某种手段将待测量的大小表示出来并加以比较的过程**。

根据获得实验测量数据方法的不同，测量可分为两种：**直接测量和间接测量**。其中，**观察者可以直接由仪器或量具读出测量值的测量称为直接测量**。例如，用直尺测量长度、用天平测量质量、用温度计测量物体的温度、用电流表测量通过电路的电流等，待测物理量的结果可以直接从测量工具的刻度盘上读出。另一种测量则**需要依据待测量和某几个直接测量值的函数关系，通过数学运算获得测量结果，这种测量称为间接测量**。例如，测量一个圆柱体的体积V，可以用直接测量的方法测出其高度h及直径d，然后利用相关公式求解。

大多数物理量是无法直接测量的，即只能借助间接测量，但直接测量是一切测量的基础。对于一个物理量，能否直接测量不是绝对的，测量方法也并不是一成不变的。随着科技的发展，仪器的改进，许多原来只能间接测量的量，现在可以直接测量了。例如，用伏安法测电阻，以前的方法是：已知电阻两端的电压和流过电阻的电流，可以依据欧姆定律使用间接测量的方法求出待测电阻的大小，但是现在可以用电阻表直接将其电阻值测出。

1.1.2 误差的定义和分类

1. 误差的定义

物理量的测量是人们研究客观世界中物质运动规律和物质相互作用规律的唯一手段，因此，

一个物理量的测量是否准确将影响人们对整个客观世界的认识程度和水平。任何的物理量都具有其自身特有的物理性质，用来反映这些特性的物理量所具有的客观的、真实的数值叫做**真值**。实验的目的是通过实验来确定物理量的真值。但是，在实际操作中，由于测量仪器、测量方法、测量条件、测量人员等因素的限制，测量值往往与真值之间存在差异，若一个物理量的真实值为 N_0，测量值为 N_i，则将**真实值和测量值之差的绝对值叫做测量误差，又称为绝对误差，简称误差**，即

$$\Delta N_i = |N_i - N_0| \tag{1-1}$$

误差存在于一切测量之中。也就是说，只要有测量，就会有误差存在。因此，分析测量过程中所产生的误差，将误差的影响降低到最低程度，并对测量结果中未能消除的误差作出估计，尽可能地反映真值，是实验测量中不可缺少的一项重要工作。

另外，**把绝对误差与真值之比的百分数叫做相对误差**，用符号 E 表示，即

$$E = \frac{\Delta N_i}{N_0} \times 100\% \tag{1-2}$$

由于真值无法知道，所以计算相对误差时经常用 N 来代替 N_0。在这种情况下，N 可能是公认值，或高一级精密仪器的测量值，或测量值的平均值。相对误差用来表示测量的相对精确度，一般用百分数表示，结果保留两位有效数字。

2. 误差的分类

在实际测量中，根据对误差来源的综合分析，误差可以分为系统误差、偶然误差和粗大误差 3 类。

（1）系统误差

系统误差是指在相同条件（指方法、仪器、环境、人员等完全相同）下多次测量同一物理量时，结果总是向一个方向偏离，其数值一定或按一定规律变化。系统误差的特征是具有一定的规律性。

系统误差产生的原因主要有以下几方面。

① 仪器误差。仪器误差是由于仪器本身的缺陷或没有按规定条件使用仪器，而给结果造成的误差。例如，电流表、电压表刻度不准、零点失位，物理天平的臂长不等。

② 理论误差。理论误差是由于测量所依据的理论公式本身的近似性，或实验条件不能达到理论公式所规定的要求等所引起的误差。例如，在测量重力加速度实验中，单摆的周期公式

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{1-3}$$

要求单摆的摆角趋近于零，而这在现实实验中基本是无法达到的。在实验所能达到的摆角很小的情况下，式（1-3）只是一个近似公式，因此测量出来的结果也只是一个近似值。

③ 个人误差。个人误差是由于观测者本人缺乏基本的训练，缺乏经验，以及生理或心理特点而造成的误差。例如，用秒表测时间间隔时，总是有人提前或者延迟按表；另外，在测量实验中，也总是有人习惯将读数读得偏大或者偏小。

④ 环境误差。环境误差是由于外界环境的性质（如光照、温度、湿度、电磁场等因素发生变化）的影响而产生的误差。例如，环境温度的升高或降低，使测量值按一定规律变化。

实验中产生系统误差的原因通常是可以被发现的，原则上可以通过改善或校准仪表、改进测量方法、修正测量结果、改善实验环境、对实验者进行培训等方式来减小系统误差，直至其对实验结果的影响减到最小。这方面的知识和技能在实验中应该加以学习，并要很好地掌握。

（2）偶然误差

实验者在相同测量条件下，多次测量同一物理量时，各测量值之间往往不同。例如，误差的绝对值可能时大时小，测量值较平均值可能时正时负，这种以不可预知方式变化着的误差称为偶然误差，也叫做随机误差。

引起偶然误差的原因也很多，与仪器精密度和观测者感官灵敏度有关。如实验现场温度无规则的变化，气压的起伏，电磁场的干扰，电源电压的波动等；也有的是观测者在进行数值最后一位的估读时，由于其感官分辨能力有限而引起的。

引起偶然误差的因素不可控制，又无法预测和消除，但是当进行多次测量时，偶然误差会显示出明显的规律性，因此，可以用概率统计的方法来处理偶然误差。实践和理论都证明，偶然误差服从一定的统计规律，呈现正态分布，如图 1-1 所示。偶然误差特点如下。

① 单峰性。绝对值小的误差出现的概率比绝对值大的误差出现的概率大。

② 对称性。绝对值相等的正负误差出现的概率相同。

③ 有界性。绝对值很大的误差出现的概率趋于零。

④ 抵偿性。误差的算术平均值随着测量次数的增加而趋于零。

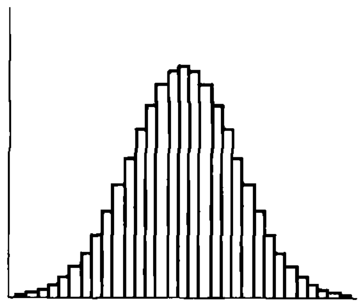
图 1-1　正态分布图

偶然误差是因为某些完全不能控制的偶然因素造成的，所以不能通过改善仪器、改进测量方法等来消除它。但是，由于其遵守上述规律，所以可采取适当增加测量次数、取平均值的办法来使测量值更接近真值。

（3）粗大误差

粗大误差是由于测量者的过失，如实验方法不合理、用错仪器、操作不当、读错数值或记错数据等引起的误差，是一种人为的过失误差，不属于测量误差。只要测量者采用严肃认真的态度，过失误差是可以避免的。在数据处理中，应该把含有粗大误差的异常数据加以剔除。

1.2　误差的估算

估算误差之前，先来了解什么是测量的精密度、准确度和精确度。

测量的精密度、准确度和精确度都是评价测量结果的术语，但目前使用时其定义并不尽相同，下面介绍一下较为普遍采用的说法。

精密度表示在同样的测量条件下，对同一物理量进行多次测量，所得结果彼此间相互接近的程度，即测量结果的重复性、测量数据的弥散程度。测量精密度是测量偶然误差的反映。测量精密度高，偶然误差小，但系统误差的大小不明确。

准确度表示测量结果与真值接近的程度。它是系统误差的反映。测量准确度高，即测量数据的算术平均值偏离真值较小，测量的系统误差小，但数据较分散，偶然误差的大小不确定。

精确度表示对测量的偶然误差及系统误差的综合评定。精确度高，测量数据较集中在真值附近，测量的偶然误差及系统误差都比较小。

由于在实验中过失和错误应该可以完全避免，系统误差原则上可以设法减小，可以忽略不计，因此这里只讨论偶然误差的估算。

（1）单次直接测量误差的估算

在物理实验中，由于实验条件不允许，或者对测量准确度要求不是很高等原因，对一个物理量 N_0 只进行了一次测量，设测量结果为 N，则可以根据实际情况，对测量值的误差进行合理具体的估算。

一般情况下，对偶然误差很小的测量结果，可参照仪表仪器上注明的仪器精度等级 K，来估算测量结果 N 的误差。由于精度等级 K 的定义为

$$K = \frac{|\Delta N_{\max}|}{N_{量程}} \times 100 \tag{1-4}$$

所以误差 $\Delta N \approx \Delta N_{\max}$，测量结果可表示为

$$N = N + \Delta N \tag{1-5}$$

举例来说，在“欧姆定律的应用”实验中，直流电压表的量程为 15V，精度级别为 K=0.5，测量得电阻两端的电压为 12.50V，则测量的误差为

$$\Delta U = \frac{1}{100} \times K \times U_{量程} = 0.075\text{V} \approx 0.08\text{V} \tag{1-6}$$

于是，最后的测量结果为

$$U = U \pm \Delta U = (12.50 \pm 0.08)\text{V} \tag{1-7}$$

在这里，需要注意的是：**在测量结果的最后表达式中，绝对误差只能保留一位有效数字，而测量近真值的最低一位应与绝对误差保留位取齐。**

对于没有特别标明精度等级的测量工具和仪表，可以取测量工具最小刻度的一半来作为单次测量的误差。

（2）多次直接测量误差的估算

一般情况下，可以采用增加测量组数的方法来减小实验测量结果的误差。进行多次重复测量时，测量结果服从正态分布的统计规律。

若在相同条件下对某一物理量 N_0 进行了多次测量，设测量次数为 n，其测量值分别为 N_1，N_2，N_3，…，N_n。若用 $\bar{N}$ 表示多次测量的算术平均值，则

$$\bar{N} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} N_i \tag{1-8}$$

根据最小二乘法原理，多次测量的算术平均值是待测量真值 N_0 的最佳估值，因而称 $\bar{N}$ 为近似真值，以后将用 $\bar{N}$ 来表示多次测量的近似真值。这样，每一次测量的绝对误差为

$$\Delta N_i = |N_i - \bar{N}| \tag{1-9}$$

平均绝对误差为

$$\overline{\Delta N} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |N_i - \bar{N}| \tag{1-10}$$

从严格意义上讲，误差是测量值和真值之间的差值，而测量值与平均值之差称为偏差，两者是存在差别的。由于 $\bar{N}$ 最接近于真值，因此可以用偏差来代替测量值与真值之间的误差，从而可不必仔细区分偏差与误差的细微差别。于是，多次测量的结果可以表示为

$$N = \bar{N} \pm \overline{\Delta N} \tag{1-11}$$

此组测量结果的相对误差为

$$E=\frac{\overline{\Delta N}}{\overline{N}}\times 100\% \tag{1-12}$$

例如，在“长度的测量”实验中，用游标卡尺测量一圆柱体的直径，测量次数为 5 次，将测量结果填入表 1-1 中。

表 1-1　　圆柱体直径的测量

次　数	D（cm）	ΔD（cm）
1	4.004	0.004 8
2	3.996	0.003 2
3	3.996	0.003 2
4	4.002	0.002 8
5	3.998	0.001 2
平均值	3.999 2	0.003 04

这组测量值的平均值为

$$\overline{D}=\frac{3.998+4.002+3.996+3.996+4.004}{5}=3.999\,2(\text{cm}) \tag{1-13}$$

上面数据中，考虑到多次测量可以提高实验数据的测量精度，因此，计算结果应多保留一位。根据误差理论，圆柱体的直径

$$D_0=\overline{D} \tag{1-14}$$

又因为

$$\Delta D_i=\left|D_i-\overline{D}\right| \tag{1-15}$$

所以，可得各次实验测量的绝对误差分别为

$$\Delta D_1=\left|4.004-3.999\,2\right|=0.004\,8(\text{cm}) \tag{1-16}$$

$$\Delta D_2=\left|3.996-3.999\,2\right|=0.003\,2(\text{cm}) \tag{1-17}$$

$$\Delta D_3=\left|3.996-3.999\,2\right|=0.003\,2(\text{cm}) \tag{1-18}$$

$$\Delta D_4=\left|4.002-3.999\,2\right|=0.002\,8(\text{cm}) \tag{1-19}$$

$$\Delta D_5=\left|3.998-3.999\,2\right|=0.001\,2(\text{cm}) \tag{1-20}$$

将上面数据代入式（1-10）中，得平均绝对误差为

$$\overline{\Delta D}=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}\Delta D_i=0.003\,04\text{cm} \tag{1-21}$$

因此，待测圆柱的直径可表示为

$$D=\overline{D}\pm\overline{\Delta D}=(3.999\pm 0.003)\text{cm} \tag{1-22}$$

注意：在这里，测量结果的最后表达式中，平均绝对误差只能保留一位有效数字，测量的平均值的最后一位应与误差的保留位对齐。

另外，也可得圆柱直径测量的相对误差为

$$E=\frac{\overline{\Delta D}}{\overline{D}}\times 100\%=\frac{0.003}{3.999}\times 100\%=0.075\%\approx 0.08\% \tag{1-23}$$

（3）间接测量误差的估算

直接测量的结果有误差，由直接测量值经过运算而得到的间接测量的结果也会有误差，这就是误差的传递。

设 N 为一间接测量值，N 和直接测量值 $A,B,C,\cdots$ 存在某一函数关系，即

$$N=f(A,B,C,\cdots) \tag{1-24}$$

由上面内容可知

$$A=\overline{A}\pm\overline{\Delta A}，\ B=\overline{B}\pm\overline{\Delta B}，\ C=\overline{C}\pm\overline{\Delta C}，\ \cdots \tag{1-25}$$

将各直接测量的近真值直接代入式（1-24）中，便可以得到间接测量值的近真值。测量次数越多，此近真值与 N 的算术平均值越接近。

对于直接测量量的绝对误差 ΔN，可借助高等数学的方法来求其值。

将 $N=f(A,B,C,\cdots)$ 求全微分，可得

$$\mathrm{d}N=\frac{\partial f(A,B,C,\cdots)}{\partial A}\mathrm{d}A+\frac{\partial f(A,B,C,\cdots)}{\partial B}\mathrm{d}B+\frac{\partial f(A,B,C,\cdots)}{\partial C}\mathrm{d}C+\cdots \tag{1-26}$$

由于直接测量的绝对误差相对于测量值来说是很小量，因此可以将 $\mathrm{d}N,\mathrm{d}A,\mathrm{d}B,\mathrm{d}C,\cdots$ 分别用 $\Delta N,\Delta A,\Delta B,\Delta C,\cdots$ 来代替。于是式（1-26）可写作

$$\Delta N=\left|\frac{\partial f(A,B,C,\cdots)}{\partial A}\right|\Delta A+\left|\frac{\partial f(A,B,C,\cdots)}{\partial B}\right|\Delta B+\left|\frac{\partial f(A,B,C,\cdots)}{\partial C}\right|\Delta C+\cdots \tag{1-27}$$

式中考虑到具体误差的符号并不知道，因此只能作最不利考虑，认为各项误差将累加，这样可能导致误差估算偏大。将式中各项分别取绝对值相加，此时相对误差为

$$E=\frac{\Delta N}{N}=\frac{1}{N}\left[\left|\frac{\partial f(A,B,C,\cdots)}{\partial A}\right|\Delta A+\left|\frac{\partial f(A,B,C,\cdots)}{\partial B}\right|\Delta B+\left|\frac{\partial f(A,B,C,\cdots)}{\partial C}\right|\Delta C+\cdots\right] \tag{1-28}$$

根据公式计算出来的常用误差传递公式列在表 1-2 中，以供参考。

表 1-2　　常用误差传递公式

函数关系	误差传递公式
$f=x\pm y$	$\Delta f=\Delta x+\Delta y$
$f=x\cdot y$	$\frac{\Delta f}{f}=\frac{\Delta x}{x}+\frac{\Delta y}{y}$
$f=kx$	$\Delta f=k\cdot\Delta x$
$f=\sqrt[k]{x}$	$\frac{\Delta f}{f}=\frac{1}{k}\cdot\frac{\Delta x}{x}$
$f=\frac{x^p y^q}{z^r}$	$\frac{\Delta f}{f}=p\frac{\Delta x}{x}+q\frac{\Delta y}{y}+r\frac{\Delta z}{z}$
$f=\sin x$	$\Delta f=\lvert\cos x\rvert\Delta x$
$f=\ln x$	$\Delta f=\frac{\Delta x}{x}$

间接测量值的误差传递公式是考虑了各项误差同时出现最不利的情况而得出来的，实际上，出现这种情况的概率是微乎其微的，因此对于间接测量值有些夸大的成分。在后面的具体实验中，为了对误差进行粗略的估计，全部采用算术平均误差的计算公式，这样可以大大地简化实验数据

处理的工作。值得一提的是，误差传递公式不仅可以用来计算间接测量值 N 的误差，而且还可以用来分析各直接测量值的误差对最后结果影响的大小。对于那些影响大的直接测量值，预先考虑采取措施，以减小它们的影响，从而为合理选用仪器和实验方法提供依据。

1.3 有效数字及运算

何为有效数字？有效数字有哪些用途？对有效数字该如何运算？下面将介绍这些内容。

1.3.1 有效数字

能正确有效地表示测量与实验结果的数字，称为有效数字。

实验中，对于任一物理量，其测量结果必然存在误差。因此，表示一个物理量测量结果的数字取值是有限的。有效数字由测量结果中若干位准确可靠的数字，加上一位欠准（也叫可疑）的数字构成。例如，“5.96”的有效数字是 3 位，“5.9”是可靠的，而尾位“6”是欠准的数字，它虽然为欠准数字，但在一定程度上反映了客观实际，因此，它也是有效的，也是必不可少的。

测量结果的有效数字位数的多少，和测量工具密切相关。例如，测量结果“1.579 2cm”一定不是用米尺测量而来的，而有可能是用其他如螺旋测微器等测量工具测得的。至于“1.57cm”则可能由米尺测得。

一个物理量的测量值和单纯的一个数字有着不同的意义。在数学上“30.3=30.30”，但对于实验中的测量值来说，“30.3”是不等于“30.30”的，因为它们有着不同的误差，测量的准确度不同。“30.3cm”为 3 位有效数字，而“30.30cm”的有效数字为 4 位。有效数字的位数和十进制单位的换算无关，即与小数点的位置无关，因此，表示小数点位置的数字“0”不是有效数字。记录实验数据时，要切记有效数字的位数是从第一个不为零的数字算起。当然，也并不是说零不算有效数字。例如，“30.30”中的 2 个“0”，虽然其中一个处在中间，一个处在末尾，但因它们都反映了被测量的大小，故都属于有效数字。因此，测量数据最后的“0”不能随便加上或者减去。

值得注意的是，对于十进制单位变换，只涉及小数点位置改变，不允许改变有效位数。例如，“5.6m”为 2 位有效数字，在换算成 km 或 cm 作单位时，应写为

$$5.6\text{m} = 5.6\times10^{-3}\text{km} = 5.6\times10^{2}\text{cm} \tag{1-29}$$

而类似于 $5.6\text{m} = 560\text{cm}$ 的写法是错误的。

1.3.2 确定测量结果有效数字的方法

对于测量结果，从测量误差所在位起，包括本位及以上的数字位均为有效数字。

一般情况下，误差的有效数字只取一位，两位和更多位的有效数字是没有意义的。本书中，为统一起见，取偶然误差为一位有效数字。因此，将有效数字的定义与偶然误差的取一位制结合起来，便可以写出测量结果的数值。例如，$D = (5.00\pm0.02)\text{cm}$；但是对于类似 $D = (5.0\pm0.02)\text{cm}$、$D = (5\pm0.02)\text{cm}$ 的表示方法则是错误的，因为任何测量结果的最后一位要与误差所在的这一位平齐。

用测量器具进行直接测量读数时，应反映出有效数字，一般应估读到测量仪器最小分度值的 1/10。但考虑到某些仪表的分度较窄、指针较粗或测量基准较不可靠等因素，可估读 1/5 或 1/2 的分度。对于数字式仪表，所显示的数字均为有效数字，无需估读，此时误差一般出现在最后一位。

总体上，有效数字的位数越多，测量的相对误差就越小；反之，有效数字位数越少，测量的相对误差就越大。一般情况下，两位有效数字所对应的测量相对误差为 1/100～1/10，3 位有效数字对应的测量相对误差为 1/100 0～1/100，其他依此类推。因此，在进行测量数据的精度估计时，可以说“测量的相对误差有多大”，另外也可以说成“测量结果有几位有效数字”，这两种说法是等价的。

1.3.3 测量结果有效数字的运算规则

进行测量结果的运算时，要掌握以下原则。

① 测量结果的有效数字中准确数值与准确数值间的运算，其结果仍然为准确数值。

② 测量结果的有效数字中欠准数与欠准数之间的运算结果，在没有进位情况时，仍为欠准数，但是其运算进位后，进位的数为准确数，剩余的数字为欠准数。

③ 在最后的运算结果中，只能保留一位欠准数。

在舍去第一位以后的欠准数时，应该严格遵循尾数舍取法则。以第二位欠准数为例，大于 5 则入，小于 5 则舍去，若等于 5 则应将要保留的第一位欠准数凑成偶数。此外，在计算结果欠准数位数过多时，应一次性取至所需的位置，而不可经多次舍取后至所需的位置。

此外，在进行测量数值之间的加减运算时，最终结果的小数点后的位数应和参与运算各数值中小数点位数最少的相同；而在进行测量数值之间的乘除运算时，最终结果的有效数字的位数应和参与运算各数值中有效数字位数最少的相同。但是，若参与运算的有效数字之间有最高位的进位（或借位）情况时，计算结果的有效数字位数会增加（或减少）一位。

例如，用计算器计算“$1.111\,\bar{1}\times1.1\bar{1}$”时，不考虑有效数字，显示其结果为“1.233 321”，但是，由于一个数字与一个欠准数字相乘，其结果必然是欠准数字，所以，小数点后面第二位的“3”及其以后的数字都是欠准数字。因此，按照原则，计算结果应写成“1.23”，为 3 位有效数字。即在此例中，5 位有效数字与 3 位有效数字相乘，计算结果为 3 位有效数字。

当进行测量数值的乘方和开方运算时，有效数字在乘方和开方运算结果的有效数字位数与其底数的有效数字的位数相同，如 $\sqrt{17.\bar{7}}=4.2\bar{1}$。对数函数、指数函数和三角函数运算后，结果中尾数的有效数字位数与近真值有效数字位数相同。

1.3.4 间接测量有效数字的运算

一般情况下，对于间接测量值，其计算也遵循有效数字的运算法则。但是，各参与运算值的误差项的积累传递作用，将会使最终的运算结果误差增大。因此，间接测量值近真值的有效数字位数应该决定于其对应的绝对误差位数。

（1）加减法运算

在进行各间接测量值的加减法运算时，应先计算出间接测量值的绝对误差，即：将参与运算的所有直接测量值的绝对误差绝对值相加，计算时舍去小于分量中最大绝对误差 1/10 的误差，在误差运算的过程中取两位有效数字，而最终结果取一位有效数字。

（2）乘除法运算

在进行各间接测量值的乘除法运算时，应先找出参与计算的各直接测量值中有效数字位数最少的那个，将其他值（包括常数）都取到有效数字比上述值多一位，然后代入函数关系中算出间接测量值的近真值，其结果也应比有效数字最少的值先多保留一位。在计算绝对误差时，可以在

计算中舍去小于上述各分量中最大相对误差 1/3 的误差项后，再求绝对误差。绝对误差在运算过程中取两位有效数字，在最终结果中只能取一位有效数字。

1.4　实验数据的处理方法

数据处理是指从获得数据开始，到得出最后结论的整个加工过程，其中包括数据的记录、整理、计算、分析及图表的绘制等。数据处理是实验工作的重要内容，根据实验数据，可以将其所反映的物理现象的内在规律提炼出来。由于实验数据处理的方法很多，在此只介绍一些基本的数据处理方法。

1.4.1　列表法

（1）列表法的优点

列表法的优点是，可以简单明了地表示出有关物理量之间的关系，使大量数据表达清晰醒目、条理化，便于随时检查数据结果的合理性或发现问题，同时有助于反映出各物理量之间的对应关系。列表法还可以提高数据处理的效率，减少或者避免错误，也利于计算和分析误差，以后随时可对原始数据和计算结果进行查对。

（2）列表法的要求

使用列表法时，应该遵循以下原则。

① 各栏目均应注明所记录的物理量的名称（符号）及单位，即分栏要清晰。

② 栏目要简明，以便于记录和处理原始实验数据，便于确定各物理量之间的函数关系。

③ 表中的原始测量数据应正确反映有效数字，数据不应随便涂改，确实要修改数据时，应将原来数据作相应标记以备随时查验。

④ 表示函数关系的数据表格中的数据，应按自变量由小到大或由大到小的顺序排列，以便于判断和处理。

⑤ 必要时应加以文字说明。

仍以“长度的测量”为例，在实验中用螺旋测微器测某金属片的厚度 D，测量次数为 5 次，将其记录在表格中，见表 1-3。

表 1-3　　金属片厚度的测量　　螺旋测微器精度：0.01mm

测量项目 / 次数	D（$\times10^{3}$m）	Δ（$\times10^{3}$m）
1	3.004	
2	2.996	
3	2.996	
4	3.002	
5	2.998	
平均值		

1.4.2　图示法

图示法也称图解法，是指将一组具有特定对应关系的测量值用图线的方式直观地描绘出来，

从图线上可以看出各物理量之间的变化规律，找出对应的函数关系，求出经验公式。

1. 图示法的优点

图示法最大的优点是能够直观地显示出相关物理量之间的对应关系，并可以帮助人们发现并剔除个别误差特别大的数据。对于某些特殊情况，可以按图示法，由实验数据图线直接推测出尚未进行实验的其他部分的数据结果。

2. 图示法的要求

（1）选择合适的作图纸

作图纸有线性坐标纸、对数坐标纸、半对数坐标纸和极坐标纸等几种，可以根据作图需要进行选择。原则上，坐标纸的最小格应该对应测量值中准确数字的最后一位，在允许的情况下，也可适当放大比例。

（2）确定坐标比例及其分度值

合理选择坐标比例是图示法的关键所在。作图时，通常以自变量作横坐标，因变量作纵坐标。坐标轴确定后，用粗实线在坐标纸上描出坐标轴，并注明坐标轴所代表物理量的符号和单位。

分度值是指坐标轴上单位长度所代表的物理量大小，也叫做坐标比例。分度值的选取应注意以下几点。

① 原则上要做到数据中的准确数字在图上应是准确的，即坐标轴上的最小分度应该对应于实验数据的最后一位准确数字。分度值选得过大，会损害数据的准确度。

② 坐标比例的选取应以便于读数为原则。常用的比例为“1 : 1”、“1 : 2”、“1 : 5”（包括“1 : 0.1”、“1 : 10”、……），即每单位长度代表“1、2、5”倍率单位的物理量。作图时应注意：切勿采用复杂的比例关系，如“1 : 3”、“1 : 7”、“1 : 9”等，这样不但不易绘图，而且读数困难。

③ 坐标比例一旦确定，应对坐标轴进行标度，即在坐标轴上均匀地标出所代表物理量的整齐数值，标记时所用的有效数字位数应与实验数据的有效数字位数相同。标度不一定从零开始，一般采用小于实验数据最小值的某一数作为坐标轴的起始点，而采用大于实验数据最大值的某一数作为终点，这样可以保证图纸被充分利用。

（3）标定实验数据点

实验数据点一般用符号“+”标出，其交点正是数据点的位置。对于同一图纸上出现多于一条实验曲线，各条曲线的数据点可用不同的符号（如⊕、⊗、×、……）标出，以显示各条曲线的区别。不能只用符号“·”来标定实验数据，因为绘制实验曲线时，用符号“·”标注的实验数据点将被覆盖。

（4）描绘实验曲线

在描绘实验曲线时，应借助直尺、曲线板、透明三角板、细硬铅笔等工具，根据不同的情况将数据点连成表征实验规律的直线、折线或者曲线。要使所绘制的实验图线尽可能穿过多的测量数据点。根据随机误差原理，不在线上的实验数据点应均匀分布在曲线两侧，与曲线的距离尽可能小；对于个别偏离曲线较远的点，应仔细检查标定点是否错误，若检查无误则表明该点的数据可能是错误数据，在连线时可以不予考虑。

（5）实验图线的名称及相应说明

在图纸上应注明图线的名称、坐标比例，并配以文字进行必要的说明（主要指实验条件），在恰当位置注明绘图者姓名、绘图日期等。

1.4.3　逐差法

若两个变量之间存在线性关系，且自变量为等差级数变化时，可用逐差法处理数据。逐差法处理数据既能充分利用实验数据，又能减小误差。其要求是：测量得到的数值为偶数组，将其分为前后两组，将对应项分别相减，然后再求平均值。

例如，按照胡克定律，在弹性范围内，弹簧的伸长量 x 与其所受的拉力 f 大小满足关系式 $f=kx$，设在实验中，等间隔地在弹簧下加砝码（如每次加 1kg），共加 9 次，分别记下对应的弹簧下端点的位置 x_0，x_1，x_2，…，x_9，求每增加砝码 1kg 时弹簧的平均伸长量 Δx。

若按照一般常识，则可能会很自然地采用下列公式。

先将所得数据逐项相减，即

$$\begin{aligned}\Delta x_1 &= x_1 - x_0\\ \Delta x_2 &= x_2 - x_1\\ &\cdots\cdots,\\ \Delta x_9 &= x_9 - x_8\end{aligned} \tag{1-30}$$

然后求平均值

$$\begin{aligned}\overline{\Delta x} &= \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2 + \cdots + \Delta x_9}{9}\\ &= \frac{(x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \cdots + (x_9 - x_8)}{9}\\ &= \frac{x_9 - x_0}{9}\end{aligned} \tag{1-31}$$

可以看出，上述解法中实际只用到了 x_9 和 x_0 两个值，其他的测量值根本没有用到。此时可用逐差法进行以下处理，将实验数据分成前后两组，第一组包括 x_0、x_1、x_2、x_3、x_4，第二组包括 x_5、x_6、x_7、x_8、x_9，然后将前后两组的数据进行对应相减

$$\begin{aligned}\Delta x_1' &= x_5 - x_0\\ \Delta x_2' &= x_6 - x_1\\ &\cdots\cdots\\ \Delta x_5' &= x_9 - x_4\end{aligned} \tag{1-32}$$

然后求其平均值

$$\begin{aligned}\overline{\Delta x'} &= \frac{\Delta x_1' + \Delta x_2' + \cdots + \Delta x_5'}{5}\\ &= \frac{(x_5 - x_0) + (x_6 - x_1) + \cdots + (x_9 - x_4)}{5}\\ &= \frac{1}{5}\sum_{i=0}^{4}(x_{5+i} - x_i)\end{aligned} \tag{1-33}$$

这样，既保证了测量数据都用上，又保持了多次测量的优点，减少了随机误差。逐差法计算简便，特别是在检查具有线性关系的数据时，可随时“逐差验证”，及时发现数据规律或错误数据。

1.4.4　最小二乘法

在实验数据的处理中，往往利用最小二乘法，根据实验数据来求经验公式。在利用最小二乘法时，首先应确定实验数据的函数关系，该函数关系的确定一般是依靠物理理论分析的推断，或

者根据实验数据的变化趋势而推测出来。最小二乘法也叫做方程的回归。

若推断物理量 y 和 x 之间的关系是线性关系，则可把函数的形式写成

$$y = kx + b \tag{1-34}$$

自变量只有 x 一个，故称为一元线性回归。这也是最小二乘法中最简单最基本的问题。

在确定了函数关系之后，可以利用一组实验数据来确定上述方程的各待定常数。设实验得到的数据为 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，…，(x_i,y_i)，…，(x_n,y_n)，如果实验没有误差，把 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，…，(x_i,y_i)，…，(x_n,y_n) 代入函数方程时，方程的左右两边应该相等。但实际上，测量总是伴随着测量误差，把这些测量归结为 y 的测量偏差

$$\delta_i = y_i - (kx_i + b) \tag{1-35}$$

根据最小二乘法的原理，偏差的平方和为最小，设其偏差的平方和为 S，则此时

$$S = \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - kx_i - b)^2 \tag{1-36}$$

的值为最小。

使 S 为最小的条件是

$$\frac{\partial S}{\partial k} = 0,\ \frac{\partial S}{\partial b} = 0,\ \frac{\partial^2 S}{\partial k^2} = 0,\ \frac{\partial^2 S}{\partial b^2} = 0 \tag{1-37}$$

由一阶微分为零得

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial k} &= -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - kx_i - b)x_i = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial b} &= -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - kx_i - b) = 0 \end{aligned} \tag{1-38}$$

解得

$$\begin{aligned} k &= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i - n\sum_{i=1}^{n}(x_i y_i)}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - n\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \\ b &= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n}(x_i y_i) - \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - n\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \end{aligned} \tag{1-39}$$

令

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i,\ \overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i,\ \overline{x}^2 = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2, \overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2, \overline{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i y_i) \tag{1-40}$$

则

$$b = \overline{y} - k\overline{x} \tag{1-41}$$

$$k = \frac{\overline{x}\,\overline{y} - \overline{xy}}{\overline{x}^2 - \overline{x^2}} \tag{1-42}$$

相关系数为

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 (y_i - \overline{y})^2}} \tag{1-43}$$