Yan Yuan
燕园教育

2013 考研专家指导丛书

考研数学历届真题权威解析（数学二）

赠送MP3盘

考研名师童武教授
考研数学串讲视频+辅导讲义

中国石化出版社
HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.COM
教·育·出·版·中·心

Yan Yuan

燕园教育

2013 考研专家指导丛书

考研数学历届真题

中国石化出版社

HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.COM

教·育·出·版·中·心

图书在版编目(CIP)数据

考研数学历届真题权威解析. 数学二 /王欢,王德军,童武主编. —北京:中国石化出版社,2012.2
ISBN 978-7-5114-1380-2

Ⅰ. ①考… Ⅱ. ①王… ②王… ③童… Ⅲ. ①高等数学–研究生–入学考试–题解 Ⅳ. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 011615 号

中国石化出版社出版发行
地址:北京市东城区安定门外大街 58 号
邮编:100011 电话:(010)84271850
读者服务部电话:(010)84289974
http://www.sinopec-press.com
E-mail:press@sinopec.com
北京科信印刷有限公司印刷
全国各地新华书店经销
*
787×1092 毫米 16 开本 14 印张 354 千字
2012 年 3 月第 1 版 2012 年 3 月第 1 次印刷
定价:30.00 元(赠送 MP3 盘)

前　　言

中国加入WTO之后，改革开放逐步深化，经济发展速度日益加快，社会对科学技术、文化教育的需求不断向高层次迈进，我国对硕士研究生等高层次人才的需求越来越大，这方面的教育也在稳步发展，规模不断扩大、层次逐步齐全、教学质量不断提高、测试更加规范化，考生人数也在迅猛增加。

从测量学角度来说，全国硕士研究生入学统一考试应是"常模参照"考试，即选拔性考试。命题工作需坚持既有利于为国家选拔高层次的专门人才，又有利于高等学校教学的原则，强调在考查知识的基础上，重点考查考生分析问题和解决问题的能力，并且要采用科学的办法，保持考试水平的稳定性。

为了更好地帮助考生复习，顺利通过数学考试、赢取高分，我们根据国家教育部制定的《考试大纲》，基于多年参加阅卷和考研辅导班的教学实践经验，以及分析了近几年考题中的考点、难点、重点及命题套路，倾力推出这套考研专家指导丛书。本套丛书包括《考研数学历届真题权威解析(数学一)》、《考研数学历届真题权威解析(数学二)》、《考研数学历届真题权威解析(数学三)》、《考研数学历届真题考点与题型分类精解(数学一)》、《考研数学历届真题考点与题型分类精解(数学二)》、《考研数学历届真题考点与题型分类精解(数学三)》、《考研数学标准模拟试卷与精解(数学一)》、《考研数学标准模拟试卷与精解(数学二)》、《考研数学标准模拟试卷与精解(数学三)》、《考研数学最后冲刺超越135分(数学一)》、《考研数学最后冲刺超越135分(数学二)》、《考研数学最后冲刺超越135分(数学三)》、《考研数学名师名家高分复习全书(理工类)》、《考研数学名师名家高分复习全书(经济类)》、《考研数学名师名家高等数学辅导讲义》、《考研数学名师名家线性代数辅导讲义》、《考研数学名师名家概率论与数理统计辅导讲义》、《考研数学最新精选1000题(理工类)》、《考研数学最新精选1000题(经济类)》、《考研数学必做客观题1800题精析(理工类)》、《考研数学必做客观题1800题精析(经济

类)》、《考研数学必做主观题600题精析(理工类)》和《考研数学必做主观题600题精析(经济类)》。

本套书的编写特点如下:

1. 配合最新考试大纲,反映最新变化

本书在严格遵循最新考试精神和最新考试大纲要求的基础上,力求反映最新考试要求,紧扣全国硕士研究生入学数学考试的脉搏。

2. 注重考试技巧、高效突破难关

本书精辟阐明解题思路,全面展现题型变化,为考生全程领航和理性分析,引领考生高效通过考试难关。考生可以利用本套冲刺试卷进行考前模拟实战训练,检验自己的学习成果,及时进行查漏补缺,有针对性地进行复习备考。希望考生能在仿真的环境下进行模拟训练,这样效果最佳。

3. 教授亲自主笔,编写阵容强大

本书由一线专家和教授亲自编著。编者多年来一直从事考研数学的考前辅导工作,积累了丰富的教学辅导经验,对历年考试情况比较了解,对考生在复习和考试过程中可能遇到的问题把握得比较准确。

尽管在编写过程中经历了严格的编审程序,力求达到完美,但限于时间和水平,仍可能存在不足,纰漏之处希望广大考生和专家批评、指正。

编　者

目　录

2012 年全国硕士研究生入学统一考试
数学二试题

一、选择题(1 ~ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分,下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求)

(1) 曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 的渐近线条数为( ).

(A)0　　(B)1　　(C)2　　(D)3

(2) 设函数 $f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$,其中 n 为正整数,则 $f'(0)=$( ).

(A)$(-1)^{n-1}(n-1)!$　　(B)$(-1)^n(n-1)!$

(C)$(-1)^{n-1}n!$　　(D)$(-1)^n n!$

(3) 设 $a_n>0\quad(n=1,2,3,\cdots)$,$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$,则数列 $\{S_n\}$ 有界是数列 $\{a_n\}$ 收敛的( ).

(A) 充分必要条件　　(B) 充分非必要条件

(C) 必要非充分条件　　(D) 非充分也非必要条件

(4) 设 $I_k=\int_0^{k\pi}e^{x^2}\sin x\,dx\quad(k=1,2,3)$,则有( ).

(A)$I_1<I_2<I_3$　　(B)$I_3<I_2<I_1$

(C)$I_2<I_3<I_1$　　(D)$I_2<I_1<I_3$

(5) 设函数 $f(x,y)$ 为可微函数,且对任意的 x,y 都有 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}>0$,$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}<0$,则使不等式 $f(x_1,y_1)>f(x_2,y_2)$ 成立的一个充分条件是( ).

(A)$x_1>x_2,y_1<y_2$　　(B)$x_1>x_2,y_1>y_2$

(C)$x_1<x_2,y_1<y_2$　　(D)$x_1<x_2,y_1>y_2$

(6) 设区域 D 由曲线 $y=\sin x,x=\pm\dfrac{\pi}{2},y=1$ 围成,则 $\iint\limits_D(x^5y-1)\,dxdy=$( ).

(A)π　　(B)2　　(C)-2　　(D)$-\pi$

(7) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}0\\0\\c_1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\c_2\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\c_3\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}-1\\1\\c_4\end{pmatrix}$,$c_1,c_2,c_3,c_4$ 均为任意常数,则下列向量组线性相关的是( ).

(A)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$　　(B)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$　　(C)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$　　(D)$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$

(8) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵,$\boldsymbol{P}$ 为 3 阶可逆矩阵,且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$,若 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$,$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$,则 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}=$( ).

(A)$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ (B)$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ (C)$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ (D)$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

二、填空题(9 ~ 14 小题,第小题 4 分,共 24 分)

(9) 设 $y=y(x)$ 是由方程 $x^2-y+1=e^y$ 所确定的隐函数,则$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=$ ________.

(10) $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\frac{1}{1+n^2}+\frac{1}{2^2+n^2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n^2}\right)=$ ________.

(11) 设 $z=f\left(\ln x+\frac{1}{y}\right)$,其中函数 $f(u)$ 可微,则 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=$ ________.

(12) 微分方程 $y\mathrm{d}x+(x-3y^2)\mathrm{d}y=0$ 满足条件 $y|_{x=1}=1$ 的解为 $y=$ ________.

(13) 曲线 $y=x^2+x\quad(x<0)$ 上曲率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$的点的坐标是________.

(14) 设 A 为 3 阶矩阵,$|A|=3$,A^* 为 A 的伴随矩阵,若交换 A 的第 1 行与第 2 行得矩阵 B,则 $|BA^*|=$ ________.

三、解答题(15 ~ 23 小题,共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

(15)(本题满分 10 分)

已知函数 $f(x)=\frac{1+x}{\sin x}-\frac{1}{x}$,记 $a=\lim\limits_{x\to0}f(x)$,

(1) 求 a 的值;

(2) 若 $x\to0$ 时,$f(x)-a$ 与 x^k 是同阶无穷小,求常数 k 的值.

(16)(本题满分 10 分)

求函数 $f(x,y)=xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ 的极值.

(17)(本题满分 12 分)

过(0,1)点作曲线 L: $y=\ln x$ 的切线,切点为 A,又 L 与 x 轴交于 B 点,区域 D 由 L 与直线 AB 围成,求区域 D 的面积及 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

(18)(本题满分 10 分)

计算二重积分$\iint\limits_D xy\mathrm{d}\sigma$,其中区域 D 为曲线 $r=1+\cos\theta\quad(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ 与极轴围成.

(19)(本题满分 10 分)

已知函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 及 $f'(x)+f(x)=2e^x$,

(1) 求 $f(x)$ 的表达式;

(2) 求曲线 $y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)\mathrm{d}t$ 的拐点.

(20)(本题满分 10 分)

证明:$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\geqslant1+\frac{x^2}{2},\quad(-1<x<1)$.

(21)(本题满分 10 分)

(1) 证明方程 $x^n+x^{n-1}+\cdots+x=1\quad$($n$ 为大于 1 的整数),在区间$\left(\frac{1}{2},1\right)$内有且仅有一

个实根；

(2) 记(1) 中的实根为 x_n，证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求此极限.

(22)(本题满分11分)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$

(1) 计算行列式 $|\boldsymbol{A}|$；

(2) 当实数 a 为何值时，方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解，并求其通解.

(23)(本题满分11分)

已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{pmatrix}$，二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}$ 的秩为2，

(1) 求实数 a 的值；

(2) 求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 将 f 化为标准形.

2012 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题参考答案与解析

一、选择题：

(1)**【考点】** 函数的渐进线

【解析】 根据渐近线的定义可知，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x-1}=1$，得直线 $y=1$ 为已知曲线的水平渐近线，又由 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x-1}=\infty$，得直线 $x=1$ 为垂直渐近线，没有斜渐近线，因此选(C).

(2)**【考点】** 导数的定义

【解析】 $x=0$ 时，$f(0)=0$，由函数在一点处导数的定义，有 $f'(0)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)=(-1)^{n-1}(n-1)!$.

$x\to 0$ 时，$e^x-1\sim x$. 因此选(A).

(3)**【考点】** 数列的极限

【解析】 根据题意可知，$a_n>0$，因此数列$\{S_n\}$是单调递增数列. 若$\{S_n\}$有界，则 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 存在，就有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=0$，得数列$\{a_n\}$收敛，数列$\{S_n\}$有界是数列$\{a_n\}$收敛的充分条件. 反之，若$\{a_n\}$收敛，则$\{S_n\}$不一定是有界的，例：取 $a_n=1$ 满足题设，$\{a_n\}$收敛，但 $S_n=n$，$\{S_n\}$无上界. 因此应选(B).

(4)**【考点】** 定积分的计算

【解析】 根据题意可知 $I_1=\int_0^{\pi}e^{x^2}\sin x\mathrm{d}x$，$I_2=\int_0^{2\pi}e^{x^2}\sin x\mathrm{d}x$，$I_3=\int_0^{3\pi}e^{x^2}\sin x\mathrm{d}x$，由于 $I_2-I_1=\int_{\pi}^{2\pi}e^{x^2}\sin x\mathrm{d}x=e^{\xi_1^2}\sin\xi_1(2\pi-\pi)=\pi e^{\xi_1^2}\sin\xi_1<0$，$\xi_1\in(\pi,2\pi)$ 因此 $I_2<I_1$. 再有 $I_3-I_2=\int_{2\pi}^{3\pi}e^{x^2}\sin x\mathrm{d}x=\pi e^{\xi_2^2}\sin\xi_2>0$，$\xi_2\in(2\pi,3\pi)$. 因此 $I_3>I_2$. 最后有 $I_3-I_1=\int_{\pi}^{3\pi}e^{x^2}\sin x\mathrm{d}x$，令 $t=x-2\pi$，

$$
\begin{aligned}
\text{则 } I_3-I_1&=\int_{-\pi}^{\pi}e^{(t+2\pi)^2}\sin(t+2\pi)\mathrm{d}t=\int_0^{\pi}e^{(t+2\pi)^2}\sin t\mathrm{d}t+\int_{-\pi}^{0}e^{(t+2\pi)^2}\sin t\mathrm{d}t\\
&=\int_0^{\pi}e^{(t+2\pi)^2}\sin t\mathrm{d}t-\int_0^{\pi}e^{(2\pi-t)^2}\sin t\mathrm{d}t=\int_0^{\pi}[e^{(t+2\pi)^2}-e^{(2\pi-t)^2}]\sin t\mathrm{d}t>0
\end{aligned}
$$

所以 $I_3>I_1$，有 $I_3>I_1>I_2$， 选(D).

(5)**【考点】** 复合函数微分法

【解析】 因为 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}>0$，如果 $f(x_1,y_1)>f(x_2,y_1)$，则 $x_1>x_2$，

又$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}<0$，如果有$f(x_2,y_1)>f(x_2,y_2)$，则$y_1<y_2$.

所以$f(x_1,y_1)>f(x_2,y_1)>f(x_2,y_2)$时，就有$x_1>x_2,y_1<y_2$.　因此选(A).

(6)【考点】　二重积分计算

【解析】　$$\iint_D(x^5y-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\int_{\sin x}^{1}(x^5y-1)\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\frac{1}{2}x^5\cos^2x-1+\sin x)\mathrm{d}x$$

$$=-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x=-\pi$$

其中$\frac{1}{2}x^5\cos^2x,\sin x$为奇函数，在对称区间上积分值为零，应选(D).

(7)【考点】　向量组的线性相关性

【解析】　根据题意可知，由于$\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}0\\0\\c_3+c_4\end{pmatrix}$，而$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}0\\0\\c_1\end{pmatrix}$，因此$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性相关. 应选(C).

(8)【考点】　求逆矩阵

【解析】　根据题意有$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$$\text{从而 }\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}.$$ 应选(B).

二、填空题：

(9)【考点】　隐函数微分法

【解析】　根据题意将$x=0$代入方程$x^2-y+1=e^y$，得$y=0$，

在方程$x^2-y+1=e^y$两端对x求一阶导，得$2x-y'=y'e^y$，将$x=0,y=0$代入得$y'(0)=0$

再在$2x-y'=y'e^y$两端对x求一阶导，得$2-y''=y''e^y+(y')^2e^y$，将$x=0,y=0,y'(0)=0$代入得$y''(0)=1$，即$\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}=1$.

(10)【考点】　数列的极限

【解析】　$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{1}{1+n^2}+\frac{1}{2^2+n^2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n^2}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{n^2}{1+n^2}+\frac{n^2}{2^2+n^2}+\cdots+\frac{n^2}{n^2+n^2}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}+\cdots+\frac{1}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}$$

(11)【考点】 多元函数微分法

【解析】 $z=f(\ln x+\frac{1}{y})$,则$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{x}f'$,$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1}{y^2}f'$,

$x\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=x\cdot\frac{1}{x}f'+y^2\cdot(-\frac{1}{y^2})f'=0$

(12)【考点】 一阶线性微分方程

【解析】 根据题意由 $y\mathrm{d}x+(x-3y^2)\mathrm{d}y=0$,得$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=3y-\frac{x}{y}$,$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}+\frac{x}{y}=3y$

此即为 x 对于 y 的一阶线性微分方程,直接利用通解公式,可得

$x=\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y}\left[\int 3y\mathrm{e}^{\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+C\right]=\frac{1}{y}(y^3+C)$, C 为常数.

由于已知 $x=1$ 时,$y=1$,代入通解中,得 $C=0$,所以方程的解为 $x=y^2$,得 $y=\sqrt{x}$(符合题意),$y=-\sqrt{x}$ 由条件 $y|_{x=1}=1$ 舍去.

(13)【考点】 导数的几何应用

【解析】 根据题意由于 $y'=2x+1$,$y''=2$,

曲率 $k=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2}{[1+(2x+1)^2]^{\frac{3}{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,解得 $x=0$(由已知条件舍去),$x=-1$.

$x=-1$ 时,$y=0$,所以坐标为$(-1,0)$.

(14)【考点】 矩阵的计算

【解析】 根据题意设 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,则由题知 $\boldsymbol{PA}=\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{A}$ 为3阶矩阵,又 $|\boldsymbol{A}|=3$,所以 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^2=9$.

因此 $|\boldsymbol{BA}^*|=|\boldsymbol{B}||\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{PA}||\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{P}||\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^*|=-27$.

三、解答题:

(15)【考点】 函数的极限

【解析】 (1) 根据题意 $a=\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{1+x}{\sin x}-\frac{1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x+x^2-\sin x}{x\sin x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x+x^2-\sin x}{x^2}=1+\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^2}=1+\lim_{x\to0}\frac{x-\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)}{x^2}$$

$$= 1 + 0 = 1$$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-a}{x^k} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x^k} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+x^2-\sin x - x\sin x}{x^{k+1}\sin x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+x^2-\sin x - x\sin x}{x^{k+2}}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)(1+x)}{x^{k+2}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}x^3}{x^{k+2}}$$

由已知 $x\to 0$ 时,$f(x)-a$ 与 x^k 是同阶无穷小,则有 $k+2=3, k=1$.

(16)**【考点】** 函数的极值

【解析】 根据题意,由于 $f'_x(x,y) = (1-x^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}, f'_y(x,y) = -xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$

令 $f'_x = 0, f'_y = 0$,得函数 $f(x,y)$ 的驻点为 $(1,0),(-1,0)$.

再求 $A = f''_{xx} = -2xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}} - x(1-x^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} = x(x^2-3)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$

$B = f''_{xy} = -y(1-x^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}, C = f''_{yy} = x(y^2-1)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$,

将 $(1,0)$ 代入上面的 A,B,C,中,得 $A = -2e^{-\frac{1}{2}} < 0, B^2 - AC = -2e^{-1} < 0$,所以 $(1,0)$ 是函数的极大值点,极大值为 $f(1,0) = e^{-\frac{1}{2}}$,

将 $(-1,0)$ 代入,$A = 2e^{-\frac{1}{2}} > 0, B^2 - AC = -2e^{-1} < 0$,所以 $(-1,0)$ 是函数的极小值点,极小值为 $f(-1,0) = -e^{-\frac{1}{2}}$,

(17)**【考点】** 一元函数积分学的几何应用

【解析】 根据题意,设切点 A 的坐标为 (x_0,y_0),切线方程的斜率为 k,则 $y_0 - 1 = kx_0$,又 $k = \dfrac{1}{x_0}, y_0 = \ln x_0$,解得 $x_0 = e^2, y_0 = 2, k = \dfrac{1}{e^2}$. 得切线方程为:$y = \dfrac{1}{e^2}x + 1$,切点 $A(e^2,2)$,L 与 x 轴的交点 B 为 $(-1,0)$,可知直线 AB 的方程 $l_{AB}: y = \dfrac{2}{e^2-1}(x-1)$

区域 D 的面积为:$S = \displaystyle\int_1^{e^2}\ln x\,dx - \int_1^{e^2}\frac{2}{e^2-1}(x-1)\,dx$

$$= x\ln x\Big|_1^{e^2} - x\Big|_1^{e^2} - \frac{2}{e^2-1}\left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)\Big|_1^{e^2}$$

$$= e^2 + 1 - (e^2-1) = 2$$

D 绕 X 轴旋转一周所得旋转体的体积为

$$V = \pi\int_1^{e^2}(\ln x)^2dx - \pi\int_1^{e^2}\left[\frac{2}{e^2-1}(x-1)\right]^2dx$$

$$= \pi(2e^2-2) - \pi\frac{4(e^2-1)}{3} = \frac{2}{3}\pi(e^2-1)$$

(18)**【考点】** 二重积分的计算

【解析】 根据题意,令 $x = \rho\cos\theta, y = \rho\sin\theta \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi$

则 $\displaystyle\iint_D xy\,d\sigma = \int_0^{\pi}d\theta\int_0^{1+\cos\theta}\rho\cos\theta\cdot\rho\sin\theta\cdot\rho\,d\rho$

$$= \int_0^{\pi}\cos\theta\sin\theta\,d\theta\int_0^{1+\cos\theta}\rho^3d\rho = \frac{1}{4}\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^4\cos\theta\sin\theta\,d\theta$$

$$= -\frac{1}{4}\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^4\cos\theta\mathrm{d}\cos\theta = -\frac{1}{4}\int_1^{-1}(1+u)^4u\mathrm{d}u = \frac{16}{15}$$

(19)【考点】 求曲线的拐点

【解析】 (1) 根据题意,齐次方程$f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$的特征方程为$r^2+r-2=0$,得特征根为$r_1=1,r_2=-2$,则有通解$f(x)=c_1e^x+c_2e^{-2x}$,代入方程$f'(x)+f(x)=2e^x$得$2c_1e^x-c_2e^{-2x}=2e^x$,则$c_1=1,c_2=0$. 因此$f(x)=e^x$.

(2) 由(1)知$f(x)=e^x$,则曲线$y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)\mathrm{d}t=e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t$,分别求它的一阶、二阶导数,得$y'=2xe^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t+1,y''=2e^{x^2}(1+2x^2)\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t+2x$,

令$y''=0$,得$x=0$. 又当$x>0$时,$y''>0$;$x<0$时,$y''<0$

$x=0$时,$y(0)=0$,因此$(0,0)$为曲线拐点.

(20)【考点】 一元函数微分学的应用

【证明】根据题意,设$f(x)=x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\frac{x^2}{2}$,求一阶导数,

$f'(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{2x}{1-x^2}-\sin x-x=\ln\frac{1+x}{1-x}+x\frac{1+x^2}{1-x^2}-\sin x$

$0<x<1$时,有$\ln\frac{1+x}{1-x}\geqslant 0,\frac{1+x^2}{1-x^2}>1$,因此有$x\frac{1+x^2}{1-x^2}-\sin x\geqslant 0$,得$f'(x)\geqslant 0$,

所以$f(x)=x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\frac{x^2}{2}\geqslant f(0)=0$,

即$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\geqslant\frac{x^2}{2}+1,\quad 0<x<1$

而$-1<x<0$时,有$\ln\frac{1+x}{1-x}\leqslant 0,\frac{1+x^2}{1-x^2}>1$,因此有$x\frac{1+x^2}{1-x^2}-\sin x\leqslant 0$,得$f'(x)\geqslant 0$,

同样有$f(x)=x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\frac{x^2}{2}\geqslant f(0)=0$,

综上,可证得结论.

(21)【考点】 零点定理、夹逼定理、求极限

(1) **证明**:根据题意,令$f(x)=x^n+x^{n-1}+\cdots+x-1$,

则$f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)-1=\dfrac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}-1=-\left(\frac{1}{2}\right)^n<0$,

$f(1)=1^n+1^{n-1}+\cdots+1-1=n-1>0$,因此由零点定理知$f(x)=0$在$(\frac{1}{2},1)$内至少有一实根.

又$f'(x)=nx^{n-1}+(n-1)x^{n-2}+\cdots+2x+1>0,x\in\left(\frac{1}{2},1\right)$

故$f(x)$在$\left(\frac{1}{2},1\right)$上是单调递增函数,所以$f(x)=0$在$\left(\frac{1}{2},1\right)$内有且仅有一个实根.

(2) 根据题意,有$f(x_n)=0$,又$f'(x)=nx^{n-1}+(n-1)x^{n-2}+\cdots+2x+1>1,x\in\left(\frac{1}{2},1\right)$

又设 $F(x)=f(x)+1=x^n+x^{n-1}+\cdots+x$，则 $F(x_n)=1$

则有 $\dfrac{F(x_n)-F\left(\frac{1}{2}\right)}{x_n-\frac{1}{2}}=F'(\xi),\frac{1}{2}<\xi<x_n$

$$\left|\frac{F(x_n)-F\left(\frac{1}{2}\right)}{x_n-\frac{1}{2}}\right|=|F'(\xi)|>1,\left|x_n-\frac{1}{2}\right|\leqslant\left|F(x_n)-F\left(\frac{1}{2}\right)\right|=\left|1-\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\right|=\frac{1}{2^n}$$

由夹逼定理，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|x_n-\frac{1}{2}\right|=0$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}$.

(22)【**考点**】 行列式的计算、求线性方程组的通解

【**解析**】 (1) 根据题意，$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&a&0\\0&1&a\\0&0&1\end{vmatrix}+(-1)^5a\begin{vmatrix}a&0&0\\1&a&0\\0&1&a\end{vmatrix}=1-a^4$

(2) 根据题意，设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的增广矩阵为 $\overline{\boldsymbol{A}}$，则

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\left(\begin{array}{cccc|c}1&a&0&0&1\\0&1&a&0&-1\\0&0&1&a&0\\a&0&0&1&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&a&0&0&1\\0&1&a&0&-1\\0&0&1&a&0\\0&-a^2&0&1&-a\end{array}\right)\to$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&a&0&0&1\\0&1&a&0&-1\\0&0&1&a&0\\0&0&a^3&1&-a-a^2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&a&0&0&1\\0&1&a&0&-1\\0&0&1&a&0\\0&0&0&1-a^4&-a-a^2\end{array}\right)$$

要使方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解，必须有 $1-a^4=0$ 且 $-a-a^2=0$，可知 $a=-1$

代入 $\overline{\boldsymbol{A}}$

$$\overline{\boldsymbol{A}}\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&0&0&1\\0&1&-1&0&-1\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&-1&0\\0&1&0&-1&-1\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

得 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的一个特解为 $(1,0,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解为 $k(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$，因此 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解为 $k(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}+(1,0,1,1)^{\mathrm{T}}$，$k$ 为任意常数.

(23)【**考点**】 二次型、正交变换

【**解析**】 (1) 根据题意，二次型的秩为2，意即矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 的秩也为2，$|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}|=0$，

$$|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}2&0&1-a\\0&1+a^2&1-a\\1-a&1-a&a^2+3\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1+a^2&1-a\\1-a&a^2+3\end{vmatrix}+(1-a)\begin{vmatrix}0&1-a\\1+a^2&1-a\end{vmatrix}$$

$$=(a^2+3)(a+1)^2=0,$$

得 $a=-1$

(2) 将 $a=-1$ 代入 A^TA 中,得 $A^TA=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&2&2\\2&2&4\end{pmatrix}$,

令 $|\lambda E-A^TA|=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&-2\\0&\lambda-2&-2\\-2&-2&\lambda-4\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)(\lambda-6)=0$

得 A^TA 的特征值 $\lambda_1=0,\lambda_2=2,\lambda_3=6$.

分别将特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 代入 $(\lambda_iE-A^TA)X=0$,求得对应各自特征值的特征向量为

$\xi_1=(1,1,-1)^T$ $\xi_2=(1,-1,0)^T$ $\xi_3=(1,1,2)^T$

再分别将 ξ_1,ξ_2,ξ_3 单位化,得 $\eta_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)^T,\eta_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)^T,\eta_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2)^T$

令 $Q=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$,则 $f(x_1,x_2,x_3)=x^T(A^TA)x=(Qy)^T(A^TA)(Qy)=y^TQ^TA^TAQy=2y_2^2+6y_3^2$ 即为 f 的标准形.