陈国祥／主编

微积分

Calculus

成人高等教育
审计学系列教材

中国时代经济出版社

经济数学基础(一)
微积分

主　编　陈国祥
副主编　曹惠琴

中国时代经济出版社

图书在版编目(CIP)数据

微积分/陈国祥主编.—北京:中国审计出版社,2001.9
成人高等教育审计学系列教材
ISBN 7-80064-929-6

Ⅰ.策… Ⅱ.陈… Ⅲ.微积分-成人教育:高等教育-教材
Ⅳ.0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 055057 号

微积分

陈国祥 主编

出　版	中国时代经济出版社			
地　址	北京市东城区东四十条 24 号青蓝大厦 11 层			
邮政编码	100007			
电　话	(010)88361317	传	真	(010)88361310
发行经销	新华书店总店北京发行所发行　各地新华书店经销			
制　版	世纪风云图文制作中心			
印　刷	北京昌平百善印刷厂印刷			
开　本	850×1168　1/32	版	次	2001 年 9 月北京第 1 版
印　张	10	印	次	2002 年 9 月第 2 次印刷
字　数	250 千字	定	价	18.00 元
书　号	ISBN 7-80064-929-6/G·32			

前　言

数学是一种严密而又科学的分析工具。近几十年来，这种工具广泛应用于经济分析，在现代西方经济学中，表现尤为突出。现代诺贝尔经济学奖获得者的很多理论都是建立在数学模型的基础上，并形成和发展起来的。

为了适应新形势的需要，培养学生的综合素质，我们编写了这套《经济数学基础》教材。全套书共分三册：第一分册《微积分》，第二分册《线性代数》，第三分册《概率论与数理统计》。

本套书综合了 1989 年国家教育部(原国家教委)颁发的《经济数学基础教学大纲》的内容，结合《经济类硕士研究生入学考试大纲》的要求和财经类专业后续课程的需要，根据当前财经类院校学生的实际基础而编写的。它既可作为财经类院校相关专业的教材，也可作为自学考试、电大、函授、夜大及干部培训的教材或参考书。

第一分册《微积分》介绍了微积分学基本知识。全书共分十章，内容包括一元函数微积分学、多元函数微积分学、幂级数和微分方程。各章之后都配有适量的习题及解答，难度适中，针对性强，便于学生进一步掌握书中基本知识。

本书主要特点：

(1)本书紧扣教学大纲和考试大纲，旨在提高学生的基础知识，培养学生解决问题的能力和技巧。

(2)本书简明扼要，重点突出，具有较强的针对性，在本书的每

一章中，作者给出了大量的例题并作了详细的讲解，适合学生自学。

(3)本书具有较强的层次性，注重由浅入深，循序渐进。本书设计课时为132学时，对于课时充分的可以讲解全书；对于课时不足的，可以仅讲解书中的前8章，并不影响学生建立微积分学理论体系。

本书第一章至第四章由曹惠琴编写，第五章至第十章由陈国祥编写，全书由吴本立副教授主审。在本书编写过程中，南京审计学院管理干部学院的同志及中国审计出版社的黎夏同志给予了大力支持和帮助，在此表示衷心的感谢。

由于我们水平有限，书中难免有不妥之处，欢迎读者批评指正。

编者于耕园

2001年5月

目　录

第一章　函　数

函数是高等数学中最重要的基本概念之一，也是微积分学的研究对象。本章将主要讨论函数的概念、函数的性质、复合函数、基本初等函数和初等函数。

§1.1　集　合

一、集合的概念

一般地，我们称具有某种属性的事物的全体为集合（简称集），称集合中的事物为元素。例如，自然数全体称为自然数集，任一自然数都是自然数集的元素。

通常集合应符合两个条件：一是确定性，即给定一个集合，任意一个事物要么是该集合的元素，要么不是该集合的元素，二者必居其一；二是互异性，即给定一个集合，其中任意两个元素都不相同。

只有有限个元素的集合称为有限集，含有无限多个元素的集合称为无限集。

一般用大写字母 A，B，C……等来表示集合，用小写字母 a，b，c……等表示集合中的元素。如果 a 是集合 A 中的元素，就说 a 属于 A，记作 $a \in A$；如果 a 不是集合 A 中的元素，就说 a

不属于 A，记作 $a \notin A$。

集合一般有两种表示法：列举法和描述法。所谓列举法就是列出集合中所有的元素，并用 {} 括起来。例如，所有不大于 5 的自然数构成的集合可表示成

$$\{1,2,3,4,5\}$$

所谓描述法就是把集合中的元素的共同属性用语言或数学符号描述出来，通常用

$$\{a|a\text{具有的性质}\}$$

来表示具有某种性质的元素 a 构成的集合。例如集合 {1，2，3，4，5} 用描述法也可表示成

$\{x|x$ 为不大于 5 的自然数$\}$ 或 $\{x|x$ 为自然数且 $x \leqslant 5\}$

在某个问题中，由所研究的所有对象构成的集合称为全集，记为 Ω。全集是相对的。一个集合在某个问题中是全集，在另一个问题中可能就不是全集。例如在检查某厂产品质量时，该厂所有产品为全集；若只检查某车间产品的质量，则该车间所有产品构成全集。

我们称不包含任何元素的集合为空集，记为 $\varnothing$。例如方程 $X^2+1=0$ 的实数解集就是空集。

如果集合 B 的任何一个元素都是集合 A 的元素，则称 B 是 A 的子集，记作 $B \subset A$（或 $A \supset B$），读作“B 包含于 A”（或“A 包含 B”）。例如自然数集是整数集的子集。

对两个集合 A 和 B，如果 $A \subset B$，同时 $B \subset A$，则称 A 和 B 相等，记作 $A=B$。

二、集合的运算

设 A，B 为两个集合。由所有属于 A 或者属于 B 的元素构成的集合称为 A 与 B 的并集，记作 $A \cup B$。显然，$A \subset (A \cup B)$，$B \subset (A \cup B)$。由 A 与 B 的所有公共元素组成的集合称为 A 与 B 的

交集，记作 $A\cap B$。易见，$(A\cap B)\subset A$，$(A\cap B)\subset B$。

集合以及集合间的关系可以用图形直观地表示，称为文氏图。如图 1－1，其中（a）图阴影部分表示 $A\cup B$，（b）图阴影部分表示 $A\cap B$。

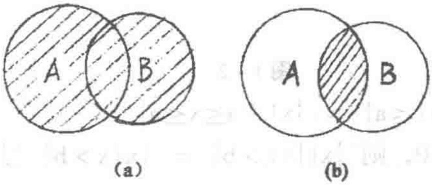

图 1－1

三、绝对值、区间、邻域

我们知道，实数与数轴上的点有一一对应关系，因此，如无特别说明，数 a 与点 a 将不加区分。

1. 绝对值

一个实数 x 的绝对值，记为 $|x|$，定义为

$$|x|=\begin{cases} x & x\geqslant 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$$

$|x|$ 的几何意义：$|x|$ 表示数轴上点 x 与原点之间的距离。

绝对值的主要性质：

（1）$|x|\geqslant 0$

（2）$|x|=\sqrt{x^2}$

（3）$|-x|=|x|$

（4）$-|x|\leq x\leq |x|$

（5）如果 $a>0$，则 $\{x\,|\,|x|<a\}=\{x\,|\,-a<x<a\}$

几何意义：$|x|<a$ 表示数轴上与原点间距离小于 a 的点 x 的

集合，而 $-a<x<a$ 表示在点 $-a$ 和点 a 之间的点 x 的集合，所以它们表示相同的集合（图 1-2）

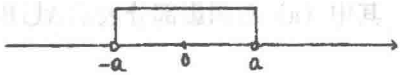

图 1-2

同理，$\{x \mid |x| \leq a\} = \{x \mid -a \leq x \leq a\}$

(6) 如果 $b>0$，则 $\{x \mid |x|>b\} = \{x \mid x>b\} \cup \{x \mid x<-b\}$

几何意义如图 1-3 所示。

图 1-3

同理，$\{x \mid |x| \geqslant b\} = \{x \mid x \geqslant b\} \cup \{x \mid x \leq -b\}$

(7) $|x+y| \leq |x|+|y|$　此式称为三角不等式。

(8) $|x-y| \geqslant |x|-|y|$

(9) $|xy| = |x| \cdot |y|$

(10) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|-x|}{|y|}$，$y \neq 0$

根据绝对值的定义不难验证这些性质。

2. 区间

设 a，b 为实数，且 $a<b$。

(1) 满足不等式 $a<x<b$ 的所有实数 x 的集合，称为以 a，b 为端点的开区间，记为 (a，b)，即

$(a, b) = \{x \mid a<x<b\}$

(2) 满足不等式 $a \leq x \leq b$ 的所有实数 x 的集合，称为以 a，b

为端点的闭区间，记为 $[a, b]$，即

$$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$$

(3) 满足不等式 $a < x \leqslant b$（或 $a \leq x < b$）的所有实数 x 的集合，称为以 a，b 为端点的半开半闭区间，记为 $(a, b]$（或 $[a, b)$），即

$$(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$$

$$[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$$

以上三类区间为有限区间。有限区间右端点 b 与左端点 a 之差 $b - a$ 称为区间的长。

还有下面几类无限区间：

(4) $(a, +\infty) = \{x \mid x > a\}$

$[a, +\infty) = \{x \mid x \geqslant a\}$

(5) $(-\infty, b) = \{x \mid x < b\}$

$(-\infty, b] = \{x \mid x \leq b\}$

(6) $(-\infty, +\infty) = \{x \mid -\infty < x < +\infty\}$ 即实数集 R。

这里 $-\infty$，$+\infty$ 分别读作负无穷大，正无穷大。

3. 邻域

高等数学讨论问题时，往往要研究在 x_0 点处的某种性质，但又不能孤立地静止在 x_0 点处讨论，而必须在 x_0 点左右附近全面地考察，我们用 邻域来表达 x_0 点的附近范围。

设 $\delta > 0$，x_0 为一实数，则集合 $\{x \mid |x - x_0| < \delta\}$ 称为点 x_0 的 δ 邻域。x_0 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径。显然，x_0 的 δ 邻域是由所有与 x_0 点的距离小于 δ 的点构成的集合，它也可表示成开区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$，如图 1－4 所示。

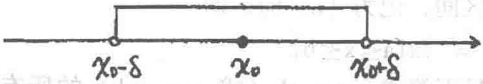

图 1-4

例如以 $x_0=2$ 为中心，$\delta=1$ 为半径的邻域 $\{x \mid |x-2|<1\}$ 可表示成区间（1，3）。

如果在 x_0 的 δ 邻域中去掉中心 x_0 点，则称该集合 $\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta\}$ 为以 x_0 为中心，δ 为半径的空心邻域。显然，x_0 为中心，δ 为半径的空心邻域由所有与 x_0 点的距离小于 δ 的异于 x_0 的点构成，它也可表成两个开区间的并 $(x_0-\delta, x_0) \cup (x_0, x_0+\delta)$，如图 1-5 所示。

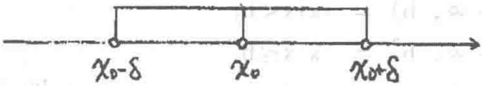

图 1-5

例如以 $x_0=3$ 为中心，$\delta=1$ 为半径的空心邻域 $\{x \mid 0<|x-3|<1\}$ 可表示成 $(2, 3) \cup (3, 4)$。

§1.2 函 数

一、常量和变量

在生产实践和科学研究中，会碰到各种各样的量。例如温度、时间、路程、重量、体积、物价、利率等。在某个问题的研究过程中，保持不变的量称为常量，可以取不同数值的量称为变量。常量常用字母 a，b，c，d……等来表示，变量常用字母 x， y，z，t……等来表示。

必须注意，常量和变量是相对于所讨论问题的具体场合来讲的。同一个量在某种情况下可以认为是常量，而在别的情况下，它可能是变量。例如商品的价格，在短期内可看成是常量，而在较长时间内就可能是变量。

二、函数关系

现实世界中各种变化着的量通常不是孤立地变化的，而是相互联系和相互制约的。先看下面几个例子：

例 1　圆的面积 S 与圆的半径 r 之间有关系式 $S=\pi r^2$，当 r 取（0，+∞）中的任何一个值时，按照这个关系可以唯一地确定 S 的一个相应的值。

例 2　气象台气温记录仪所记下的某一天 24 小时内的气温曲线如图 1－6 所示，横坐标 t 表示时刻，纵坐标 T 表示气温。这条曲线表示了时间变量 t 和温度变量 T 之间的联系。对于［0，24］上的任何一个值 t_0，通过图象可以唯一地确定 t_0 时刻的温度 T_0。

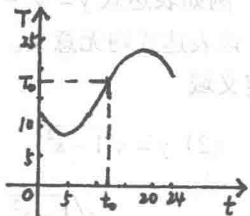

图 1－6

抛开上述例子中量的实际意义，我们看到它们都表达了两个变量在变化过程中的依赖关系。这种依赖关系，简单地说就是一种对应规则。当其中一个变量在某一范围内每取一个数值时，按

照这个规则，另一个变量有唯一确定的值与之对应。由此，我们可以抽象出函数的定义，用集合的语言叙述如下。

定义 1.1 设D 是一个非空实数集。如果有一个对应规则 f，使得对于 D 中任一元素 x，都有一个唯一确定的实数 y 与之对应，则称 f 为定义在 D 上的函数关系，或称变量 y 是变量 x 的函数，记作 $y=f(x)$，$x\in D$。x 称为自变量，y 称为因变量，集合 D 称为函数的定义域，也可记作 $D(f)$。

当自变量 x 在定义域 D 中取某一个值 x_0 时，因变量 y 的相应取值称为当 $x=x_0$ 时的函数值，记作 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$。

当自变量 x 取遍定义域 D 中每一个值时，相应的函数值的全体称为函数 $y=f(x)$ 的值域，记作 Z 或 $Z(f)$，即

$$Z(f)=\{y|y=f(x),\ x\in D\}$$

关于函数的定义域，在实际问题中，要根据变量的实际变化范围来确定，例如例 2 中的函数的定义域为 $[0,24]$。除此之外，当函数用一个数学表达式来表示并且未注明定义域时，规定其定义域是使表达式有意义的所有 x 的集合。值得注意的是，函数的定义域是一个非空集合。例如表达式 $y=\sqrt{-x^2-1}$就不是一个函数，因为对任意实数 x，该表达式均无意义。

例 3　确定下列函数的定义域

(1) $y=\dfrac{1}{1-x}$　　　(2) $y=\sqrt{1-x^2}$

(3) $y=\lg(2x-1)$　　　(4) $y=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{\lg(2x-1)}$

解 (1) 除 $x=1$ 使分母为零外，x 取其它任何实数，函数式都有意义，因此函数的定义域为 $\{x|x\neq1\}$，或写成 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$

(2) 要使$\sqrt{1-x^2}$有意义，必须$1-x^2\geqslant0$ 即 $x^2\leqslant1$ 亦即 $-1\leqslant x$

$\leqslant 1$，因此其定义域为 $\{x \mid -1 \leqslant x \leqslant 1\}$ 或 $[-1, 1]$

(3) 要使 $\lg(2x-1)$ 有意义，必须 $2x-1>0$ 即 $x>\frac{1}{2}$，故所求定义域为 $\{x \mid x>\frac{1}{2}\}$ 或 $(\frac{1}{2}, +\infty)$

(4) 要使表达式有意义，必须 $1-x^2 \geqslant 0$ 且 $2x-1>0$ 且 $\lg(2x-1) \neq 0$，即 $-1 \leqslant x \leqslant 1$ 且 $x>\frac{1}{2}$ 同时 $x \neq 1$，因此函数的定义域为 $\{x \mid \frac{1}{2}<x<1\}$ 或 $(\frac{1}{2}, 1)$

函数 $y=f(x)$ 中的"f"表示函数中的对应规则，即对每一个 $x \in D(f)$，按规则 f，有一个确定的 y 值与之对应。

例 4　设 $y=f(x)=x^2-1$，求 $f(2)$，$f(t)$，$f(x+1)$，$f(f(x))$

解 我们把函数 $y=f(x)=x^2-1$ 想象成一组运算的框架：

$$f(\quad)=(\quad)^2-1$$

于是

$$f(2)=2^2-1=3$$
$$f(t)=t^2-1$$
$$f(x+1)=(x+1)^2-1=x^2+2x$$
$$f(f(x))=(f(x))^2-1=(x^2-1)^2-1=x^4-2x^2$$

例 5　已知 $f(\sin x)=\cos 2x$，求 $f(x)$

解　我们把 $\sin x$ 看作一个整体，令 $t=\sin x$，因为

$$f(\sin x)=\cos 2x=1-2(\sin x)^2$$

所以

$$f(t)=1-2t^2$$

从而 $f(x)=1-2x^2$

函数涉及到定义域、对应规则和值域三个因素。很明