



戴嘉尊 张鲁明 编著

数学物理方程

SHUXUE WULI FANGCHENG

(第2版)

东南大学出版社

SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

数 学 物 理 方 程

(第 2 版)

戴嘉尊 张鲁明 编著

东南大学出版社

· 南京 ·

内 容 提 要

本书是编者在南京航空航天大学数学系讲授“数学物理方程”课程的讲义基础上修改而成。本书力图体现教改精神,重视基本理论、基本方法,重视理论联系实际,讲解深入浅出。全书共分7章,详尽讨论了三类典型方程的推导、解法和适定性,并附有一定的习题供读者练习之用。

本书可作为数学类各专业本科生和理工科有关专业研究生的教材,教学时数为60~70学时,也可供广大高校有关教师和科技工作者选作为参考书。

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方程 / 戴嘉尊, 张鲁明编著. —2 版.

—南京: 东南大学出版社, 2012. 4

ISBN 978-7-5641-3364-1

I. ①数… II. ①戴…②张… III. ①物理数学方程—高等学校—教材 IV. ①O175.24

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 034649 号

数学物理方程(第2版)

出版发行 东南大学出版社

社 址 南京市四牌楼2号(邮编:210096)

出 版 人 江建中

责任编辑 吉雄飞

电 话 (025)83793169(办公室), 83362442(传真)

经 销 全国各地新华书店

印 刷 南京玉河印刷厂

开 本 700mm×1000mm 1/16

印 张 12.75

字 数 250千字

版 次 2012年4月第2版

印 次 2012年4月第1次印刷

书 号 ISBN 978-7-5641-3364-1

定 价 25.00元

本社图书若有印装质量问题,请直接与营销部联系,电话:025-83791830。

第 2 版修订说明

首先让我们怀着沉痛的心情悼念南京航空航天大学数学系教授、博士生导师、我的同事、本书编者戴嘉尊先生. 先生渊博的知识、勤奋的工作精神、谦和的为人给我们留下了深刻的印象. 2001—2002 年先生抱病完成了该教材的编写出版工作后, 就匆匆地离开了我们, 离开了他所倾注了毕生精力的教育事业. 每当我使用该教材时, 都会想起先生送我这本教材时的情景, 看着书的扉页上先生亲笔的签名和“张老师斧正”的字样, 都会引起我对先生深深的怀念.

适逢该教材出版十周年之际, 应出版社之邀, 修订本书, 我深感荣幸. 我已数十次使用本书作为教材, 对先生在前言中对本教材的评价有着一致的看法. 因此, 此次仅就一些印刷错误进行了修正, 另外结合自己的使用情况, 在部分章节增加了一些习题, 而有些习题已在例题中出现, 故给予删除或修改.

由于水平所限, 这次修订必有疏漏之处, 恳请读者批评、指正.

张鲁明
2012 年 2 月

前 言

本书是在多年来为我校数学系信息与计算科学本科生和部分工科专业硕士研究生开设“数学物理方程”课程的讲义基础上修改而成的,可供大学数学系本科生和工科研究生学习使用,也可作为广大从事本门课程教学的教师参考.

“数学物理方程”不仅是大学数学系的一门重要基础课,也是广大理工科研究生必须具备的基础知识,不论从事基础研究,还是工程技术开发工作都离不开它.

全书共分7章和1个附录,系统介绍了三类典型方程的推导、解法和适定性.本书内容较丰富、全面、简练,力图体现教改精神,重视基本理论、基本解法,重视本门学问创新思想的发展;讲解深入浅出,重视教学法,特别注意介绍研究思想、方法的来龙去脉和实际应用,对学科的发展也加以了适当的重视.

本书在编写过程中得到了南京航空航天大学理学院领导和同事们的大力支持和帮助,深表谢意.江苏省工业与应用数学学会、东南大学应用数学系、东南大学出版社在本书的出版过程中给予了大力支持,特别是东南大学数学系管平教授仔细地阅读了全部书稿,提出了非常宝贵的意见,在此一并表示感谢.

我还要感谢在本书成稿过程中我的研究生们的工作,特别是研究生王东红同志挑选了所有习题并进行了演算,为本书质量的提高付出了辛勤的劳动.

由于编者水平有限,才疏学浅,书中定有许多缺点、错误,恳请不吝指教.

编者
2001年11月

目 录

1 数学物理中的典型方程和定解问题	1
1.1 典型方程的推导	1
1.1.1 弦振动方程和定解条件	1
1.1.2 热传导方程和定解条件	6
1.1.3 位势方程和定解条件	9
1.1.4 流体力学基本方程组	11
1.2 偏微分方程的基本概念	15
1.3 2 阶线性偏微分方程的化简与分类	17
1.3.1 两个自变量 2 阶线性偏微分方程的化简	17
1.3.2 两个自变量 2 阶线性偏微分方程的分类	23
1.3.3 多个自变量 2 阶线性偏微分方程的分类	26
1.4 定解问题的适定性	28
习题 1	29
2 分离变量法	32
2.1 齐次边界条件有界弦自由振动方程的混合问题的分离变量法	32
2.1.1 微分方程定解问题、分离变量法的基本思想	32
2.1.2 求微分方程的特解	33
2.1.3 定解问题的形式解	34
2.1.4 综合过程、解的存在性	35
2.1.5 举例	37
2.1.6 解的物理意义	39
2.2 齐次边界条件有界弦强迫振动方程的混合问题的分离变量法	40
2.3 非齐次边界条件的定解问题	45
2.4 解热传导方程的混合问题的分离变量法	47
2.4.1 齐次方程、齐次边界条件	48
2.4.2 非齐次方程、齐次边界条件	49
2.4.3 一般的第一初边值问题	51

2.4.4 具第三类边值条件的热传导方程混合问题分离变量法求解的例子	54
2.5 圆柱体定常温度分布的 Dirichlet 问题	58
习题 2	62
3 积分变换法	66
3.1 Fourier 变换的理论基础、基本性质	66
3.2 Fourier 变换的应用	70
3.2.1 热传导方程初值问题的解法	70
3.2.2 半无界问题	76
3.2.3 三维热传导方程初值问题	77
3.2.4 弦振动方程的 Fourier 变换解法	79
3.3 Laplace 变换的引入、基本性质	83
习题 3	88
4 波动方程	91
4.1 齐次弦振动方程的初值问题、D'Alembert 公式、广义解	91
4.2 D'Alembert 公式的物理意义、传播波、依赖区域、影响区域、决定区域 ...	97
4.2.1 D'Alembert 公式的物理意义、传播波	97
4.2.2 影响区域、依赖区域和决定区域	98
4.3 延拓法求解半无穷长弦振动方程初边值问题	99
4.4 三维波动方程的球面平均法、Poisson 公式	103
4.5 三维非齐次波动方程初值问题、推迟势	108
4.6 二维波动方程初值问题的降维法	111
4.7 依赖区域、决定区域、影响区域、特征锥	113
4.8 Poisson 公式的物理意义、Huygens 原理	115
4.9 能量不等式、波动方程初值问题解的唯一性和连续依赖性	116
习题 4	127
5 椭圆型方程	130
5.1 椭圆型方程边值问题的提法	130
5.2 Green 公式	132
5.3 调和函数的基本积分表达式和一些基本性质	133
5.4 Laplace 方程第一边值问题解的唯一性及稳定性	137
5.5 Green 函数、Dirichlet 问题的解	138
5.5.1 Green 函数的引出	138

5.5.2	Green 函数的基本性质	140
5.5.3	特殊区域的 Green 函数、静电源像法	144
5.5.3.1	球域的 Green 函数及 Dirichlet 问题的解	145
5.5.3.2	半空间的 Green 函数及 Dirichlet 问题的解	148
5.5.3.3	二维问题	149
5.6	调和函数的进一步性质——Poisson 公式的应用	151
习题 5		154
6	抛物型方程	157
6.1	热传导方程混合问题的适定性	157
6.2	热传导方程 Cauchy 问题的适定性	159
习题 6		163
7	基本解与解的积分表达式	165
7.1	广义函数及其性质	166
7.1.1	广义函数与 δ 函数的引出	166
7.1.2	广义函数与 δ 函数的一些基本性质	173
7.1.3	广义函数的导数	174
7.2	基本解、解的积分表达式	176
7.2.1	$Lu=0$ 型方程的基本解	176
7.2.2	$\frac{\partial u}{\partial t}=Lu$ 型方程 Cauchy 问题的基本解、解的积分表达式	182
7.2.3	$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=Lu$ 型方程 Cauchy 问题的基本解、解的积分表达式	184
习题 7		188
附录	Fourier 变换表和 Laplace 变换表	191
	Fourier 变换表	191
	Laplace 变换表	192

1 数学物理中的典型方程和定解问题

数学物理方程的研究对象是描述各种自然现象的微分方程、积分方程、函数方程等等,是一个十分广阔的领域.本书作为大学数学基础课程教材,主要致力于三类典型的偏微分方程定解问题,即双曲型方程、抛物型方程、椭圆型方程定解问题的讨论,期望通过这些内容的学习,使读者初步了解如何将生产和科学研究中的典型问题(如振动和波动、流体流动、电磁场、弹性、热传导、粒子扩散等)归结为偏微分方程定解问题以及了解这些问题的基本理论和求解这些问题的一些方法和技巧.

当前,数学技术已成为高科技的重要部分,数学建模、数值计算已越来越发挥重要作用,正成为广大数学工作者特别是应用数学工作者和计算数学工作者广阔的用武之地,而数学物理方程是一门重要的基础课,是进一步学习现代数学知识的准备,是利用数学知识为经济建设服务的桥梁.本章,我们首先从物理定律出发导出三类典型方程及其定解条件,介绍 2 阶线性偏微分方程的分类和化简为典则形式,最后讨论定解问题的适定性.

1.1 典型方程的推导

1.1.1 弦振动方程和定解条件

物理问题:一长为 l 的柔软、均匀细弦,拉紧以后让它离开平衡位置在垂直于弦线的外力作用下做微小横振动(即弦的运动发生在同一平面内,且弦的各点的位移与平衡位置垂直),研究在不同时刻弦线的运动规律.

分析可知弦的往返运动的主要原因是受到了张力的影响.弦在运动过程中其各点的位移、加速度、张力等都在不断变化,但它们遵循动量守恒定律:物体在某一时间间隔内动量的增量等于作用在物体上的所有外力在这一时段内产生的冲量.下面建立弦上各点的位移所满足的微分方程.

首先建立坐标系,取弦的平衡位置为 x 轴,在弦线运动的平面内,垂直于弦的平衡位置且通过弦线的一个端点的直线为 u 轴,这样在任意时刻 t ,弦上各点的位移为 $u(x, t)$,在弦上任意截取一段 AB ,其在平衡位置为区间 $[a, b]$,考虑在任意时间间隔 $[t_1, t_2]$ 内动量的变化.

设 ρ 为弦的线密度(kg/m), f_0 为作用在弦线上且垂直于平衡位置的强迫外力密度(N/m), 从而在任意时刻 t , 弦段 $\widehat{AB}$ 的动量为

$$\int_a^b \rho(x) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} \frac{\partial u}{\partial t} dx$$

考虑到弦做微小横振动, 可假定 $\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \ll 1$, 因此 $\widehat{AB}$ 的动量近似为 $\int_a^b \rho \frac{\partial u}{\partial t} dx$, 在时间间隔 $[t_1, t_2]$ 内弦段 $\widehat{AB}$ 在 u 方向动量变化为

$$\int_a^b \rho(x) \frac{\partial u(x, t_2)}{\partial t} dx - \int_a^b \rho(x) \frac{\partial u(x, t_1)}{\partial t} dx$$

为了写出作用在弦段 $\widehat{AB}$ 上所有 u 方向的外力产生的冲量, 注意到作用于 $\widehat{AB}$ 上的外力有两种: 外加强迫力(其线密度为 f_0) 和周围弦线通过端点 A, B 作用于弦段 $\widehat{AB}$ 的张力. 先考虑外加强迫力, 在时段 $[t_1, t_2]$, u 方向产生的冲量为

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_a^b f_0 dx$$

现在讨论作用在 $\widehat{AB}$ 端点的张力 T_A, T_B , 方向如图 1.1 所示.

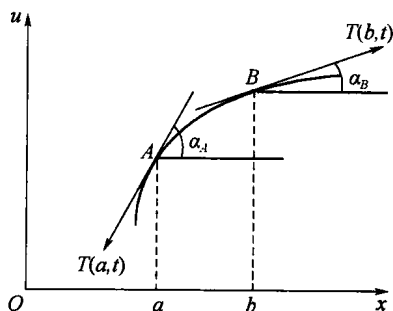


图 1.1

令 τ_u 表示 u 轴的单位向量, 则张力在 u 轴的分量为

$$T_A \cdot \tau_u = |T_A| |\tau_u| \cos(T_A, \tau_u) = -|T_A| \sin \alpha_A$$

$$T_B \cdot \tau_u = |T_B| |\tau_u| \cos(T_B, \tau_u) = |T_B| \sin \alpha_B$$

由假定为微小横振动, 数 $|\alpha_A|, |\alpha_B|$ 很小, $\sin \alpha_A \approx \tan \alpha_A, \sin \alpha_B \approx \tan \alpha_B$, 张力 T_A, T_B 的垂直分量在时段 (t_1, t_2) 内产生的冲量为

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} |T_B| \sin \alpha_B dt - \int_{t_1}^{t_2} |T_A| \sin \alpha_A dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} |T_B| \tan \alpha_B dt - \int_{t_1}^{t_2} |T_A| \tan \alpha_A dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[|T_B| \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \Big|_{x=b} - |T_A| \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \Big|_{x=a} \right] dt \end{aligned}$$

因此, 由动量定理, 在 u 方向上有

$$\begin{aligned} & \int_a^b \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho(x) \frac{\partial u}{\partial t} \right) dt dx \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \int_a^b f_0 dx dt + \int_{t_1}^{t_2} \left[|T_B| \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \Big|_{x=b} - |T_A| \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \Big|_{x=a} \right] dt \end{aligned}$$

在 x 方向有

$$\int_{t_1}^{t_2} (|T_B| \cos \alpha_B - |T_A| \cos \alpha_A) dt = 0$$

记 $|T_B| = T(x_b, t)$, $|T_A| = T(x_a, t)$, 又有

$$\begin{aligned}\cos \alpha_B &= \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha_B}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \bigg|_{x=b}}} \approx 1 \\ \cos \alpha_A &= \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha_A}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \bigg|_{x=a}}} \approx 1\end{aligned}$$

所以在 x 方向有

$$\int_{t_1}^{t_2} (|T_B| - |T_A|) dt = 0$$

根据 $[t_1, t_2]$ 的任意性知

$$|T_B| = |T_A| \quad (1.1)$$

记为 T . 因此在 u 方向有

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho(x) \frac{\partial u}{\partial t} \right) dx dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_a^b f_0 dx dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx dt$$

假定 u 对 x 和 t 存在 2 阶导数, 由 (t_1, t_2) 和 (a, b) 的任意性, 有

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho(x) \frac{\partial u}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f_0 \quad (1.2)$$

由于是微小横振动, 故 $u_x^2 \ll 1$, 因此有

$$s = \int_0^l \sqrt{1 + u_x^2} dx \approx l$$

应认为弦在振动过程中并未伸长, 则由虎克定律知道弦上每点的张力 T 的数值不随时间改变, 这时方程 (1.2) 为

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho(x) \frac{\partial u}{\partial t} \right) = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f_0 \quad (1.3)$$

如果弦是均匀的, 即 $\rho(x) = \rho$ 为常数, 方程 (1.2) 可写为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f \quad (1.4)$$

其中

$$a^2 = T/\rho, \quad f = f_0(x, t)/\rho$$

这是弦在强迫振动过程中其垂直位移满足的微分方程, 如果 $f = 0$, 即自由振动, 这时 u 满足微分方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.5)$$

(1.4) 和 (1.5) 是含有未知函数偏导数的方程, 其称为偏微分方程, 由于它们描写了均匀弦的微小横振动, 因此又称为弦振动方程. (1.4), (1.5) 分别刻画了在

受外力和不受外力的情况下的均匀弦微小横振动的一般规律.

一条弦线的特定振动状态还依赖于初始时刻弦的状态和通过弦线两端所受外界的影响. 这样, 为了确定一个具体的弦振动, 除了列出它所满足的方程外, 还需要写出它适合的初始条件和边界条件.

初始条件, 即在初始时刻 $t = 0$ 时弦上各点的位移和速度

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad (0 \leq x \leq l) \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x) \quad (0 \leq x \leq l) \quad (1.7)$$

其中 $\varphi(x), \psi(x)$ 为已知函数. 当 $\varphi(x) = \psi(x) = 0$ 时, 则为齐次初始条件.

对于空间变量 x 固定在区间 $[0, l]$ 中, 为确定弦的运动还需给出边界条件. 最简单的边界条件是已知端点的位移规律, 即弦线两端点被控制使 $u(0, t) = g_1(t), u(l, t) = g_2(t)$, 其中 g_1, g_2 是两个已知的 t 的函数. 这种边界条件被称为第一边值条件, 特别是当 $g_1 = g_2 = 0$ 时则称为第一类齐次边值条件. 另一种情况, 考虑弦的两端被缚在与 Ox 轴垂直的弹簧上, 即弦的两端固定在弹性支承上, 设在 $x = 0$ 和 $x = l$ 处弹簧的弹性系数分别为 k_0 和 k_l , 在靠近端点 $x = l$ 处任取一段 $[x_2, l]$, 并设作用于弦段 $[x_2, l]$ 上的张力 $T(x_2, t)$ 压缩 $x = l$ 端的弹簧 (拉伸时, 下面的推导仍合适), 这时位移 $u(l, t)$ 为负且弦曲线在 $[x_2, l]$ 上满足 $\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) > 0$ (如图 1.2 所示).

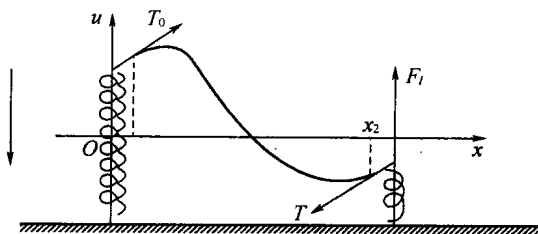


图 1.2

在时间段 $[t_1, t_2]$ 内, 沿 Ou 轴由动量守恒定律, 并注意到右端支承的弹性回复力 $F_l = -k_l u(l, t)$, 有

$$\int_{t_1}^{t_2} [-T \sin \alpha(x_2, t) - k_l u(l, t)] dt = \int_{x_2}^l [\rho u_t(x, t_2) - \rho u_t(x, t_1)] dx$$

设 u 及其 1 阶导数直到边界都是连续的, 又

$$\sin \alpha(x, t) \approx \tan \alpha(x, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$$

因此, 令 $x \rightarrow l$, 则有

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[-T \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) - k_l u(l, t) \right] dt = 0$$

由于 $[t_1, t_2]$ 是任意的, 故有

$$T \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) + k_l u(l, t) = 0$$

类似的, 在端点 $x = 0$ 处, 有

$$T \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) - k_0 u(0, t) = 0$$

特别的, 当 $k_0 \ll T, k_l \ll T$, 则近似有

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = 0$$

这时弹簧的约束力非常小, 我们说弦的两端是自由的.

若 $k_0 \gg T, k_l \gg T$, 则近似地化为第一类边界条件

$$u(0, t) = u(l, t) = 0$$

如果弦的两端还加有持续的外力, 则有边界条件

$$T \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) - k_0 u(0, t) = \mu(t)$$

$$T \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) + k_l u(l, t) = \nu(t)$$

因此, 一般而言, 弦振动方程有三类边界条件:

第一类边界条件

$$u(0, t) = g_1(t), \quad u(l, t) = g_2(t) \quad (1.8)$$

第二类边界条件

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \mu(t), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = \nu(t) \quad (1.9)$$

第三类边界条件

$$\begin{cases} T \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) - k_0 u(0, t) = \mu(t), \\ T \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) + k_l u(l, t) = \nu(t) \end{cases} \quad (1.10)$$

其中 k_0, k_l, T 都是大于零的常数, $\mu(t), \nu(t)$ 为给定的函数.

通常称初始条件和边值条件为定解条件, 一个偏微分方程加相应的定解条件组成一个定解问题, 为了确定一条具体弦的振动规律, 我们要去求解一个定解问题, 既有初值条件又有边值条件的定解问题称为混合问题或初边值问题, 也称为混合初边值问题.

如果对于弦的某一段考虑其运动规律, 在所考虑的时间内弦的端点的影响可以忽略不计, 这时可以认为弦是无穷长的, 不必考虑边界条件, 只要考虑初始条件即可. 这种由方程及初始条件组成的定解问题称为初值问题 (Cauchy 问题). 一维齐次弦振动方程 Cauchy 问题提法如下:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (-\infty < x < +\infty, t > 0); \\ u|_{t=0} = \varphi(x) & (-\infty < x < +\infty); \\ \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x) & (-\infty < x < +\infty) \end{cases}$$

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 描写弦的振动,它产生了波的传播,因此也称为一维波动方程.

类似的,考虑薄膜微小横振动,则可得二维波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f(x, y, t)$$

1.1.2 热传导方程和定解条件

物理问题:在三维空间中,考虑一均匀、各向同性的物体 Ω (如图 1.3 所示),假定它内部有热源,并且与周围介质有热交换,研究物体内部温度的分布状态.

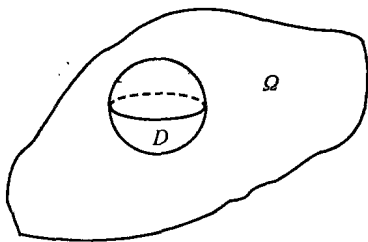


图 1.3

考虑到物体内部温度各部分不同,则要产生热量的传递,它们遵循能量守恒定律:物体内部热量的增加等于通过物体的边界流入的热量与由物体内部的热源产生的热量的总和.

在物体 Ω 内部任取一小块体积 D ,在时间段 $t_1 \rightarrow t_2$ 内对 D 使用能量守恒定律,设温度为 $T(x, y, z, t)$ (K),比热为 c (J/(kg · K)),密度为 ρ (kg/m³),热源强度为 f_0 (J/(kg · s)). t_1 时刻 D 内的热量为

$$\iiint_D c\rho T(x, y, z, t_1) dx dy dz$$

t_2 时刻 D 内的热量为

$$\iiint_D c\rho T(x, y, z, t_2) dx dy dz$$

则 $[t_1, t_2]$ 时段内 D 内的热量增量为

$$\begin{aligned} & \iiint_D c(x, y, z) \rho(x, y, z) [T(x, y, z, t_2) - T(x, y, z, t_1)] dx dy dz \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \iiint_D c(x, y, z) \rho(x, y, z) \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial t} dx dy dz dt \end{aligned}$$

考虑流入 D 的热量和 ∂D 上面积元 dS ,以 $\mathbf{n}$ 表示点 (x, y, z) 处曲面面元 dS 的流向,并规定 $\mathbf{n}$ 所指的那一侧为 dS 的正侧.

由热传导中的 Fourier 实验定律得知,在 dt 时间内,从面元 dS 的负侧流向正侧

的热量为

$$dQ = -k(x, y, z) \frac{\partial T}{\partial n} dS dt$$

其中, $k(x, y, z)$ 为物体在点 (x, y, z) 处的热传导系数, 取正值; $\frac{\partial T}{\partial n}$ 为温度函数在点 (x, y, z) 处沿 n 的方向导数. 因热量的流向与温度梯度的方向相反, 即若 $\text{grad} T$ 与曲面的法向相交成锐角, 则 $\frac{\partial T}{\partial n} = \text{grad} T \cdot n^0$ 为正 (n^0 为单位法向), 沿 n 的方向穿过曲面时温度要增加, 而热流方向却从温度高的一侧指向低的一侧, 于是沿 n 方向流过曲面的热量应该是负的, 故等式右端出现负号.

因此, 以 n 表示 ∂D 的外法线方向, 通过边界 ∂D 在 $[t_1, t_2]$ 时段内流入 D 内的热量为

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\oint_{\partial D} k \frac{\partial T}{\partial n} dS \right) dt$$

物体内部在 $[t_1, t_2]$ 时段内, 由热源产生的总热量为

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_D \rho f_0 dx dy dz$$

则由能量守恒定律, 有

$$\int_{t_1}^{t_2} \iiint_D c \rho \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz dt = \int_{t_1}^{t_2} \oint_{\partial D} k \frac{\partial T}{\partial n} dS dt + \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_D \rho f_0 dx dy dz$$

假设函数 T 关于变量 t 一次连续可微, 关于变量 x, y, z 二次连续可微, 则由奥-高公式, 得

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \iiint_D c \rho \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_D \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] dx dy dz \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_D \rho f_0 dx dy dz \end{aligned}$$

如果上述方程中各被积函数连续, 则由 $[t_1, t_2] \subset (0, \infty)$, $D \subset \Omega$ 的任意性可得在 Ω 内成立

$$c \rho \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (k \nabla T) + \rho f_0$$

假定物体是均匀且各向同性的, 即 c, ρ, k 都是常数, 记 $a^2 = \frac{k}{c \rho}$, $f = \frac{f_0}{c}$, 则得到物体内部各点温度分布需满足的微分方程

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + f \quad (1.11)$$

称为三维热传导方程.

作为特例,如果考虑的是一根细杆,杆的侧表面与外界没有热交换,并且同一截面上各点有相同温度,则温度函数 T 仅与一个空间变量 x 及时间 t 有关,这时方程就是一维热传导方程

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + f(x, t) \quad (1.12)$$

类似的,在研究薄板的温度分布时,若温度与薄板的厚度无关,则有二维热传导方程

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + f(x, y, t) \quad (1.13)$$

一个区域中温度分布的确定,要求满足热传导方程(1.11)(或(1.12), (1.13)),它描写了区域 Ω 中温度变化的一般规律,为了具体确定特定情况下的温度分布,还需给出初始温度分布和外界的影响:

初始温度分布即为 $T|_{t=0} = \varphi(x, y, z)$, 其中 φ 为已知函数,表示初始时刻 Ω 内各点的温度分布.

关于边界条件,从物理现象发生的过程来看可以有 Ω 表面 $\partial\Omega$ 上温度分布已知,或者通过 $\partial\Omega$ 表面的单位面积元素上的热量已知,或者通过 $\partial\Omega$ 与周围空间介质的热量交换规律已知. 这三种边界状况具体描述如下.

(1) 已知在曲面 $\partial\Omega$ 上每点的温度,这时边界条件

$$T|_{\partial\Omega} = \psi(x, y, z, t) \quad (1.14)$$

称为第一类边界条件.

(2) 给定曲面 $\partial\Omega$ 上每点的热流量

$$q_n = -k \frac{\partial T}{\partial n}$$

即

$$\frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = \psi(x, y, z, t) \quad (1.15)$$

其中, ψ 是表示 $\partial\Omega$ 上热流量的已知函数; n 表示 $\partial\Omega$ 的外法线方向. $\psi \geq 0$ 表示流入, $\psi \leq 0$ 表示流出. 称(1.15) 为第二类边界条件.

(3) 若通过物体表面与周围空间介质之间有热量交换,设周围空间介质的温度为 T_0 ,根据热传导实验定律(Newton 冷却定律):单位时间从物体表面的单位面积传递给周围空间介质的热量正比于介质表面和周围空间介质之间的温差,即

$$q_n = \alpha(T - T_0)$$

其中, α 是热量交换系数,假设它不依赖于温度的差值,并且对整个介质都是相同的.

根据能量守恒定律,此热流量应等于单位时间内流过单位面积上的热流量. 于

是在 $\partial\Omega$ 上有下列边界条件:

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} = \alpha(T - T_0).$$

其中, n 表示曲面 $\partial\Omega$ 的外法线方向.

令 $\frac{\alpha}{k} = h$, 则

$$\left(\frac{\partial T}{\partial n} + hT \right) \Big|_{\partial\Omega} = \phi(x, y, z, t) \quad (1.16)$$

$$\phi(x, y, z, t) = \frac{\alpha T_0}{k}$$

称(1.16)为第三类边界条件.

给定热传导方程、初始条件和边值条件就构成了热传导方程的混合问题或初边值问题.

如果未知函数为 u , 则

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) & ((x, y, z) \in \Omega, t > 0); \\ u|_{t=0} = \varphi(x, y, z) & ((x, y, z) \in \Omega); \\ \left(\frac{\partial u}{\partial n} + hu \right) \Big|_{\partial\Omega} = \phi(x, y, z, t) & (t > 0) \end{cases}$$

是热传导方程第三类混合初边值问题.

如果考虑物体内部的一部分, 在所考虑的时间内其边界的影响可以忽略不记, 则可以认为区域是无穷的. 因此, 可以不考虑边界条件, 仅有初始条件, 这时如前称为 Cauchy 问题. 三维热传导方程的 Cauchy 问题的提法为

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f(x, y, z, t) & ((x, y, z) \in \mathbf{R}^3, t > 0); \\ u|_{t=0} = \varphi(x, y, z) & ((x, y, z) \in \mathbf{R}^3) \end{cases} \quad (1.17)$$

方程(1.11)–(1.13)不仅可以用来刻画热传导现象, 也可以用来刻画扩散现象, 这时称(1.11)–(1.13)为扩散方程.

1.1.3 位势方程和定解条件

对于热传导方程(1.11), 如果温度不随时间变化, 即考虑稳定温度场问题, 则温度 T 由如下方程控制:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = g \quad ((x, y, z) \in \Omega) \quad (1.18)$$

称为三维 Poisson 方程. 特别当 $g = 0$, 则得到三维 Laplace 方程.