■ 大学公共课系列教材

普通高等教育"十二五"规划教材

线性代数

XIANXING
DAISHU

杜　红　赵春燕　张向华◎编

DAXUE GONGGONGKE XILIE JIAOCA

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

■ 大学公共课系列教材

普通高等教育"十二五"规划教材

线性代数

XIANXING
DAISHU

杜 红 赵春燕 张向华◎编

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

图书在版编目(CIP) 数据

线性代数／杜红主编.—北京：北京师范大学出版社，2011.11

（大学公共课系列教材）

ISBN 978-7-303-13535-6

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①杜… Ⅲ. ①线性代数－高等学校－教材 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 203745 号

营销中心电话　010-58802181 58808006
北师大出版社高等教育分社网　http://gaojiao.bnup.com.cn
电子信箱　beishida168@126.com

出版发行：北京师范大学出版社 www.bnup.com.cn
　　　　　北京新街口外大街 19 号
　　　　　邮政编码：100875
印　　刷：北京中印联印务有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：170 mm × 230 mm
印　　张：12.5
字　　数：210 千字
版　　次：2011 年 11 月第 1 版
印　　次：2011 年 11 月第 1 次印刷
定　　价：22.00 元

策划编辑：胡　宇　　　责任编辑：岳昌庆　胡　宇
美术编辑：毛　佳　　　装帧设计：天泽润
责任校对：李　菡　　　责任印制：李　啸

内容简介

本书的编写符合教育部颁发的工科本科线性代数课程教学大纲的基本要求．全书共分五章：第1章，行列式；第2章，矩阵及其初等变换；第3章，线性方程组；第4章，矩阵的特征值和二次型；第5章，线性空间与线性变换，每章末配有两套习题，书末附有部分习题答案．本书给出了几个代数模型的建立及求解，并用Matlab软件编写程序对模型进行计算．第1至第4章的教学学时约为40学时，第5章可供数学要求较高的专业选用．

前　言

本书的编写是以黑龙江科技学院“线性代数”精品课程建设为契机，结合学校的“大工程、大实践、大德育”教育理念，进行“线性代数”教材改革．本书的编写工作由黑龙江科技学院授课教师结合多年的教学经验及课程建设成果进行的，适合于一般高等工科院校各专业的学生使用．本书编写的宗旨是体现线性代数应用性强这一特点，注重对基础知识的应用，淡化解题技巧，并结合 Matlab 软件进行计算，以适应时代的发展．

本书的编写符合教育部颁发的工科本科“线性代数”课程教学大纲的基本要求．在编写过程中，编者注重知识点之间的衔接，注重基本理论知识的引入，注重基本方法的讲解．同时，注意反映学科的应用，丰富学生的知识与提高学生的应用能力．本书每章配有两套习题，习题一重在考查对基本知识的理解，习题二重在对基本知识的总结和应用．书末附有用 Matlab 软件计算的相关命令和解决实际问题的一些数学模型．它是在完成基础理论课学习的基础上，学习如何应用现代计算手段快速解决实际问题，进而提高学生应用理论知识解决实际问题的能力．书中还给出常用术语的英汉对照，为学生阅读外文文献提供方便．本书每章末都介绍了一些数学家及数学轶事，带有一定的趣味性，激发学生的兴趣，使学生能了解数学历史．

本书的编写受到了哈尔滨工业大学、佳木斯大学等院校的帮助和支持，同时对本教材的编写提出了宝贵的意见，谨在此表示衷心的感谢．编者付出了很多的努力，但由于水平有限，书中一定存在着欠缺和不足，恳请各位同行不吝指正，从而使我们更明确教材中的短长，进而扬长避短，改进我们的教学．

编　者

2010 年 8 月 10 日

目 录

第 1 章　行列式

行列式的理论起源于线性方程组，是一个重要的数学工具，在数学的许多分支及其他学科的研究中都有广泛的应用. 本章主要介绍全排列、逆序数、n 阶行列式的定义，研究 n 阶行列式的性质、计算方法及用行列式求解 n 元线性方程组的克拉默法则.

§ 1.1　二阶行列式和三阶行列式

1.1.1　二阶行列式

在许多实际问题中，人们常常会遇到求解线性方程组的问题. 我们在初等数学中曾经学过如何求解二元一次方程组和三元一次方程组. 例如，二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $x_i(i=1, 2)$ 表示未知量，$a_{ij}(i=1, 2; j=1, 2)$ 表示未知量的系数，$b_i(i=1, 2)$ 表示常数项. 当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，用消元法可求得(1.1)的唯一解

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}, \\ x_2 = \dfrac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \end{cases} \tag{1.2}$$

观察(1.2)式的特点，式中分子、分母都是四个数分两对相乘再相减而得. 其中分母是由方程组(1.1)的四个系数确定，把这四个数按它在方程组(1.1)中的位置，可制成二行二列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \tag{1.3}$$

定义 1.1　代数和 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 称为数表(1.3)的二阶行列式(second order determinant)，记作

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}. \tag{1.4}$$

其中 $a_{ij}(i=1, 2; j=1, 2)$ 称为行列式的元素，a_{ij} 的下标 i 表示它所在行的序号，称为行标，j 表示它所在列的序号，称为列标.

二阶行列式的计算可遵循如图 1.1 的对角线法则(diagonal principle). 图 1.1

中实线称为行列式的主对角线，虚线称为行列式的副对角线，即二阶行列式的值等于它的主对角线上两个元素的乘积减去副对角线上两个元素的乘积.

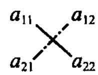


图 1.1

根据定义 1.1，方程组(1.1) 的唯一解可用行列式表示为

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

若记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

则当 $D \neq 0$ 时，方程组(1.1) 的唯一解可简单表示为 $x_j = \frac{D_j}{D}(j = 1, 2)$.

其中 D 称作方程组(1.1) 的系数行列式，$D_j(j = 1, 2)$ 就是用方程组的常数列代替系数行列式的第 j 列所得的行列式.

例 1.1 求解方程组$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 = 11. \end{cases}$

解 计算二阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 7, D_1 = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 11 & 2 \end{vmatrix} = 21, D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 11 \end{vmatrix} = 7.$$

由 $D = 7 \neq 0$，则方程组有唯一解 $x_1 = \frac{D_1}{D} = 3$，$x_2 = \frac{D_2}{D} = 1$.

例 1.2 设 $D = \begin{vmatrix} \lambda^2 & \lambda \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$，问:(1) 当 λ 为何值时 $D = 0$；(2) 当 λ 为何值时 $D \neq 0$?

解
$$D = \begin{vmatrix} \lambda^2 & \lambda \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda.$$

若 $\lambda^2 - 3\lambda = 0$，则 $\lambda = 0$ 或 $\lambda = 3$. 因此可得：

(1) 当 $\lambda = 0$ 或 $\lambda = 3$ 时，$D = 0$；(2) 当 $\lambda \neq 0$ 且 $\lambda \neq 3$ 时，$D \neq 0$.

1.1.2 三阶行列式

类似地，对于三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases} \tag{1.5}$$

用消元法求方程组的解. 我们引入三阶行列式的定义. 利用方程组(1.5) 的九个系数可制成三行三列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \tag{1.6}$$

定义 1.2　代数和

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31},$$

称为数表(1.6) 的三阶行列式(third order determinant)，记作

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \tag{1.7}$$

为了便于记忆，三阶行列式的计算可采用图 1.2 所示的三角形法则(triangle principle).

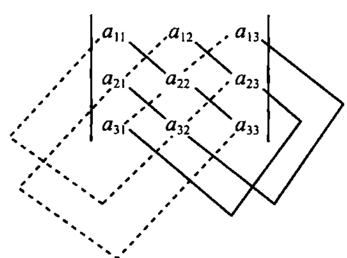


图 1.2

三条实线看做是平行于主对角线的连线，实线上的三个元素的乘积赋予“+”号，三条虚线看做是平行于副对角线的连线，虚线上的三个元素的乘积赋予“−”号.

三阶行列式的计算也可采用图 1.3 所示的添补法.

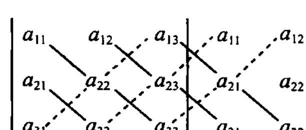


图 1.3

三条实线上的三个元素的乘积赋予“+”号，三条虚线上的三个元素的乘积赋予“−”号.

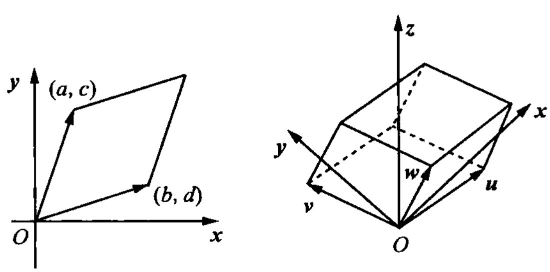
例 1.3 计算三阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

解
$$\begin{aligned} D &= 2\times(-5)\times 1+(-4)\times 3\times 1+1\times 1\times(-1)- \\ &\quad 1\times(-5)\times 1-1\times(-4)\times 1-2\times(-1)\times 3=-8. \end{aligned}$$

例 1.4 求解方程 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix}=0$.

解 方程左端的三阶行列式为
$$\begin{aligned} D &= 3x^2+4x+18-9x-2x^2-12 \\ &= x^2-5x+6. \end{aligned}$$
由 $x^2-5x+6=0$，解得 $x=2$ 或 $x=3$.

例 1.5 如图 1.4，设图(a)中向量 $\boldsymbol{x}=(a, c)$，$\boldsymbol{y}=(b, d)$，计算两个向量形成的平行四边形的有向面积.图(b)中向量 $\boldsymbol{u}=(2, -1, 0)$，$\boldsymbol{v}=(1, 2, -1)$，$\boldsymbol{w}=(1, -1, 2)$，计算三个向量形成的平行六面体的有向体积.



(a) (b)

图 1.4

解 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ 两个向量形成的平行四边形的有向面积为
$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc,$$
$\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{w}$ 三个向量形成的平行六面体的有向体积为
$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=9.$$

§1.2 全排列及其逆序数

观察二阶行列式和三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

可以发现二阶、三阶行列式的项数与行(列)标的排列有关，而且当行(列)标依自然顺序排好以后，其符号与列(行)标有关. 于是为了后文给出 n 阶行列式的概念，这里引入全排列与逆序数的概念.

定义 1.3 把 n 个不同元素排成一列，称为这 n 个元素的全排列(total permutation)，简称排列(permutation).

例如，(1) 自然数 1，2，3 构成的不同排列共有 $3! = 6$ 种，即

$$123，231，312，132，213，321.$$

(2) 由 n 个互异元素 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 构成的不同排列有 $n!$ 种.

定义 1.4 在 n 个非零的不同自然数中，规定从小到大的次序为标准次序. 设 $p_1p_2\cdots p_n$ 为这 n 个自然数的一个排列，如果某两个元素的先后次序与标准次序不同时，称这两个元素之间有 1 个逆序(inverse order). 排列中逆序的总和称为排列的逆序数，记作 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$.

例如，在 321 这个排列中，构成逆序的数对有 32，31，21，因此 $\tau(321) = 3$. 在 51423 这个排列中，构成逆序的数对有 51，54，52，53，42，43，因此 $\tau(51423) = 6$.

定义 1.5 逆序数为偶数的排列称为偶排列(even permutation)，逆序数为奇数的排列称为奇排列(odd permutation).

例如，321 为奇排列，51423 为偶排列. 按照逆序数的定义，计算逆序数可以从排列的右边算起，计算一共有多少个大数排列在小数的前面. 例如，我们要求排列 2754613 的逆序数，可以这样计算：

(1)3 前面有 6，4，5，7 四个大于 3 的数；

(2)1 前面有 6，4，5，7，2 五个大于 1 的数；

(3)6 前面有 7 比 6 大；

(4)4 前面有 5，7 两个大于 4 的数；

(5)5 前面有 7 比 5 大.

至此，再没有大数排在小数的前面了，于是

$$\tau(2754613)=4+5+1+2+1=13,$$

这是一个奇排列.

定义 1.6 把一个排列中某两个元素的位置互换，而其余元素的位置不动，就得到一个新排列. 这种从一个排列到另一个排列的变换称为对换(transposition)，元素 i 与 j 的对换记作(i,j). 将两个相邻的元素对换，称为相邻对换.

例如，排列 321，经过(1，2)对换，就变成 312. 我们知道 321 是奇排列，而 312 是偶排列，这样施行一次对换改变了排列的奇偶性.

定理 1.1 一个排列中的任意两个元素对换，改变排列的奇偶性.

证 先证相邻对换的特殊情形. 即排列

$$\cdots\cdots ij\cdots\cdots$$

经相邻对换(i,j)变成排列

$$\cdots\cdots ji\cdots\cdots$$

比较上面两个排列的逆序数：显然，i，j 以外的数彼此间的逆序情况在两个排列中是一样的；i，j 以外的数与 i 或 j 的逆序情况在两个排列中也是一样的. 现在看 i，j，若 $i<j$，则经对换(i,j)后，逆序数增加 1，即后一排列的逆序数比前一排列多 1；若 $i>j$，则经对换(i,j)后，逆序数减少 1，即后一排列的逆序数比前一排列少 1. 无论哪种情形，都改变了排列的奇偶性. 这就证明了相邻对换改变排列的奇偶性.

再证一般情形. 设排列

$$\cdots\cdots ik_1k_2\cdots k_sj\cdots\cdots$$

经对换(i,j)变成排列

$$\cdots\cdots jk_1k_2\cdots k_si\cdots\cdots$$

容易看出，这一对换(i,j)可以通过如下 $2s+1$ 次相邻对换来实现，即将排列

$$\cdots\cdots ik_1k_2\cdots k_sj\cdots\cdots$$

经 s 次相邻对换变成如下排列

$$\cdots\cdots k_1k_2\cdots k_sij\cdots\cdots$$

再经 $s+1$ 次相邻对换变成排列

$$\cdots\cdots jk_1k_2\cdots k_si\cdots\cdots$$

由于每施行一次相邻对换便改变一次排列的奇偶性，而 $2s+1$ 为奇数，因此排列 $\cdots\cdots ik_1k_2\cdots k_sj\cdots\cdots$ 与排列 $\cdots\cdots jk_1k_2\cdots k_si\cdots\cdots$ 的奇偶性相反. 这就证明了在一般情形下，对换改变排列的奇偶性.

推论 1.1　奇(偶)排列变成标准排列的对换次数为奇(偶)数.

例 1.6　在 1，2，3，4，5，6，7，8，9 组成的下列排列中，选择 i 和 j，使得 $58i419j73$ 为奇排列.

解　若 $i=2$，$j=6$，则求得 $\tau(582419673)=18$. 再由定理 1.1，对换改变排列的奇偶性，从而可以得到，当 $i=6$，$j=2$ 时，$58i419j73$ 为奇排列.

§1.3 n 阶行列式的定义

由全排列及逆序数的定义，总结二阶、三阶行列式的规律如下：

(1) 项数正好是阶数的阶乘，即二阶行列式的项数为 2!，三阶行列式的项数为 3!；

(2) 每一项都是由每一行每一列的一个元素组成的乘积，而且这些元素是取自不同的行和不同的列；

(3) 带"+"号和带"−"号的项数各占一半，而且当行标依自然顺序排好以后，其符号与列标排列的逆序数有关，偶排列的带"+"号，奇排列的带"−"号. 于是，二阶、三阶行列式可分别记作

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2} (-1)^{\tau(j_1j_2)} a_{1j_1}a_{2j_2},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3} (-1)^{\tau(j_1j_2j_3)} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3},$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2}$ 表示对 1，2 两个数的所有排列 j_1j_2 求和，$\sum\limits_{j_1j_2j_3}$ 表示对 1，2，3 三个数的所有排列 $j_1j_2j_3$ 求和.

根据这个规律，我们给出 n 阶行列式的定义.

定义 1.7 用 n^2 个元素 a_{ij} $(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ 制成 n 行 n 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

该数表中所有取自不同的行、不同的列的 n 个元素乘积的代数和

$$D = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

称为 n 阶行列式(n-order determinant)，其中 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 阶排列求和，记为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

或

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn},$$

简记为 $\det(a_{ij})$ 或 $|a_{ij}|$.

特别地，一阶行列式 $|a_{11}|=a_{11}$(注意:这里记号“$|\cdot|$”不是绝对值).

例 1.7　计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解　该行列式的特点是主对角线以下的元素全为零(以后称这种行列式为上三角行列式). 根据定义 $D=\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{rj_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$，在此行列式中，当 $j_p<p$ 时，元素 $a_{pj_p}=0$. 故在定义式中，可能不为零的项中的任意因子 a_{pj_p} 必须满足 $j_p\geqslant p$，即

$$j_1\geqslant 1,\ j_2\geqslant 2,\ \cdots,\ j_{n-1}\geqslant n-1,\ j_n\geqslant n.$$

能满足上述关系的列标排列只有一个标准排列 $12\cdots n$，$\tau(12\cdots n)=0$. 故有

$$D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

同理可得下三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

和对角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

即三角行列式和对角行列式的值都等于主对角线元素的乘积.

例 1.8 计算 n 阶行列式(其副对角线以上的元素都为零)

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 在 D_n 的 $n!$ 项中,仅剩下一项 $(-1)^{\tau(n(n-1)\cdots 21)}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}$ 可能不为零,且该项列标排列的逆序数为

$$\tau(n(n-1)\cdots 21) = (n-1)+(n-2)+\cdots+2+1+0 = \frac{n(n-1)}{2},$$

故

$$D_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}.$$

同理可得行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}.$$