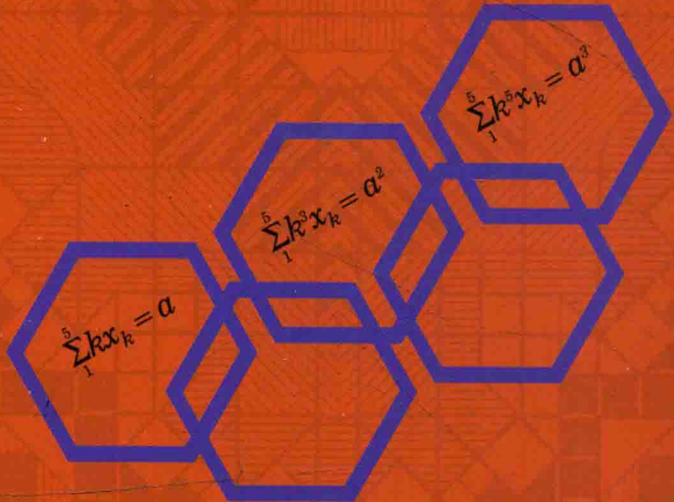
PRIMARY SEQUENCE
STUDY AND APPRECIATION (I)

初等数列研究与欣赏（上）

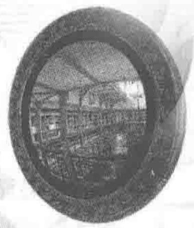
● 邓寿才 编著



哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

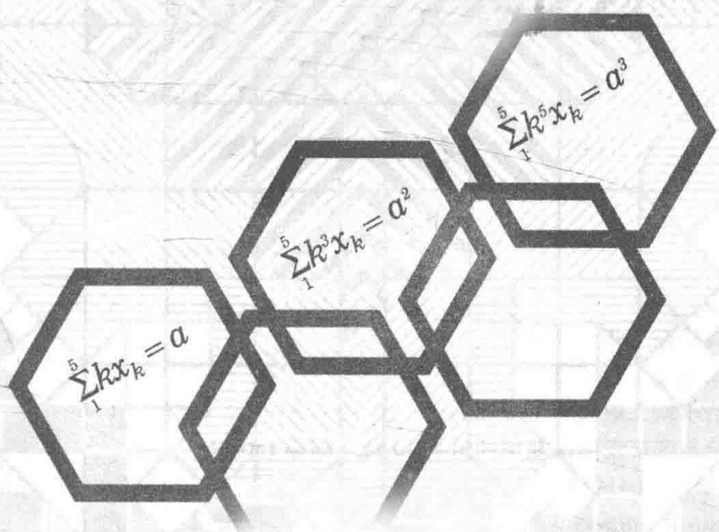
PRIMARY SEQU

STUDY AND APPRECIATION (I)



初等数列研究与欣赏（上）

邓寿才　编著



哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书详细而全面地介绍了初等数列的分类及其研究方法,数列趣题等,并详细介绍了初等数列的各种性质、数列题常用的解题方法及数列题的一题多解. 同时介绍了一些形式优美的数列,供读者参考.

本书可作为大、中学生及初等数学爱好者学习数列的参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

初等数列研究与欣赏. 上/邓寿才编著. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2016. 1

ISBN 978-7-5603-5736-2

Ⅰ. ①初… Ⅱ. ①邓… Ⅲ. ①初等数论 Ⅳ. ①O156. 1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 287377 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 刘春雷
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451-86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 哈尔滨市工大节能印刷厂
开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 23.5 字数 440 千字
版 次 2016 年 1 月第 1 版 2016 年 1 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-5736-2
定 价 48.00 元

目录

知识介绍

第一部分

一　数列的定义

按一定顺序排列的一列数叫作数列,通常写成$\{a_n\}$,数列中的每一个数都叫作这个数列的项,数列的第n项a_n与n之间的关系可以用一个公式来表示

$$a_n=f(n)$$

这个公式叫作数列

$$\{a_n\}:a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$$

的通项公式.

从函数观点看,数列可以看作是一定义域为正整数集或它的有限子集$\{1,2,\cdots,n\}$上的函数,当自变量从小到大依次取值时对应一列函数值,而数列的通项公式也就是相应函数的解析式.

有些数列的第某项(如第m项,$m\geqslant2,m\in\mathbf{N}^*$)与前$m-1$项之间,满足某种特殊规律或运算关系,即可用函数关系表达成

$$a_m=f(a_1,\cdots,a_{m-1})\quad(m\geqslant2)$$

这个关系式叫作该数列的递推公式.

数列$\{a_n\}$的前n项$a_1,a_2,\cdots,a_n$之和,叫作数列的前n项和,常用S_n表示,即

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}a_i=a_1+a_2+\cdots+a_n,S_1=a_1$$

由于$S_{n+1}=a_1+a_2+\cdots+a_{n+1}(n\geqslant1,n\in\mathbf{N}^*)$,因此

$$a_{n+1}=S_{n+1}-S_n\quad(n\in\mathbf{N}^*)$$

这一结论简单而重要,在解题时经常用到,它还可以具体表示为

$$a_n=\begin{cases}S_1 & (n=1)\\ S_n-S_{n-1} & (n\geqslant 2)\end{cases}$$

这些充分体现了数列与函数间的关系.

二　数列的分类

根据不同的特性,可将数列进行归类划分,如:

数列

- 1 实数数列、2 复数数列 —— 从虚实性上划分
- 3 整数数列、4 自然数列 —— 从特殊性上划分
- 5 正整数数列、6 分数数列 —— 从整除性上划分
- 7 负数数列、8 非负数列、9 正数数列 —— 从正负性划分
- 10 有理数列、11 无理数列 —— 从根指数上划分
- 12 有穷数列(项数有限)、13 无穷数列(项数无限) —— 从项数上划分
- 14 摆动数列、15 周期数列、16 模数列、17 非周期数列 —— 从周期性上划分

等差数列,等比数列在后面进行介绍.

其中,数列中有的项大于前一项,也有的项小于前一项时,叫作摆动数列.

如果数列从第 1 项起至第 $m(m\geqslant 2, m\in\mathbf{N}^*)$ 项构成一个循环节(长度为 m)往后均按此规律循环,呈现出周期性,如

$$b_1,b_2,\cdots,b_m;b_1,b_2,\cdots,b_m;\cdots;b_1,b_2,\cdots,b_m;\cdots$$

这样的数列叫作周期数列,其周期为 m,即 T(周期) $=m\geqslant 2$. 如果周期 $T=1$,即数列 $\{a_n\}$ 为

$$a,a,\cdots,a,\cdots$$

这种数列叫作常数列.

特别地,周期数列的周期 $T\geqslant 2$ 时,其数列中任意连续 T 项的和为定值,即

$$a_{i+1}+a_{i+2}+\cdots+a_{i+T}=k(\text{定值})$$

这是周期数列的一个特殊性质.

三　等差数列

数列中,最基本的是等差数列和等比数列,我们先介绍等差数列.

1. 定义

数列中从第二项起,每一项与它的前一项的差等于同一个常数,这样的数列叫作等差数列.

用递推关系表示为

$$a_{n+1}-a_n=d \quad (d\text{ 为常数})$$

这即为等差数列$\{a_n\}$的递推公式,其中 d 为公差.

2. 通项公式

若已知等差数列$\{a_n\}$的首项(第一项)a_1 及公差 d,那么第 n 项 a_n,可由通项公式(该数列所有项的求值计算公式)

$$a_n=a_1+(n-1)d$$

求得.

从函数角度体会,当 $d\neq0$ 时,a_n 是关于 n 的一次函数,它的图像是一条射线上的一群横坐标为正整数的孤立点.

3. 前 n 项和公式

$$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=na_1+\frac{1}{2}n(n-1)d$$

等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和有两个计算公式,计算时可根据题目中的已知条件灵活机动地选用.

4. 中项公式

设 A 为实数(或复数)的 a 与 b 的等差中项,则有中项公式

$$A=\frac{a+b}{2}\Leftrightarrow a+b=2A$$

5. 判定方法

欲判定数列$\{a_n\}$是否是等差数列,有如下几种方法:

(1)$a_{n+1}-a_n=d$(常数)$\Leftrightarrow\{a_n\}$是等差数列;

(2)$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}(n\in\mathbf{N}^*)\Leftrightarrow\{a_n\}$是等差数列;

(3)$a_n=kn+b$(k,b 为常数)$\Leftrightarrow\{a_n\}$是等差数列;

(4)$S_n=An^2+Bn$($A,B\neq0$ 为常数)$\Leftrightarrow\{a_n\}$是等差数列.

6. **基本性质**

设$\{a_n\}$是等差数列,那么

(1)$a_n = a_m + (n-m)d(m,n\in \mathbf{N}^*)$.

(2)如果$m,n,p,q\in \mathbf{N}^*$,且$m+n=p+q$,则$a_m+a_n=a_p+a_q$.

特别地,当$m+n=2p$时,$a_m+a_n=2a_p$.

(3)数列$\{\lambda a_n+b\}$(λ,b是常数)是公差为λd的等差数列.

(4)若$\{b_n\}$也是公差为d的等差数列,那么$\{\lambda_1 a_n+\lambda_2 b_n\}$($\lambda_1,\lambda_2$为常数)也是等差数列,公差为$\lambda_1 d+\lambda_2 d$.

(5)下标成等差数列,且公差为m的项$a_k,a_{k+m},a_{k+2m},\cdots$组成的项仍然是等差数列,公差为$md$.

(6)一个等差数列,由始到尾,截成项数相等的若干段后,各段内诸项之和组成新的等差数列,若每段含n项,则新公差为原公差的n^2倍,即:在等差数列$\{a_n\}$中,公差为d,设

$$\begin{aligned}
T_1 &= a_1+a_2+\cdots+a_n\\
T_2 &= a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n}\\
T_3 &= a_{2n+1}+a_{2n+2}+\cdots+a_{3n}\\
&\ \ \vdots\\
T_k &= a_{(k-1)n+1}+a_{(k-1)n+2}+\cdots+a_{(k-1)n+n}\quad (n\in \mathbf{N}^*)
\end{aligned}$$

对于固定的n,数列$\{T_n\}$是等差数列,其公差为n^2d.

(7)若项数为$2n(n\in \mathbf{N}^*)$,则$S_{2n}=n(a_n+a_{n+1})$(a_n,a_{n+1}为中间两项)且$S_{偶}-S_{奇}=nd,\dfrac{S_{奇}}{S_{偶}}=\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$.

若项数为$2n-1(n\in \mathbf{N}^*)$,则$S_{2n-1}=(2n-1)a_n$(a_n为中间项),且$S_{奇}-S_{偶}=a_n,\dfrac{S_{奇}}{S_{偶}}=\dfrac{n}{n-1}$.

(8)当$\begin{cases}a_1>0\\ d<0\end{cases}$时,$S_n$有最大值,此时满足$\begin{cases}a_n\geqslant 0\\ a_{n+1}\leqslant 0\end{cases}$;

当$\begin{cases}a_1<0\\ d>0\end{cases}$时,$S_n$有最小值,此时满足$\begin{cases}a_n\leqslant 0\\ a_{n+1}\geqslant 0\end{cases}$.

(9)若$\{a_n\}$,$\{b_n\}$都是等差数列,且c为常数,则$\{a_n+c\}$,$\{ca_n\}$,$\{a_n+b_n\}$也为等差数列.

(10)当$d=0$时$\Leftrightarrow\{a_n\}$为常数列.

四　等比数列

1. 定义

数列$\{a_n\}$满足$\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$(非零常数),则$\{a_n\}$叫作等比数列,q叫作公比,它可以是正数,也可以是负数,但不能为零,且首项$a_1\neq0$.

当$\begin{cases}a_1>0\\q>1\end{cases}$或$\begin{cases}a_1<0\\0<q<1\end{cases}\Leftrightarrow\{a_n\}$递增;

当$\begin{cases}a_1>0\\0<q<1\end{cases}$或$\begin{cases}a_1<0\\q>1\end{cases}\Leftrightarrow\{a_n\}$递减;

$q=1\Leftrightarrow\{a_n\}$为常数列;

$q<0\Leftrightarrow\{a_n\}$是摆动数列.

注　等比数列的定义应理解为:一个数列从第二项起,每一项与它的前一项之比都等于同一个常数,这个数列叫作等比数列,这个常数叫作等比数列的公比,记为$q(q\neq0)$.

2. 递推公式

$$a_{n+1}=qa_n\quad(q\neq0,n\in\mathbf{N}^*)$$

3. 通项公式

从等比数列$\{a_n\}$的递推公式易推得它的通项公式为

$$a_n=a_1q^{n-1}\quad(q\neq0,a_1\neq0,n\in\mathbf{N}^*)$$

由于它可整理为

$$a_n=\left(\frac{a_1}{q}\right)q^n$$

因此,等比数列$\{a_n\}$有$\{(n,a_n)\}$中的各项所表示的点离散地分布在第一象限或第四象限. 当$q>0$时,这些点在曲线$y=cq^x$(其中$c=\frac{a_1}{q}\neq0$(常数))上.

4. 等比中项

若a,G,b成等比数列,那么G叫作a与b的等比中项,且

$$G^2=ab,G=\pm\sqrt{ab}$$

且只有同号的两实数才具有等比中项,等比中项有两个,它们互为相反数,这一点与等差中项不同.

$G^2=ab$仅是a,G,b成等比数列的必要条件,不是充分条件. 为了计算方便,连续奇数个项成等比数列可设为

$$\cdots,\frac{x}{q},x,xq,\cdots$$

连续偶数个项成等比数列可设为

$$\cdots,\frac{x}{q^3},\frac{x}{q},xq,xq^3,\cdots$$

注 相应的,连续奇数个项成等差数列可设为$\cdots,x-d,x,x+d,\cdots$;连续偶数个项成等差数列可设为$\cdots,x-3d,x-d,x+d,x+3d,\cdots$.

5. 判定方法

可用如下几种方法判定一个数列$\{a_n\}$是否是等比数列:

(1)$a_{n+1}=a_nq(q\neq0$ 为常数,$n\in\mathbf{N}^*)\Leftrightarrow\{a_n\}$是等比数列;

(2)$a_n=cq^n(c,q\neq0$ 为常数,$n\in\mathbf{N}^*)\Leftrightarrow\{a_n\}$是等比数列;

(3)$a_{n+1}^2=a_na_{n+2}(a_na_{n+1}a_{n+2}\neq0)\Leftrightarrow\{a_n\}$是等比数列.

6. 求和公式

$$S_n=\begin{cases}na_1 & (q=1)\\ \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q} & (q\neq1)\end{cases}$$

7. 等比数列的性质

(1)若$m+n=p+q(m,n,p,q\in\mathbf{N}^*)$则有$a_ma_n=a_pa_q$;

(2)每隔k项($k\in\mathbf{N}^*$),取出一项,按原来顺序排列,所得的新数列仍然是等比数列,即在等比数列$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$中取出$a_t,a_{t+k},a_{t+2k},\cdots$所组成的新数列仍然是等比数列;

(3)数列$\{a_n\}$为等比数列,则

$$\sum_{i=1}^{k}a_i,\sum_{i=k+1}^{2k}a_i,\cdots,\sum_{i=(n-1)k+1}^{nk}a_i$$

也成等比数列.

五　数列求和方法

数列求和常用的方法有:

1. **公式法**:利用等差、等比数列的前n项和公式.

2. **化归法**:通过变形将数列化为等差、等比数列或其和、差的形式.

3. **裂项法**:将数列的通项公式分成两项差的形式,通过相加消去中间项,以达到求和的目的.

4. **错位相减法**:如果一个数列的通项公式是一个等差数列与一个等比数列

的积的形式,则可以利用错位相减法达到求和的目的.

5. **倒序相加法**:如等差数列前 n 项和公式的推导方法.

6. **分组求和法**:把一个数列分拆成几个可求和的数列.

7. **常用的求和公式**

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$$

$$2+4+6+\cdots+2n=n(n+1)$$

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

8. **常见的拆项公式**

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

$$\frac{1}{(2n+1)(2n-1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$$

$$\frac{1}{n(n+k)}=\frac{1}{k}\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k}\right]$$

$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=1-\frac{1}{n+1}$$

$$\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{1}{a-b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})$$

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\sqrt{n+1}-1$$

$$C_n^{m-1}=C_{n+1}^m-C_n^m$$

$$n\cdot n!=(n+1)!-n!$$

六 无穷递缩等比数列

若一个等比数列 $\{a_n\}$ 有无穷多项,并且它的公比 q 满足 $|q|<1$,则称 $\{a_n\}$ 为无穷递缩等比数列,设它的前 n 项和为 S_n,则 $S=\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$ 叫作这个无穷递缩

等比数列 $n \to +\infty$ 时的和,并且

$$S=\lim_{n\to+\infty}S_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{a_1}{1-q}$$

七　高阶等差数列

1. 给定一个数列 $\{a_n\}$,令

$$b_n=\Delta a_n=a_{n+1}-a_n$$

则称数列 $\{b_n\}=\{\Delta a_n\}$ 为 $\{a_n\}$ 二阶差分数列,一般定义 $\{a_n\}$ 的 p 阶差分数列为

$$\{\Delta^p a_n\}=\{\Delta(\Delta^{p-1}a_n)\}$$

若 $\{a_n\}$ 的 p 阶差分数列是一个非零常数列,则称 $\{a_n\}$ 为 p 阶等差数列. 特别地,一阶等差数列就是我们所说的非常数列的等差数列,$p\geqslant 2$ 时,p 阶等差数列叫作高阶等差数列.

2. 数列 $\{a_n\}$ 是 p 阶等差数列的充要条件是:数列 $\{a_n\}$ 的通项

$$a_n=f(n)$$

为关于 n 的 p 次多项式

$$a_n=f(n)=\lambda_0 n^p+\lambda_1 n^{p-1}+\cdots+\lambda_{p-1}n+\lambda_p$$

其中 $\lambda_0\neq 0,\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_p$ 为常数,$n=1,2,3,\cdots$.

3. 若数列 $\{a_n\}$ 是非常数列的等差数列,其前几项的和为 S_n,则 $\{S_n\}$ 是二阶等差数列.

八　常用解题方法

1. 公式法

求解有关等差(比)数列的计算问题的基本方法就是利用等差(比)数列的通项公式或求和公式,直接进行计算或列方程(组)求解.

2. 换元法

有些数列问题从表面上看不是一个等差(比)数列问题,但只要作适当的恒等变形,再通过换元,就可以转化为一个等差(比)数列问题来求解.

3. 反证法

为了证明满足某种条件的等差(比)数列不存在(或者至多只有一个),常常用反证法.

4. 数学归纳法

与任意正整数 n 有关的推论，常常可考虑用数学归纳法进行证明.

5. 分类讨论法

对于那些含有参数的数列问题，常常应对参数的各种可能情形进行讨论，分类应做到不遗漏、不重复(若遗漏，则解答有错误；若重复，则解答不简洁).

6. 函数思想方法

求解有关等差(比)数列的最值问题，常常可选择其中某个变量作为自变量，而将要求最值的量看成自变量的函数，从而求出该函数的最大(小)值.

7. 构造法

为了证明满足一定条件的数学结论是存在的，我们只需构造出一个这样的实例就够了，此外，也可以通过构造一个反例来证明某个数学结论是错误的.

其中，应当注意的是，对于某些较复杂的问题，有时运用多种不同的数学思想方法才能解决，而且正因为问题较复杂，涉及的知识范围较广，从而使我们可以从多种不同的角度入手，运用多种不同的数学思想方法，给出该问题的多种不同的解法.

九　a_{n+1} 与 a_n 的关系

若数列 $\{a_n\}$ 中 a_n 与 a_{n+1} 这样相邻的两项具有简单而又特殊的关系，一般可用划归变形，代换处理.

如果

$$a_{n+1}=pa_n+q \quad (p\neq 0,q\neq 0) \tag{1}$$

那么可设 m 为待定系数，满足

$$a_{n+1}-m=p(a_n-m)\Rightarrow m=\frac{q}{1-p} \quad (\text{当 } p\neq 1 \text{ 时})$$

$$\Rightarrow a_n-m=p(a_{n-1}-m)$$

$$\Rightarrow a_n-m=p^{n-1}(a_1-m)$$

$$\Rightarrow a_n=\left(a_1-\frac{q}{1-p}\right)p^{n-1}+\frac{q}{1-p} \quad (n=1,2,\cdots) \tag{2}$$

这样将问题划归为相关等比数列的通项问题.

如果

$$a_{n+1}=pa_n+q^n \quad (p\neq q,p,q\neq 0) \tag{3}$$

通常可以两边除以 q^{n+1}，得到

$$\frac{a_{n+1}}{q^{n+1}}=\frac{p}{q}\cdot\frac{a^n}{q^n}+\frac{1}{q} \tag{4}$$

作代换,令 $b_n=\frac{a_n}{q^n}(n=1,2,\cdots)$,得 $b_{n+1}=\frac{p}{q}b_n+\frac{1}{q}$,这样我们就把式(3)转化成了式(1),有

$$b_n=\left(b_1-\frac{\frac{1}{q}}{1-\frac{p}{q}}\right)\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1}+\frac{\frac{1}{q}}{1-\frac{p}{q}}$$

$$\Rightarrow\frac{a_n}{q^n}=\left(\frac{a_1}{q}+\frac{1}{p-q}\right)\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1}-\frac{1}{p-q}$$

$$\Rightarrow a_n=\frac{[(p-q)a_1+q]p^{n-1}-q^n}{p-q}\tag{5}$$

十　递归数列

对于一个数列$\{x_n\}$,若存在正整数 k 和一个把 x_{n+k} 和前面 k 项 x_{n+k-1}, $x_{n+k-2},\cdots,x_n$ 联系起来的方程

$$\Phi(x_{n+k},x_{n+k-1},\cdots,x_n)=0\quad(n=1,2,3,\cdots)\tag{1}$$

则称数列$\{x_n\}$为 k 阶递归数列,并称方程(1)是数列$\{x_n\}$的递归方程,从方程(1)解出

$$x_{n+k}=f(x_{n+k-1},x_{n+k-2},\cdots,x_n)\tag{2}$$

则称等式(2)为数列$\{x_n\}$的递归公式,并且数列$\{x_n\}$开头 k 项的值为

$$\begin{cases}x_1=a_1\\x_2=a_2\\\vdots\\x_k=a_k\end{cases}\quad(a_1,a_2,\cdots,a_k\text{ 为已知常数})\tag{3}$$

称为递归方程(1)或递归公式(2)的初始值或初始条件. 显然,一个 k 阶递归数列$\{x_n\}$可由递归公式(2)及初始值唯一确定.

十一　特征方程和特征根

由递归公式

$$x_{n+k}=\lambda_1x_{n+k-1}+\lambda_2x_{n+k-2}+\cdots+\lambda_kx_n+q$$
$$(n=1,2,3,\cdots;\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k,q\text{ 均为常数,且 }\lambda_k\neq0)\tag{1}$$

及初始值唯一确定的数列$\{x_n\}$称为 k 阶常系数递归数列,特例 $q\equiv0$ 时,由递归

公式

$$x_{n+k}=\lambda_1 x_{n+k-1}+\lambda_2 x_{n+k-2}+\cdots+p_k x_n$$

$$(n=1,2,3,\cdots;\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k \text{ 为常数},\lambda_k\neq 0) \tag{2}$$

及初始值唯一确定的数列$\{x_n\}$称为 k 阶常系数线性齐次递归数列,而下列一元 k 次方程

$$x^k=\lambda_1 x^{k-1}+\lambda_2 x^{k-2}+\cdots+\lambda_{k-1}x+\lambda_k \tag{3}$$

叫作递归公式(2)的特征方程.

定理 1 设递归公式(2)的特征方程(3)有 S 个互不相同的根 α_1, $\alpha_2,\cdots,\alpha_S$,且 α_i 是 $t_i(i=1,2,\cdots,S)$重根,$t_1+t_2+\cdots+t_S=k$,则

$$x_n=f_1(n)\alpha_1^n+f_2(n)\alpha_2^n+\cdots+f_S(n)a_S^n \quad (n=1,2,\cdots)$$

其中$f_i(n)$是 n 的 t_i-1 次多项式,其系数由$\{x_n\}$的初始值确定(证明略).

十二 二阶线性递归数列的通项公式

在中学数学奥林匹克中,常常遇到形如

$$a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n+\gamma \quad (n\in\mathbf{N}^*,p,q,\gamma \text{ 均为常数,且 } pq\neq 0) \tag{A}$$

的 2 阶线性递归数列$\{a_n\}$的问题,其中 a_1,a_2 为已知常数.

当 $\gamma=0$ 时,式(A)简化为

$$a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n \tag{A$_1$}$$

下面我们讨论数列$\{a_n\}$的通项的求法:

(一)当 $\gamma\neq 0$ 时.

1. 若 $p+q=1$,式(A)即为

$$a_{n+2}=(1-q)a_{n+1}+qa_n+\gamma\Rightarrow a_{n+2}-a_{n+1}=-q(a_{n+1}-a_n)+\gamma \quad (n\in\mathbf{N}^*) \tag{1}$$

(1)当 $q=-1$ 时,式(1)化为

$$a_{n+2}-a_{n+1}=(a_{n+1}-a_n)+\gamma \quad (n\in\mathbf{N}^*)$$

$$\Rightarrow a_k-a_{k-1}=(a_{k-1}-a_{k-2})+\gamma \quad (k\geqslant 3)$$

令 $C_k=a_{k-1}-a_{k-2}(k\geqslant 3)$,上式化为

$$C_{k+1}=C_k+\gamma \quad (k\geqslant 3)$$

$$\Rightarrow C_n=C_3+(n-3)\gamma \quad (n\geqslant 3)$$

$$=a_2-a_1+(n-3)\gamma\Rightarrow C_k=a_2-a_1+(k-3)\gamma \quad (k\geqslant 3)$$

$$\Rightarrow C_{k+2}=a_{k+1}-a_k=a_2-a_1+(k-1)\gamma \quad (k\geqslant 1)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n-1} C_{k+2} = \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k)$$

$$= (n-1)(a_2 - a_1) + \gamma \sum_{k=1}^{n-1} (k-1)$$

$$\Rightarrow a_n - a_1 = (n-1)(a_2 - a_1) + \frac{1}{2}(n-2)(n-1)\gamma$$

$$\Rightarrow a_n = (n-1)a_2 - (n-2)a_1 + \frac{1}{2}(n-2)(n-1)\gamma \quad (n \geqslant 1) \qquad (A_2)$$

这即为当 $\gamma \neq 0, p = 2, q = -1$ 时,数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2)当 $q \neq -1$ 时,$1 + q \neq 0$,设 λ 为待定参数,由式(1)

$$a_{n+2} - a_{n+1} = -q(a_{n+1} - a_n) + \gamma$$

$$\Rightarrow a_{n+2} - a_{n+1} + \lambda = -q(a_{n+1} - a_n - \frac{\lambda - \gamma}{q})$$

令

$$\lambda = -\frac{\lambda - \gamma}{q} \Rightarrow \lambda = \frac{\gamma}{1+q} \Rightarrow C_{n+1} = -qC_n \quad (n \geqslant 1) \qquad (2)$$

其中

$$C_1 = a_2 - a_1 + \lambda$$

$$C_n = a_{n+1} - a_n + \lambda \quad (n \geqslant 1) \qquad (3)$$

从式(2)得

$$C_n = -qC_{n-1} = (-q)^2 C_{n-2} = \cdots = (-q)^{n-1} C_1$$

$$\Rightarrow C_{n+1} - a_n + \lambda = (-q)^{n-1} C_1$$

$$\Rightarrow a_n - a_{n-1} + \lambda = (-q)^{n-2} C_1 \quad (n \geqslant 2)$$

(取 $n = 2, 3, \cdots, n$ 两边求和)

$$\Rightarrow a_n - a_1 + (n-1)\lambda = C_1 \sum_{k=2}^{n} (-q)^{k-2} = \frac{[1 - (-q)^{n-1}]C_1}{1+q} \qquad (A_3)$$

$$\Rightarrow a_n = a_1 - \frac{(n-1)\gamma}{1+q} + \frac{[1-(-q)^{n-1}](a_2 - a_1 + \frac{\gamma}{1+q})}{1+q}$$

$$\Rightarrow a_n = a_1 + \frac{[1-(-q)^{n-1}][(1+q)(a_2 - a_1) + \gamma]}{(1+q)^2} - \frac{(n-1)\gamma}{1+q}$$

这即为当 $\gamma \neq 0, p + q = 1$ 且 $q \neq -1$ 时,数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

2. 若 $p + q \neq 1$,设 u 为待定系数,并令

$$a_n = b_n + u \quad (n \in \mathbf{N}^*) \qquad (4)$$

代入式(A)得

$$b_{n+2} + u = p(b_{n+1} + u) + q(b_n + u) + \gamma$$

$$\Rightarrow b_{n+2} = pb_{n+1} + qb_n + (p+q-1)u + \gamma \qquad (5)$$