



北京市高等教育精品教材立项项目

理科物理实验教程

吴平主编

LIKE WULI
SHIYAN JIAOCHENG



冶金工业出版社
Metallurgical Industry Press

北京市高等教育精品教材立项项目

理科物理实验教程

主编 吴 平
参编 赵雪丹 李书民
主审 罗 胜

北 京

冶金工业出版社

2010

内 容 提 要

本书定位在基础物理实验课程(60学时左右)之后的后续物理实验课程,内容涵盖实验数据处理、电磁学实验、光学实验、近代物理实验、现代物理实验和课题型实验等6个部分,涉及许多科学研究与生产所应用的物理原理、测试方法和仪器装置的使用。一些项目是由作者的科学研究实践转化而来,课题型实验选题取自近年来有关物理和材料的一些研究热点,注重与当前科学研究方法、手段、内容的衔接,凝聚和固化了北京科技大学物理系教师近年来取得的许多物理实验教学研究成果和科学研究实践。

本书可作为高等院校理科学生以及希望进一步学习物理实验课程的工科学生物理实验教学用书,也可供相关专业的研究生或其他人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

理科物理实验教程/吴平主编. —北京:冶金工业出版社,2010.9

北京市高等教育精品教材立项项目

ISBN 978-7-5024-5358-9

I. ①理… II. ①吴… III. ①物理学—实验—高等学校—教材 IV. ①O4—33

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第167512号

出 版 人 曹胜利

地 址 北京北河沿大街嵩祝院北巷39号,邮编100009

电 话 (010)64027926 电子信箱 yjcbbs@cnmip.com.cn

责任编辑 宋 良 美术编辑 张媛媛 版式设计 葛新霞

责任校对 王永欣 责任印制 张祺鑫

ISBN 978-7-5024-5358-9

北京兴华印刷厂印刷;冶金工业出版社发行;各地新华书店经销

2010年9月第1版,2010年9月第1次印刷

787mm×1092mm 1/16;19印张;503千字;292页

36.00元

冶金工业出版社发行部 电话:(010)64044283 传真:(010)64027893

冶金书店 地址:北京东四西大街46号(100010) 电话:(010)65289081(兼传真)

(本书如有印装质量问题,本社发行部负责退换)

前 言

本书是在北京科技大学物理系理科物理实验课程历任教师的教学实践和历届理科物理实验讲义的基础上编写的。书中融入了相关教师多年来的实验教学研究成果和科学研究成果,凝集了物理系所有从事理科物理实验教学的教师和实验技术人员的集体智慧和心血,虽然他们当中有的人目前已不在物理实验室工作。

本书内容定位在理科学生完成约 60 学时基础物理实验课程之后的后续物理实验课程。从培养学生实际工作能力和创新思维角度出发,书中精选实验项目及内容,努力使其具有时代性和先进性,以激发学生学习探索的热情,并切实给学生提供发挥其创造力的空间。本书将理科学生多个学期的实验课程教学内容优化整合于一体,内容涵盖电磁学实验、光学实验、近代物理实验、现代物理实验和课题型实验。每个实验项目的要求与内容都经过多次教学实践反复修改、调整与完善,在重视基本知识、方法与技能学习的同时,突出创新意识和研究思维的培养与训练。本书内容涉及许多科研、生产所应用的基本物理原理、测试方法和仪器装置的使用,并随课程的进行循序渐进地加强研究性实验内容的强度,特别是现代物理实验部分和课题型实验部分,从实验方法、内容到装置的结构安排为开展有一定深度的研究型实验搭建了很好的平台。在课题型实验阶段,学生可以综合应用本书前面已经学习过的实验知识、方法、技能以及所用过的实验仪器设备,完成综合性的研究课题。每一个课题型实验都可以让学生经历一个从文献阅读、具体研究问题提出、研究方案设计、实验、分析讨论与总结的完整的研究过程,并在此过程中掌握各种相关的仪器设备与测试方法的原理与使用。课题型实验的选题均取自编者的科研课题,如磁电阻薄膜制备与磁电阻特性研究,梯度薄膜的制备与应力研究,透明电极材料电学性质的研究,高 K 介电薄膜材料介电特性研究,陶瓷薄膜材料的制备及电绝缘特性研究等等,这些选题也是近年来物理、材料研究领域备受人们关注的问题。现代物理实验部分所涉及的实验装置及测试方法是一个通用、开放的实验平台,学生可自行提出和展开更多课题型实验项目。希望本书不仅是学生学习物理实验课程时使用的教材,在他们未来工作中也是有帮助的参考书。

本书的测量误差与实验数据处理部分,是编者根据多年来教授“误差理论及数据处理”课程和“物理实验”课程的教学经验以及多年来从事科学研究的经历编写的,简洁明了地给出了有关实验数据处理和测量结果表示的基本规定和处理方法,希望这部分内容在学生未来从事科学研究和生产实践活动时,仍然可以是他们工作中有关实验数据处理和测量结果表示的快速检索手册。

参加本书编写工作的有:吴平(第1章、第4章、第5章、第6章),赵雪丹(第2章),李书民(第3章)。本书的体系框架、统稿和定稿由吴平完成。

北京科技大学罗胜教授审阅了全书,并提出了非常宝贵的意见,在此也表示衷心的感谢。

陈森、张蓓、唐军、张师平等在新实验的仪器装置调试方面做了许多工作,赵以德、宋斌斌、薛莲、汪晖、赵守田、闫丹等在课题型实验方面做了探索性工作,在此表示衷心的感谢。在编写过程中,参考了大量我国物理实验教学工作者编著的教材、著作和最新研究成果,有些已在参考文献中列出,有些未能一一列出,在此向他们一并表示衷心的感谢。

由于编者水平所限,书中存在不妥之处,恳请读者批评指正。

编 者
2010年8月

目 录

1 测量误差与实验数据处理	1
1.1 测量与测量误差	1
1.1.1 测量	1
1.1.2 测量误差	1
1.2 误差的分类	2
1.2.1 系统误差	2
1.2.2 随机误差	3
1.2.3 粗差	3
1.2.4 随机误差与系统误差的关系	3
1.3 随机误差的统计处理	4
1.3.1 正态分布	4
1.3.2 t 分布	5
1.4 直接测量结果的表示	7
1.5 间接测量结果的表示和不确定度的合成	8
1.6 实验数据的有效位数	8
1.6.1 有效位数的概念	8
1.6.2 有效位数的确定规则	9
1.6.3 数据修约的进舍规则	10
1.7 常用数据处理方法	11
1.7.1 列表法	11
1.7.2 作图法	11
1.8 实验数据的直线拟合	13
1.8.1 用最小二乘法进行直线拟合	13
1.8.2 用 EXCEL 软件进行直线拟合	15
1.8.3 用 ORIGIN 进行直线拟合	18
2 电磁学实验	21
2.1 磁场中载流导线的受力——安培力	21
2.2 用模拟法测绘静电场	22
2.3 标定温差电偶的刻度	26
2.4 用非平衡电桥组装及标定电阻温度计	29
2.5 交流电桥	32
2.6 RC 电路	38

2.7	冲击电流计的研究	46
2.8	铁磁材料磁滞回线的测定	54
2.9	铁磁材料居里点的测定	58
2.10	逸出功的测定	62
2.11	电子束的偏转与聚焦	68
2.12	电子荷质比(e/m)的测定	74
2.13	金属薄膜的制备及电阻率的测量	81
2.14	磁性薄膜磁电阻的测量	86
2.15	磁场分布、磁敏感元件特性研究	92
3	光学实验	96
3.1	几何光学	96
3.2	测量固体和液体的折射率	103
3.3	超声光栅	107
3.4	分波面干涉实验	111
3.5	激光散斑法测量横向微小位移实验	115
3.6	压电陶瓷振动的干涉测量	117
3.7	多光束干涉仪(F-P干涉仪)	120
3.8	夫朗和费衍射	125
3.9	菲涅耳衍射	130
3.10	偏振光的特性实验	135
3.11	旋光仪	138
3.12	光学图像微分实验	142
3.13	全息照相(白光再现)	147
4	近代物理实验	150
4.1	电子电荷 e 值的测定	150
4.2	汞原子激发电位的测定	155
4.3	用横振动法测量固体材料在高温下的弹性模量	159
4.4	光电倍增管的光谱特性	165
4.5	核蜕变的统计规律和物质对 β 射线的吸收	170
4.6	微波基础实验	176
4.7	微波光学实验	184
4.8	用反射式谐振腔测量微波介质材料的介电常数	191
4.9	氢与氘原子光谱	194
4.10	钠原子光谱	201
4.11	塞曼效应	211
4.12	铁磁共振	217
4.13	核磁共振	221

5 现代物理实验	232
5.1 电子顺磁共振	232
5.2 光泵磁共振	239
5.3 变温霍尔效应	248
5.4 干涉显微镜的使用	252
5.5 用干涉方法测量薄膜应力	255
5.6 振动样品磁强计的使用	259
5.7 用阻抗分析仪测量介质薄膜材料的电容率	264
5.8 原子力显微镜的使用	269
5.9 电子束蒸发镀膜仪的使用	271
5.10 磁控溅射镀膜仪的使用	276
5.11 硼元素的径迹显微分析技术	281
6 课题型实验	285
6.1 制备参数对银薄膜电阻率和应力的影响	285
6.2 梯度薄膜的制备及薄膜应力的研究	286
6.3 制备参数对氧化锌铝透明电极材料电学性质的影响	287
6.4 工艺参数对 NiFe 薄膜磁电阻特性的影响	288
6.5 氧化铝陶瓷薄膜材料的制备及电绝缘特性的研究	288
6.6 高 K 介电薄膜材料的制备及介电特性研究	289
附 录	291
附录 1 常用物理学常数表	291
附录 2 物理量的单位(SI 基本单位)	291
附录 3 物理量的单位(SI 导出单位)	292

1 测量误差与实验数据处理

1.1 测量与测量误差

1.1.1 测量

用实验的方法找出物理量量值的过程,称为测量。量值是指用数和适宜的单位表示的量,例如 1.5m、17.5℃、3.5kg 等。按测量方法分类,可将测量分为直接测量和间接测量。

直接测量 凡使用量仪或量具直接测得(读出)被测量数值的测量,称为直接测量,如用米尺测量长度、用温度计测量温度、用秒表测量时间以及用电表测量电流和电压等。

间接测量 很多物理量没有直接测量的仪器,常常需要根据一些物理原理、公式,由直接测量量计算出所要求的物理量。这种用间接方法得到被测量数值的测量,称为间接测量。如测量钢球的密度时,由直接测量测出钢球的直径 D 和质量 M ,然后根据公式

$$\rho = \frac{M}{\frac{\pi}{6}D^3} \quad (1-1)$$

计算出密度 ρ 。钢球密度的测量即为间接测量。

等精度测量和不等精度测量 用同一个仪器在相同条件下对某一个物理量进行多次重复测量时,没有理由认为某一次测量比其他次测量更为精确,因此可以说这些测量是具有相同精度的,称为等精度测量;反之,就是不等精度测量。在实验中进行多次重复测量时,应尽量保持精度相等。

1.1.2 测量误差

测量结果都具有误差,误差自始至终存在于一切科学实验和测量的过程之中。任何测量仪器、测量方法、测量环境、测量者的观察力等都不可能做到绝对严密,这些就使测量不可避免地伴随有误差产生。因此,分析测量中可能产生的各种误差,尽可能地消除其影响,并对测量结果中未能消除的误差做出估计,就是物理实验和许多科学实验中必不可少的工作。

首先来了解一下误差的概念。测量误差就是测量结果与被测量的真值(或约定真值)的差值。测量误差的大小反映了测量结果的准确性,测量误差可以用绝对误差表示,也可以用相对误差表示

$$\text{绝对误差} = \text{测量结果} - \text{被测量的真值} \quad (1-2)$$

$$\text{相对误差} = \frac{\text{测量的绝对误差}}{\text{被测量的真值}} \quad (\text{用百分数表示}) \quad (1-3)$$

被测量的真值是一个理想概念,一般说来真值是不知道的。在实际测量中,常用被测量的实

际值或修正过的算术平均值来代替真值,称为约定真值。由于真值一般来说是不知道的,因此一般情况下是不能计算误差的,只有在少数情况下可以用足够准确的实际值作为量的约定真值,这时才能计算误差。

在测量工作中,人们当然希望所进行的测量是精确的,但这并不意味着测量结果越精确越好。因为高精确度的测量结果必然要对测量仪器和测量环境条件等提出相应的高要求,这从经济上考虑是不利的。因此,不能对任何一项测量都要求高精确度,而是应该根据被测量的精度要求,在最经济的条件下,选择最适宜的测量方法、测量仪器和测量环境条件,尽可能消除和减小误差,选择最适宜的数据处理方法,得出在该条件下被测量的最可信赖值,并对它的精确度做出正确的估计。

1.2 误差的分类

测量中的误差主要分为两类:系统误差和随机误差。两类误差的性质不同,处理方法也不同。

1.2.1 系统误差

系统误差是在每次测量中都具有一定大小、一定符号,或按一定规律变化的测量误差分量。它来源于:仪器构造上的不完善,仪器未经很好校准,测量时外部条件的改变,以及测量者的固有习惯和测量所依据的理论的近似、测量方法和测量技术的不完善等等。系统误差的减少和消除是个复杂的问题,只有在很好地分析了整个实验所依据的原理、方法以及测量过程的每一步和所用的各件仪器,从而找出产生误差的各个原因,才有可能设法在测量结果中消除或减少它的影响。尽管如此,在某些可能的情况下,也存在一些消除系统误差(固定的和变化的)的方法。

(1)对测量结果引入修正值。这通常包括两方面内容,一是对仪器或仪表引入修正值,这可通过与准确度级别高的仪器或仪表作比较而获得;二是根据理论分析,导出补正公式,例如,精密称衡的空气浮力补正,量热学实验中的热量补正等。

(2)选择适当的测量方法,使系统误差能够被抵消,避免将其带入测量结果之中。常用的方法有:

1)对换法。就是将测量中的某些条件(例如:被测物的位置)相互交换,使产生系统误差的原因对测量的结果起相反的作用,从而抵消系统误差。如用滑线电桥测量电阻时,把被测电阻与标准电阻交换位置进行测量,以及天平使用中的复称法等。

2)补偿法。如量热实验中采用加冰降温的办法使系统的初温低于室温以补偿升温时的散热损失,又如用电阻应变片测量磁致伸缩时的热补偿等。

3)替代法。即在一定的条件下,用某一已知量替换被测量,以达到消除系统误差的目的。例如,用电桥精确测量电阻时,为了消除仪器误差对测量结果的影响,就可以采用替代法。不过,这里要求“指零”仪器应有较高的灵敏度。

4)半周期偶数测量法。按正弦曲线变化的周期性系统误差(如测角仪的偏心差)可用半周期偶数测量法予以消除。这种误差在 0° 、 180° 、 360° 处为零,而在任何差半个周期的两个对应点处误差的绝对值相等而符号相反。因此,若每次都在相差半个周期处测两个值,并以平均值作为测量结果,就可以消除这种系统误差。此种方法在测角仪器(如分光仪、量糖计等)上

广泛使用。

1.2.2 随机误差

一般情况下,在相同条件下对同一物理量进行多次重复测量时,在极力消除或改正一切明显的系统误差之后,每次测量结果仍会出现一些无规律的随机性变化(实际上系统误差未消除时,这种随机性变化也同样会表现出来)。如果测量的灵敏度或分辨能力足够高,就可以观察到这种变化。这种随机性变化归结于随机误差的存在。和系统误差不同的是,随机误差的出现从表面上看是毫无规律的,似乎是偶然的,但如果测量次数很多,结果中就显现出明显的规律。例如,误差值一定的数值出现的几率是相同的,绝对值小的误差较绝对值大的误差出现的几率大,其算术平均值随着测量次数的增加而越来越趋近于零等。

综上所述,随机误差是在对同一被测量在重复性条件下进行多次测量的过程中,绝对值与符号以不可预知的方式变化着的测量误差的分量。这里,重复性条件包括:相同的测量程序;相同的观测者;在相同的条件下使用相同的测量仪器;相同地点;在短时间内重复测量等。这种误差是由实验中各处因素的微小变动性引起的。例如实验装置和测量机构在各次测量调整操作上的变动性,测量仪器指示数值上的变动性,以及观测者本人在判断和估计读数上的变动性等等。这些因素的共同影响,就使测量值围绕着测量的平均值发生涨落变化。这种变化量就是各次测量的随机误差。

随机误差的出现,就某一次测量值来说是没有规律的,其大小和方向都是不可预知的。但对于一个量进行足够多次的测量时,则会发现随机误差是按一定的统计规律分布的。常见的统计分布有正态分布、 t 分布、平均分布等。

随机误差的分布特性与处理:

(1)在多次测量时,正负随机误差大致可以抵消,因而用多次测量的算术平均值表示测量结果可以减小随机误差的影响;

(2)测量值的分散程度直接体现随机误差的大小,测量值越分散,测量的随机误差就越大。因此,必须对测量的随机误差做出估计才能表示出测量的精密度。

1.2.3 粗差

粗差是由实验当中的差错造成的,例如读错数、记错数或不正确地操作仪器等。为防止粗差出现,实验时要注意理论上的约束条件,明确观测对象,安排仪器时要防止互相干扰,并注意做好数据表格和记录好原始数据。含有粗差的测量值称为坏值或异常值,在实验测量过程中或数据处理时应尽量剔除,剔除的依据参阅 1.3.1 节中的简单介绍。

1.2.4 随机误差与系统误差的关系

系统误差的特征是其确定性,而随机误差的特性则是其随机性,两者经常是同时存在于一切科学实验中的,它们之间也是互相联系的,有时难于严格区分。我们经常把一些不可定的系统误差看做是随机误差,也常常把一些可定的但规律过于复杂的系统误差当做随机误差来处理,亦即使系统误差随机化,从而使得部分误差被抵偿以得到较为准确的结果。有时系统误差与随机误差的区分还与空间和时间因素有关。时间因素有两方面的含义,一方面的含义是指时间的长短,例如校验仪表所用的标准,它的温度在校验仪表所需的短时间内可保持恒定或缓慢变化,但在长时间内(例如一个月)它却是在其平均值附近作不规则的变化,因而环境温度对标准仪表的影响在短时间内可看成是系统误差,而在长时间内则为随机误差。另一方面的含义是指,随着科学技

术的发展,人们对误差来源及其变化规律认识加深,就有可能把过去认识不到而归于随机误差的某些误差确定为系统误差。相反,由于没有认识到,也会把系统误差当做随机误差,并在数据上进行统计分析处理。

测量中,常用精密度来描述重复测量结果之间的离散程度,如果一个物理量在等精度测量时所得到的测量数据离散程度小,彼此接近,即随机误差小,则称这种测量结果的精密度高;常用测量的准确度来描述测量数据的平均值和真值偏离的程度,它是系统误差的反映,如果测量的系统误差小,则称这种测量准确度高;测量的精确度是指测量数据集中于真值附近的程度,如果测量的平均值接近真值,且各次测量数据又比较集中,即测量的系统误差和随机误差都比较小,则称其精确度高,说明这种测量既准确又精密。

1.3 随机误差的统计处理

1.3.1 正态分布

正态分布(又称高斯分布)是误差理论中最重要的一种分布。从概率论的“中心极限定理”可知,一个随机变量如果是大量相互独立的、微小因素影响的总效果,这个随机变量就近似地服从正态分布。物理测量中的随机误差,往往是观察者不能控制的大量偶然因素作用的结果,所以大多数物理测量服从正态分布。

图 1-1 所示为正态分布曲线。正态分布的概率密度函数为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp \left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma_x^2} \right] \quad (-\infty < x < +\infty) \quad (1-4)$$

$$\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum x_i}{n} \quad (1-5)$$

$$\sigma_x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\sum (x_i - \mu)^2}{n}} \quad (1-6)$$

式中, μ 和 σ_x 为分布参数; n 为测量次数。 μ 为正态分布的数学期望,表示 x 出现几率最大的值,消除系统误差后, μ 通常就是 x 的真值。 σ_x 为正态分布的均方根差,它决定了分布线型的宽窄。 σ_x 直接反映了分布的离散程度, σ_x 越小,分布曲线越陡,数据越集中,重复性越好, σ_x 大,则正好相反。实际测量的任务就是通过测量数据求得 μ 和 σ_x 的值。

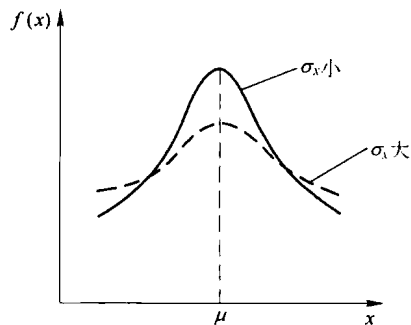


图 1-1 正态分布曲线

$P = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$ 是随机变量 x 出现在 $[x_1, x_2]$ 区间的概率,称为置信概率。与置信概率对应的区间称为置信区间。显然,置信区间扩大,置信概率将提高。对于正态分布,以下三个置信区间及其相应的置信概率在实验误差与数据处理中具有重要意义:

$$\begin{aligned} [\mu - \sigma_x, \mu + \sigma_x] & \quad P = 0.6826 \\ [\mu - 2\sigma_x, \mu + 2\sigma_x] & \quad P = 0.9545 \\ [\mu - 3\sigma_x, \mu + 3\sigma_x] & \quad P = 0.9974 \end{aligned} \quad (1-7)$$

以上数据的含义是,对服从正态分布的物理量进行测量时,测量值将有 68.26% 的概率落在

$[\mu - \sigma_x, \mu + \sigma_x]$ 区间, 95.45% 的概率落在 $[\mu - 2\sigma_x, \mu + 2\sigma_x]$ 区间; 当置信区间扩大到 $[\mu - 3\sigma_x, \mu + 3\sigma_x]$ 时, 测量值落在 $[\mu - 3\sigma_x, \mu + 3\sigma_x]$ 区间的概率达到 99.74%, 而落在该区间以外的概率不超过 0.26%, 可见 $|x - \mu| \geq 3\sigma_x$ 的可能性很小。 $3\sigma_x$ 通常称为极限误差。拉依达准则简称为 $3\sigma_x$ 准则, 是最常用和最简单的判断可疑测量值的剔除准则。该准则规定, 如果某一测量值 $|x - \mu| \geq 3\sigma_x$, 则认为该 x 含有粗差, 将其剔除。需要注意的是, 拉依达准则在测量次数较多时可以使用, 在测量次数较少时, 如少于十几次时, “弃真” 概率较大, 最好不用。另一种推荐的粗差判断准则是 t 分布检验, 详见参考文献 [1], 该方法既适用于测量次数 $n \leq 10$ 的情形, 也适用于 n 比较大的情形。

对某一物理量 X 在重复性条件下进行了 n 次独立测量, 设已消除了测量的系统误差, 得到 n 个测量值 $x_1, x_2, \dots, x_n$, 可以把 n 个测量值看成随机变量 X 的随机样本, 那么, 它们的算术平均值是

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1-8)$$

显然, 算数平均值 $\bar{x}$ 也是一个随机变量。引用“中心极限定理”可以证明, 如果物理量 X 服从正态分布, 那么算数平均值 $\bar{x}$ 也服从正态分布, 且其数学期望为真值 μ , 其均方根差 $\sigma_{\bar{x}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sigma_x$ 。算术平均值 $\bar{x}$ 的均方根差是每个

测量值均方根差的 $\frac{1}{\sqrt{n}}$ 倍, 说明算数平均值的离

散程度比单个测量值的离散程度要小, 增加测量次数可以改善平均值的精密度。图 1-2 给出了 $\sigma_{\bar{x}}/\sigma_x - n$ 的关系, 可以看到, 随着测量次数 n 的增加, $\sigma_{\bar{x}}/\sigma_x$ 逐渐减小; 但当 $n > 10$ 以

后, 变化趋于平缓; 再增加测量次数的影响变得不明显。测量的精密度是由测量仪器的精度、测量方法、环境和观测人决定的, 超出这些条件单纯追求测量次数, 是不能提高测量精度的。但必要的测量次数还是需要的, n 不必过大, 一般重复 10 次即可。

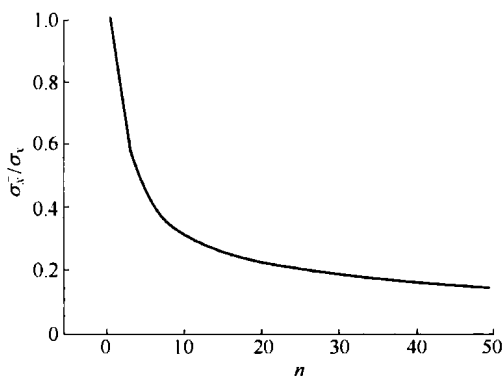


图 1-2 $\sigma_{\bar{x}}/\sigma_x - n$ 的关系

1.3.2 t 分布

当测量次数无穷多或足够多时, 测量误差的分布才接近正态分布, 但实际测量只能有限次地进行, 因此测量结果及其离散程度必须以有限次的测量为基础进行估算。

可以证明, 测量值的算术平均值 $\bar{x}$ 是真值的无偏估计, 因此可以用它作为真值的最佳估值。

每一次测量值 x_i 与平均值 $\bar{x}$ 之差称为残差, 即

$$\Delta x_i = x_i - \bar{x} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1-9)$$

显然, 这些残差有正有负, 有大有小。

可以证明, σ_x 可用标准偏差 s_x 来估值, 即 s_x 是 σ_x 的无偏估计。 s_x 用下面的贝塞尔公式来计算

$$s_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\Delta x_i)^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \quad (1-10)$$

s_x 的值直接体现了随机误差的分布特征。 s_x 值小,表示测量值很密集,即测量的精密度高; s_x 值大,表示测量值很分散,即测量的精密度低。

当测量结果采用测量值的算数平均值来表征时,相应地其离散程度要由 $\sigma_{\bar{x}}$ 来表征。由于 $\sigma_{\bar{x}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sigma_x$, $\sigma_{\bar{x}}$ 可用式 1-11 来估值。

$$s_{\bar{x}} = \frac{1}{\sqrt{n}} s_x \quad (1-11)$$

至此,测量量的真值和测量的离散程度都能够用有限次测量进行估值了,似乎测量结果的表征问题都解决了。但是前面曾经提到,只有当测量次数无穷多时,测量误差的分布才接近正态分布,在测量次数有限,特别是测量次数较少时,随机变量的分布已经偏离正态分布,因此用式 1-10 和式 1-11 的估值代入式 1-7 来表征置信区间时,对应的置信概率并不是式 1-7 中所给出的值,需要进行修正。

令 $t = \frac{\bar{x} - \mu}{s_{\bar{x}}/\sqrt{n}}$, 可以证明统计量 t 服从自由度 $\nu = n - 1$ 的 t 分布。 t 分布又称为学生分布。

t 分布的概率密度函数为

$$f_{\nu}(t) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\sqrt{\nu\pi}\Gamma(\frac{\nu}{2})} \left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} \quad (-\infty < t < +\infty) \quad (1-12)$$

从 t 分布的 $f_{\nu}(t)$ 形式看, t 分布不仅与测量值有关,还与测量次数 n 有关。图 1-3 为 t 分布曲线与正态分布曲线的对比。从图 1-3 中可以看到, t 分布也是左右对称,但它较正态分布曲线矮而宽,即 t 分布的离散程度比正态分布大,且这种差别在 n 越小时越明显。一般来讲,当 $n > 30$ 时, t 分布趋于正态分布。事实上,当 $n > 10$ 时, t 分布就很接近正态分布。显然,由于 t 分布比正态分布曲线矮而宽,对于同样的置信概率, t 分布相应的置信区间比正态分布的置信区间要宽一些。在 t 分布时,测量结果采用测量值的算数平均值来表征,对于置信概率 P ,对真值 μ 所给出的置信区间是 $(\bar{x} - t_p \frac{s_x}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_p \frac{s_x}{\sqrt{n}})$, 其中系数 t_p 称为 t 因子,其值既与测量次数有关,也与置信概率 P 有关。由于物理实验中常用 0.95 置信概率表示测量结果,表 1-1 给出了置信概率为 0.95 时的 t 因子。

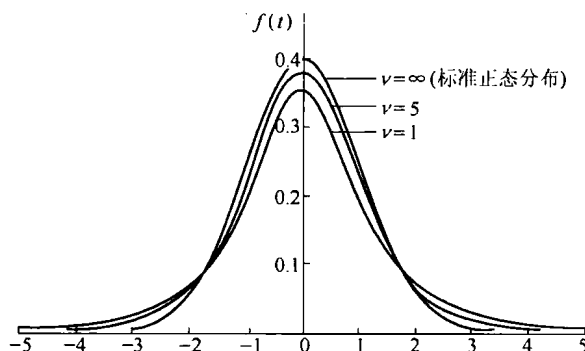


图 1-3 t 分布曲线

表 1-1 置信概率 $P=0.95$ 时的 t 因子

ν	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	∞
$t_{0.95}(\nu)$	12.71	4.30	3.18	2.78	2.57	2.45	2.36	2.31	2.26	2.23	2.13	2.09	1.96

1.4 直接测量结果的表示

根据国家计量技术规范,参考 ISO、IUPAP 等七个国际组织 1993 年联合颁布的《不确定度表示指南》,物理实验教学采用一种简化的具有一定近似性的不确定度评定方法,其要点如下:

(1) 测量结果应给出被测量的量值 $\bar{X}$, 并标出扩展不确定度 U , 写成

$$X = (\bar{X} \pm U) \quad \text{单位} \quad (1-13)$$

它表示被测量的真值在区间 $(\bar{X} - U, \bar{X} + U)$ 内的可能性(概率)约等于或大于 95%。注意式 1-13 中的括号不可省略。实验教学中,扩展不确定度也简称为不确定度。

(2) U 分为两类分量: A 类分量 U_A 用统计学方法计算; B 类分量 U_B 用非统计学方法评定; 两类分量用方和根法合成为总不确定度 U , 即:

$$U = \sqrt{U_A^2 + U_B^2} \quad (1-14)$$

(3) U_A 由实验标准偏差 s_x 乘以因子 $\frac{t_p}{\sqrt{n}}$ 求得, 即 $U_A = \left(\frac{t_p}{\sqrt{n}}\right)s_x$, 式中 s_x 是用贝塞尔公式 1-10 计算出的标准偏差。测量次数 n 确定后, 因子 $\frac{t_p}{\sqrt{n}}$ 可由表 1-2 查出。表 1-2 中的 P 为概率, 多数实验中有 $5 < n < 10$, 因子 $\frac{t_p}{\sqrt{n}} \approx 1$, 则有 $U_A \approx s_x$ 。

表 1-2 $P=0.95$ 时的 $\frac{t_p}{\sqrt{n}}$ 表

测量次数 n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	$n \rightarrow \infty$
$\frac{t_p}{\sqrt{n}}$	8.98	2.48	1.59	1.24	1.05	0.93	0.84	0.77	0.72	0.55	0.47	$\frac{1.96}{\sqrt{n}}$
$\frac{t_p}{\sqrt{n}}$ 的近似值	9.0	2.5	1.6	1.2	$6 \leq n \leq 10, P > 0.94$ 时 可取 $\frac{t_p}{\sqrt{n}} \approx 1$					$n > 10, P \approx 0.95$ 时 取 $\frac{t_p}{\sqrt{n}} \approx \frac{2}{\sqrt{n}}$		

(4) 在多数直接测量中, U_B 近似取量具或仪器仪表的误差限 $\Delta_{\text{仪}}$ 。教学中的仪器误差限一般简单地取计量器具的允许误差限(或示值误差限, 或基本误差限), 有时也由实验室根据具体情况近似给出。

在物理实验教学中, 一般可用下式计算 U

$$U = \sqrt{\left(\frac{t_p}{\sqrt{n}}\right)^2 s_x^2 + \Delta_{\text{仪}}^2} \quad (1-15)$$

如果因为 s_x 显著小于 $\frac{1}{2}\Delta_{\text{仪}}$, 或因估计出的 U_A 对实验最后结果的不确定度影响甚小, 或因条

件限制而只进行了一次测量时, U 可简单地用仪器的误差限 $\Delta_{\text{仪}}$ 来表示。当实验中只要求测量一次时, 根据实验条件, 可由实验室给出 U 的近似值。

1.5 间接测量结果的表示和不确定度的合成

在很多实验中, 我们进行的测量都是间接测量。间接测量的结果是由直接测量的结果根据一定的数学公式计算出来的。这样一来, 直接测量结果的不确定度就必然影响到间接测量结果, 这种影响的大小可以由相应的数学公式计算出来。

设直接测量量分别为 $x, y, z, \dots$, 它们都是互相独立的量, 其最佳估计值分别为 $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots$, 相应的不确定度分别为 $U_x, U_y, U_z, \dots$ 。间接测量量为 φ , φ 与各直接测量量之间的关系可以用函数形式(或称测量式)表示:

$$\varphi = F(x, y, z, \dots) \quad (1-16)$$

间接测量量 φ 的最佳估计值 $\varphi_{\text{最佳}}$ 可由将各直接测量量的最佳估计值代入函数关系式 1-16 得到:

$$\varphi_{\text{最佳}} = F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots) \quad (1-17)$$

φ 值也有相应的不确定度 U_φ 。由于不确定度都是微小的量, 相当于数学中的“增量”, 因此间接测量的不确定度的计算公式与数学中的全微分公式基本相同, 区别在于要用不确定度 U_x 等替代微分 dx 等, 要考虑不确定度合成的统计性质。

在物理实验教学中, 可以用以下公式来简化计算间接测量量的不确定度 U_φ :

$$U_\varphi = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 U_x^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 U_y^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 U_z^2 + \dots} \quad (1-18)$$

$$\frac{U_\varphi}{\varphi} = \sqrt{\left(\frac{\partial \ln F}{\partial x}\right)^2 U_x^2 + \left(\frac{\partial \ln F}{\partial y}\right)^2 U_y^2 + \left(\frac{\partial \ln F}{\partial z}\right)^2 U_z^2 + \dots} \quad (1-19)$$

以上两式, 式 1-18 适用于和差形式的函数及一般函数的计算, 是间接测量量总不确定度传递的公式; 式 1-19 适用于积商形式的函数, 是间接测量量的相对不确定度的合成(传递)公式。

应当注意, 测量结果不确定度不要与测量误差混淆。不确定度表征的是被测量真值所处的量值范围的评定, 或者是由于测量误差的存在而对被测量值不能肯定的程度。

1.6 实验数据的有效位数

在实验中所测的被测量的数值都是含有误差的, 对这些数值不能任意取舍, 应反映出测量值的准确度。例如, 用 300mm 长的毫米分度钢尺测量某物体的长度, 正确的读法是除了确切地读出钢尺上有刻线的位数之外, 还应估计一位, 即读到 $\frac{1}{10}$ mm。比如, 测出某物长度是 123.5mm, 这表明 123 是确切的数字, 而最后的 5 是估计数字, 前面的三位是准确数字, 后面一位是存疑数字。又如, 测出某铜环的体积为 $V \pm U_V = (16.63 \pm 0.20) \text{ cm}^3$, 这表明 16.63 的前两位是准确数字, 后两位是存疑数字。准确数字和 1~2 位存疑数字的全体称为有效数字。

1.6.1 有效位数的概念

国家标准 GB 8170—87 中对有效位数的定义为: 对没有小数位且以若干个零结尾的数值, 从非零数字最左一位向右数得到的位数减去无效零(即仅为定位用的零)的个数, 就是有效位数;

对其他十进位数,从非零数字最左一位向右数而得到的位数,就是有效位数。

1.6.2 有效位数的确定规则

实验数据有效位数的确定是实验数据处理中的一个重要问题。下面分读数、运算和结果表示三个环节来讨论有效位数的确定。

1.6.2.1 原始数据有效位数的确定

通过仪表、量具读取原始数据时,一定要充分反映计量器具的准确度,通常要把计量器具所能读出或估出的位数全读出来。

(1) 游标类量具,如游标卡尺、带游标的千分尺、分光仪角度游标度盘等,一般应读到游标分度值的整数倍。

(2) 数显仪表及有十进式标度盘的仪表,如电阻箱、电桥等,一般应直接读取仪表的示值。

(3) 指针式仪表一般应估读到最小分度值的 $1/10 \sim 1/4$,或估读到基本误差限的 $1/5 \sim 1/3$ 。

1.6.2.2 中间运算结果的有效位数的确定

通过运算得到的数据有效位数的确定原则是,可靠数字与可靠数字的运算结果为可靠数字,存疑数字与可靠数字或存疑数字的运算结果为存疑数字,但进位为可靠数字。

下面给出的有效位数的确定规则是根据误差理论总结出来的,能够近似地确定运算结果的有效位数。在参与运算的各量为直接测量量时:

(1) 加减运算,以参与运算的末位数量级最高的数为准,和、差都比该数末位多取 $1 \sim 2$ 位。

(2) 乘除运算,以参与运算的有效位数最少的数为准,积、商都比该数多取 $1 \sim 2$ 位。

(3) 函数值的有效位数,设 x 的有效位数已经确定,取函数(乘方、开方、三角函数、对数等)时应如何确定其有效位数呢?一般来说可由改变 x 末位一个单位,通过函数的误差传递公式计算出函数值的误差,然后根据测量结果与不确定度的末位数字要对齐的原则来决定函数值的有效位数。

[例 1-1] 已知 $x = 56.7$, $y = \ln x$, 求 y 。

[解] 因 x 的有误差位是在十分位上,所以取 $\Delta x \approx 0.1$, 利用 $\Delta y = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \Delta x^2}$ 估计 y 的误差位 $\Delta y = \frac{\Delta x}{x} = \frac{0.1}{56.7} \approx 0.002$, 说明 y 的误差位在千分位上,故

$$y = \ln 56.7 = 4.038$$

[例 1-2] 已知 $x = 9^\circ 24'$, $y = \cos x$, 求 y 。

[解] 取 $\Delta x \approx 1' \approx 0.00029$, $\Delta y = \sin x \Delta x = 0.0000475 \approx 0.00005$, 所以

$$y = \cos 9^\circ 24' = 0.98657$$

确定数据的有效位数时应注意:

(1) 运算公式中的常数,例如 $\rho = \frac{4m}{\pi(d_2^2 - d_1^2)h}$ 中的“4”和“ π ”,不是因为测量而产生的,从而不存在有效位数问题,在运算中需要几位就取几位,可以直接按计算器上的按键取用。对物理常数,其有效位数应比直接测量量中有效位数最少的数多取 $1 \sim 2$ 位,参与式中的运算。

(2) 在由一个中间运算结果计算得到下一个中间运算结果时,有效位数不要多取 $1 \sim 2$ 位。