Gailülun Yu Shuli Tongji

高等院校规划教材

概率论与数理统计

孙彩云　主编

中国矿业大学出版社

高等院校规划教材

概率论与数理统计

主　编　孙彩云
副主编　仓定帮　葛世刚
　　　　魏　静　隋丽丽

中国矿业大学出版社

内 容 提 要

本书是一本高等院校经管类专业的概率论与数理统计课程教材。全书共十章，内容包括：随机事件与概率，随机变量及其分布，多维随机变量及其分布，随机变量的数字特征，大数定律与中心极限定理，样本与抽样分布，参数估计，假设检验，回归分析与方差分析，Matlab 软件在统计分析中的运用。每章后选配了适量习题，并在书后附有习题答案。

本书注重对基本概念的叙述，淡化理论的证明推导，突出概率论与数理统计在实际中的运用。

本书可作为高等院校经济、管理等专业的概率论与数理统计课程教材，也可作为上述专业领域实际工作者的工作参考。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计 / 孙彩云主编. —徐州：中国矿业大学出版社，2015.12

ISBN 978-7-5646-2948-9

Ⅰ.①概… Ⅱ.①孙… Ⅲ.①概率论—高等学校—教材②数理统计—高等学校—教材 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 297045 号

书　　名　概率论与数理统计
主　　编　孙彩云
责任编辑　姜　华
出版发行　中国矿业大学出版社有限责任公司
　　　　　　（江苏省徐州市解放南路　邮编 221008）
营销热线　(0516)83885307　83884995
出版服务　(0516)83885767　83884920
网　　址　http://www.cumtp.com　**E-mail**：cumtpvip@cumtp.com
印　　刷　徐州中矿大印发科技有限公司
开　　本　787×1092　1/16　**印张** 12　**字数** 300 千字
版次印次　2015 年 12 月第 1 版　2015 年 12 月第 1 次印刷
定　　价　27.00 元
（图书出现印装质量问题，本社负责调换）

前　言

伴随着计算机的普及,概率论与数理统计的应用已渗透到各个领域,特别是在经济、金融、管理、保险等方面的应用得到了长足发展。在我国"概率论与数理统计"课程更是各类专业大学生的重要数学必修课之一。

本书是依据高等院校经管类本科专业"概率论与数理统计"课程的教学大纲和考试大纲的要求,结合编者多年来的教学实践,采集同类教材的精华,并结合现实生活中典型应用案例编写而成的,是一本供经济管理专业本科生学习使用的教学用书。

考虑到学习概率统计应重视在各领域的应用,注意与专业课接轨,兼顾数学体系严密性的原则,本书具有以下特点:

(1) 介绍概率论与数理统计的基本概念、理论和方法,由浅入深、循序渐进、脉络清晰,淡化理论的证明推导,突出理论的应用性;

(2) 突出概率论与数理统计的应用背景和运用方法,适当延伸基础理论,选取社会、经济、生活中经典案例,扩充知识面;

(3) 针对概率统计往往需要处理大量数据的特点,增加介绍了数学软件 matlab 的基本知识及简单应用;

(4) 精心设计与编选相应习题,与讲解的概率统计概念、理论、方法配套,强调直观性、准确性和应用性。

全书共十章,分为三大部分:第一部分是第一到第五章,讲授了概率论的基本概念、一维和多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征及极限定理;第二部分是第六到第九章,讲授了数理统计的基本知识、参数估计、假设检验、方差分析和回归分析;第三部分是第十章,简单介绍了 Matlab 软件在数理统计分析中的应用。

本书由孙彩云主编,具体编写分工为:第一章由隋丽丽编写,第二章由葛世刚编写,第三章、第九章由仓定帮编写,第四章由魏静编写,第五章、第八章由孙彩云编写,第六章由于健编写,第七章由杨戍编写,第十章、附录由张守成编写,参加编写工作的还有杨文光、刘美玲。本书由孙彩云、王涛主审。

由于编者水平有限,加之编写时间仓促,书中难免有错误及疏漏之处,衷心希望同行专家和读者批评指教。

编　者

2015 年 9 月

目 录

第一章　随机事件与概率

在我们生活的世界里,时刻发生着多种多样的现象,这些现象大体上可分为两类:一类现象在一定条件下必然发生,例如太阳从东方升起,异性电荷相吸,时间一直前进等,这类现象称为确定性现象;还存在着另一类不确定性现象,例如从扔硬币、掷骰子和玩扑克等简单的机会游戏到复杂的社会现象,从婴儿的诞生到世间万物的繁衍生息,从流星坠落到大自然的千变万化……我们无时无刻不面临着不确定性和随机性,这类现象在个别试验中呈现不确定的结果,而在大量重复试验中呈现某种规律性的结果,这类现象称为随机现象,而这种规律性称为统计规律性.

从亚里士多德时代开始,哲学家们就已经认识到随机性在生活中的作用,他们把随机性看作是破坏生活规律、超越人们理解能力的东西,并没有认识到有可能去研究随机性,或者是去测量不定性,将不定性数量化,从而尝试回答这些问题.这类研究是直到20世纪初才开始的,而且还不能说这个努力已经十分成功了,其取得的成果就给人类活动的一切领域带来了一场革命.这场革命为研究新的设想、发展自然科学知识、繁荣人类生活开拓了道路,而且也改变了我们的思维方法,使我们能大胆探索自然的奥秘.概率论与数理统计就是研究随机现象统计规律性的一门数学学科,它应用极广,几乎在所有科学领域、所有实际部门都有它的重要的应用.

第一节　随机试验

由于随机现象的统计规律性是在大量的重复观察或试验中才呈现出来的,所以人们往往需要对随机现象进行观察.

随机试验是满足下列三个条件的试验:

(1) 可重复性:试验可以在相同条件下重复进行.

(2) 可观察性:每次试验的可能结果不止一个,但能事先确定所有可能结果的范围.

(3) 随机性:每次试验前不能确定试验后会出现哪一个结果.

在实际生活中存在许多随机试验的例子:

E_1:掷一枚硬币,观察出现的是正面还是反面.

E_2:掷一颗骰子,观察出现的点数.

E_3:测试在同一工艺条件下生产出的灯泡的寿命.

E_4:记录某大超市一天内进入的顾客数量.

E_5:观察某公交站在某一时间段的候车人数.

随机试验是产生随机现象的过程,二者是并存的.我们就是通过随机试验来研究随机现象的.

第二节 样本空间、随机事件

一、样本空间

对于随机试验，尽管在每次试验之前不能预知试验结果，但是试验的所有可能结果构成的集合却是已知的，将试验所有可能结果构成的集合称为样本空间，记为 S 或 Ω. S 中的元素，即试验的每个结果，称为样本点，一般记为 e，于是 $S=\{e\}$.

例如，将一枚硬币抛掷两次，出现正面记为 H，出现负面记为 T，则样本空间由四个样本点组成，即 $S=\{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}$.

又如，若试验是测试某灯泡的寿命，则样本点是一非负数，由于不能确知寿命的上界，所以可以认为任一非负实数都是一个可能结果，故样本空间为 $S=\{t\,|\,t\geqslant 0\}$.

再如，调查城市居民（以户为单位）烟、酒的年支出额（元数），结果可以用(x,y)表示，x、y 分别是烟、酒的年支出额. 这时，样本空间由坐标平面第一象限内一定区域内一切点构成. 也可以按某种标准把支出分为高、中、低三档，这时，样本点有（高，高），（高，中），…，（低，低）等 9 种，样本空间就由这 9 个样本点构成.

二、随机事件

在随机试验中，人们除了关心试验的所有可能的结果外，往往还关心试验的结果是否具备某一指定的可观察特征. 在概率中，把具有这一可观察特征的随机试验的结果称为事件. 事件可分为随机事件、必然事件、不可能事件三类.

1. 随机事件

样本空间的任意一个子集称为随机事件，简称事件. 随机事件通常用字母 A,B,C 等表示.

例如，E_2 中，A=“点数不大于 4”，B=“点数为奇数”都是随机事件. 特别地，由一个样本点组成的单点集称为基本事件，E_2 有 6 个基本事件$\{1\},\{2\},\cdots,\{6\}$.

2. 必然事件

在每次试验中都必然发生的事件为必然事件，用字母 S（或 Ω）表示.

例如，掷骰子试验中，“点数小于 7”是必然事件.

3. 不可能事件

在任意一次试验中都不可能发生的事件为不可能事件，用符号$\varnothing$表示.

例如，在掷骰子试验中，“点数为 8”是不可能事件.

显然，必然事件与不可能事件都是确定性事件. 为讨论方便，将它们看作是两个特殊的随机事件.

三、事件的关系与运算

在一个样本空间中，可以有许多随机事件. 我们希望通过对较简单的事件的了解去掌握较复杂的事件. 为此，需要研究事件之间的关系与事件之间的运算.

由于事件是一个集合，因此，事件之间的关系与事件之间的运算应该按照集合论中集合

之间的关系与集合之间的运算来规定，对比如表 1-1 所列.

1. 包含关系

如果事件 A 发生，必然导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A，或称事件 A 被事件 B 所包含，记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$.

包含关系显然具有以下性质：

(1) $A\subset A$；

(2) 若 $A\subset B$，$B\subset C$，则 $A\subset C$；

(3) $\varnothing\subset A\subset S$.

2. 相等关系

如果事件 B 包含事件 A，同时事件 A 包含事件 B，即 $A\subset B$ 与 $B\subset A$ 同时成立，则称事件 A 与事件 B 相等，记作 $A=B$.

3. 事件的和事件

事件 $A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的和事件，即当且仅当 A、B 中至少有一个发生时，事件 $A\cup B$ 发生.

指出：$A\cup B$ 表示"A 和 B 至少有一个发生"，与"A 和 B 恰有一个发生"(即 A 发生 B 不发生，或者 B 发生 A 不发生)是不相同的.

例如，甲、乙两人射击，A="甲击中"，B="乙击中"，C="目标被击中"，则 $C=A\cup B$ 表示"甲与乙至少有一人击中目标".

类似地，称 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$ 称为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和事件，表示 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 至少有一个发生的事件. 称 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 为可列个事件 $A_1,A_2,\cdots$ 的和事件.

4. 事件的积事件

事件 $A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$ 称为事件 A 和事件 B 的积事件，即当且仅当 A 和 B 同时发生时，事件 $A\cap B$ 发生. $A\cap B$ 也可记作 AB.

类似地，称 $\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k$ 称为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积事件，表示 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生的事件. 称 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 为可列个事件 $A_1,A_2,\cdots$ 的积事件.

5. 互不相容事件

如果事件 A 和事件 B 不能同时发生，即 $A\cap B=\varnothing$，则称 A 和 B 是互不相容的，或是互斥的.

所谓 n 个事件两两互不相容，指的是其中任意两个事件都是互不相容的. 应该注意的是，比如三个事件 A,B,C 即使满足 $A\cap B\cap C=\varnothing$，也不一定两两互不相容.

指出：基本事件是两两互不相容的.

6. 事件的差

A 发生且 B 不发生的事件称为事件 A 与事件 B 的差事件，记作 $A-B$，即

$$A-B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\notin B\}.$$

7. 逆事件(或对立事件)

若 $A\cup B=S$ 且 $A\cap B=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 互为逆事件(对立事件). 这指的是对每次试验而言，事件 A、B 中必有一个发生，且仅有一个发生. A 的对立事件记作 $\overline{A}$，$\overline{A}=S$

$-A$.

例如，某建筑物在经历一场地震后，事件 A 表示“建筑物倒塌”，于是，事件 $\overline{A}$ 表示“建筑物幸存”.

逆事件具有如下性质：

$$\overline{S}=\varnothing,\overline{\varnothing}=S,\overline{\overline{A}}=A,A-B=\overline{AB},\overline{A}=S-A.$$

A 和 B 两事件对立，要求 $A\cup B=S$ 与 $A\cap B=\varnothing$ 两个等式同时成立；而 A 和 B 两事件互不相容，仅要求后一个等式成立. 所以，对立事件一定是互不相容事件，但互不相容事件未必是对立事件.

事件的运算法则(与集合运算法则相同)：

交换律：$A\cup B=B\cup A, AB=BA$；

结合律：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C, A(BC)=(AB)C$；

分配律：$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)(A\cup C), A(B\cup C)=(AB)\cup(AC)$；

对偶律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}, \overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

对于多个随机事件，上述运算法则也成立.

事件间的关系及运算与集合的关系及运算是一致的，下面给出表 1-1 所示对照表.

表 1-1 **事件运算与集合运算对照表**

记号	概率论	集合论
S	样本空间，必然事件	全集
$\varnothing$	不可能事件	空集
e	基本事件	元素
A	事件	子集
$\overline{A}$	A 的对立事件	A 的余集
$A\subset B$	事件 A 发生导致 B 发生	A 是 B 的子集
$A=B$	事件 A 与事件 B 相等	A 与 B 相等
$A\cup B$	事件 A 与事件 B 至少有一个发生	A 与 B 的和集
AB	事件 A 与事件 B 同时发生	A 与 B 的交集
$A-B$	事件 A 发生而事件 B 不发生	A 与 B 的差集
$AB=\varnothing$	事件 A 和事件 B 互不相容	A 与 B 没有相同的元素

例 1-1 设 A,B,C 为三个事件，试用 A,B,C 的运算表示下列事件：

(1) A 发生而 B,C 不发生：$A\overline{B}\,\overline{C}$；

(2) B,C 发生而 A 不发生：$\overline{A}BC$；

(3) A 发生而 B,C 中任意一个发生，但不同时发生：$(AB\overline{C})\cup(A\overline{B}C)$；

(4) A,B,C 恰有一个发生：$(A\overline{B}\,\overline{C})\cup(\overline{A}B\overline{C})\cup(\overline{A}\,\overline{B}C)$；

(5) A,B,C 恰有两个发生：$(\overline{A}BC)\cup(A\overline{B}C)\cup(AB\overline{C})$；

(6) A,B,C 都发生：ABC；

(7) A,B,C 至少有一个发生：$A\cup B\cup C$；

(8) A,B,C 一个也不发生：$\overline{A\cup B\cup C}$ 或 $\overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C}$.

例 1-2　用文字叙述下面各对事件的和与积的意义，并判断各对事件是否相容、是否对立.

(1) A：一批产品中，废品数少于 6 个；

B：同一批产品中，废品数等于 6 个.

(2) C：在某段时间内，电话交换台收到的呼唤次数不少于 20 次；

D：在同一时间内，电话交换台收到的呼唤次数不多于 20 次.

解　(1) $A\cup B$ 表示"废品数不多于 6 个"；AB 表示"废品数既少于 6 个，又等于 6 个"，显然是不可能事件.

A、B 互不相容，但不对立.

(2) $C\cup D$ 表示"呼唤次数不少于 20 次"和"呼唤次数不多于 20 次"至少有一个发生，是必然事件；CD 表示"呼唤次数等于 20 次".

C、D 相容，不对立.

第三节　随机事件的概率

对随机事件 A，在一次随机试验中，它是否会发生，事先不能确定. 但我们会考虑，在一次试验中，事件 A 发生的可能性有多大，并希望找到一个合适的数来表征事件 A 在一次随机试验中发生的可能性大小. 为此，本节首先引入频率的概念，它描述了事件发生的频繁程度，进而引出表征事件在一次试验中发生的可能性大小的数——概率.

一、频率

定义 1.1　在相同条件下，进行了 n 次试验，在这 n 次试验中，事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 发生的频数，比值 $\frac{n_A}{n}$ 称为事件 A 发生的频率，记作 $f_n(A)$.

由定义可知，频率具有下列性质：

(1) $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$；

(2) $f_n(S)=1$；

(3) 若 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 是两两互不相容的事件，则

$$f_n(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots+f_n(A_k).$$

例 1-3　考虑抛硬币这个试验，将一枚硬币抛掷 5 次、50 次、500 次，各做 10 遍. 试验得到数据如表 1-2 所示(其中 n_H 表示 H 发生的频数，$f_n(H)$ 表示 H 发生的频率).

表 1-2　　**例 1-3 数据表**

试验序号	$n=5$		$n=50$		$n=500$	
	n_H	$f_n(H)$	n_H	$f_n(H)$	n_H	$f_n(H)$
1	2	0.4	22	0.44	251	0.502
2	3	0.6	25	0.50	249	0.498
3	1	0.2	21	0.42	256	0.512

续表 1-2

试验序号	$n=5$		$n=50$		$n=500$	
	n_H	$f_n(H)$	n_H	$f_n(H)$	n_H	$f_n(H)$
4	5	1.0	25	0.50	253	0.506
5	1	0.2	24	0.48	251	0.502
6	2	0.4	21	0.42	246	0.492
7	4	0.8	18	0.36	244	0.488
8	2	0.4	24	0.48	258	0.516
9	3	0.6	27	0.54	262	0.524
10	3	0.6	31	0.62	247	494

由表 1-2 看出，$n=50$ 次时，$f_n(H)$ 仅在 0.05 附近有微小变化. 这里 0.05 就是频率的稳定值. 频率稳定性的事实说明了刻画随机事件 A 发生可能性大小的数——概率的客观存在性. 关于频率和概率的关系，需要强调以下事实：对于较大的 n，n 次试验中事件 A 的频率一般与事件 A 的概率 p 相差不大，试验次数 n 越大，频率与概率有较大偏差的情形就越少见. 频率的这种稳定性为用统计方法求概率的数值开拓了道路.

这种试验历史上有人做过，得到如表 1-3 所示的数据.

表 1-3

实验者	n	n_H	$f_n(H)$
德摩根	2 048	1 061	0.518 1
蒲丰	4 040	2 048	0.506 9
K. 皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
K. 皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5

思考：医生在检查完病人的时候摇摇头说："你的病很重，在 10 个得这种病的人中只有 1 个能救活."当病人被这个消息吓得够呛时，医生继续说："但你是幸运的，因为你找到了我，我已经看过 9 个病人了，他们都死于此病."医生的说法对吗？

答案：事件 A 的频率一般并不等于概率，频率是个试验值，具有偶然性，可能取多个不同值，它近似地反映了事件发生可能性的大小；概率是个理论值，只能取唯一值，只有它才精确地反映出事件发生可能性的大小. 因此，医生的说法是错的.

在实际中，我们不可能对每一个事件都做大量的试验，然后求得事件的概率，用以表征事件 A 发生的可能性的大小. 因此，为了理论研究的需要，我们从频率的稳定性和频率的性质得到启发，给出表征事件 A 发生的可能性的大小的概率的定义.

二、概率的定义

我们知道公理是数学体系的基础，数学上所说的公理就是不需要加以证明而公认的前提，然后以此为基础推演出所讨论对象的进一步的内容.

1933 年，前苏联数学家柯尔莫哥洛夫给出了概率的公理化定义，即通过规定概率应具

备的基本性质来定义概率.柯尔莫哥洛夫提出的公理为数很少且极为简单,但在此基础上建立起了概率论的宏伟大厦.

下面介绍用公理给出的概率定义.

概率的公理化定义 1.2 设 E 是随机试验,S 是它的样本空间.对于 E 的每一个事件 A 赋予一个实数,记为 $P(A)$,称为事件 A 的概率,如果集合函数 $P(\cdot)$ 满足下述三条公理:

公理 1(非负性) $0\leqslant P(A)\leqslant 1$;

公理 2(规范性) $P(S)=1$;

公理 3(可列可加性) 若事件 $A_1,A_2,\cdots$ 两两互不相容,则有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots.$$

这里事件个数可以是有限或无限的.

公理 1 说明,任一事件的概率介于 0 与 1 之间;公理 2 说明,必然事件的概率为 1;公理 3 说明,对于任何两两互不相容的事件序列,这些事件至少有一个发生的概率正好等于它们各自概率之和.

三、概率的性质

由概率的 3 条公理,可以推导出概率的若干性质.下面我们给出概率的一些简单性质.

性质 1(逆事件的概率) 对于任一事件 A,有 $P(\overline{A})=1-P(A)$.

分析:因为 $S=A\cup\overline{A}$,A 与 $\overline{A}$ 互不相容,$1=P(S)=P(A)+P(\overline{A})$.

性质 1 在概率的计算上很有用,如果直接计算事件 A 的概率不容易,而计算其对立事件 $\overline{A}$ 的概率较易时,可以先计算 $P(\overline{A})$,然后可得 $P(A)=1-P(\overline{A})$.

性质 2 $P(\varnothing)=0$,即不可能事件的概率为 0.

分析:令 $A=\varnothing$,$\overline{A}=S$,再利用性质 1 及公理 2 即得.

性质 3 $P(B-A)=P(B)-P(AB)$;特别地,若 $B\subset A$,则

(1) $P(B-A)=P(B)-P(A)$;

(2) $P(A)\geqslant P(B)$.

证明:因 $A=(A-B)\cup AB$,且 $(A-B)(AB)=\varnothing$,再由概率的可加性,即得

$P(A)=P(A-B)+P(AB)$,所以 $P(B-A)=P(B)-P(AB)$;特别地,若 $B\subset A$,则

$P(A)=P(A-B)+P(AB)=P(A-B)+P(B)$.

性质 4(加法公式) 对于任意两个事件 A,B,有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

分析:$P(A\cup B)=P(A\cup(B-AB))=P(A)+P(B-AB)$;又因 $AB\subset B$,再由性质 3 即得加法公式.

例 1-4 某城市发行两种报纸 A、B.经调查,在这两种报纸的订户中,订阅 A 报的有 45%,订阅 B 报的有 35%,同时订阅两种报纸 A、B 的有 10%.求只订一种报纸的概率.

解 记事件 $A=\{$订阅 A 报$\}$,$B=\{$订阅 B 报$\}$,则

$$\text{事件}\{\text{只订一种报}\}=A\overline{B}\cup B\overline{A}=(A-B)\cup(B-A);$$

又这两事件是互不相容的,由概率加法公式及性质 3,有

$$\begin{aligned}P(A\overline{B}\cup B\overline{A})&=P(A-AB)+P(B-AB)=P(A)-P(AB)+P(B)-P(AB)\\&=0.45-0.1+0.35-0.1=0.6.\end{aligned}$$

第四节 等可能概型(古典概型)

本节讨论比较简单的随机试验，是在概率论的发展过程中最早出现的研究对象，通常称为古典概型.

一、古典概型

引例 1 一个纸筒中装有 10 个大小、形状完全相同的球，如图 1-1 所示. 将球编号为 1～10，把球搅匀，蒙上眼睛从中任取一球. 因为抽取时这些球被抽到的可能性是完全平等的，所以我们没有理由认为这 10 个球中的某一个会比另一个更容易抽得. 也就是说，这 10 个球中的任一个被抽取的可能性均为 1/10.

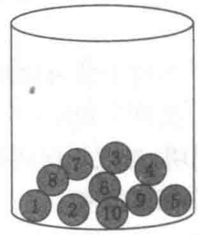

图 1-1

设 i 表示取到 i 号球，$i=1,2,\cdots,10$，则该试验的样本空间 $S=\{1,2,\cdots,10\}$，且每个样本点(即基本事件) $\{i\}(i=1,2,\cdots,10)$ 出现的可能性相同.

引例 2 设有 40 件同类产品，其中 37 件合格品、3 件废品，现从中随机地抽取一件进行检查. 这里所谓“随机地抽取”，指的就是各件产品被抽到的可能性是相同的. 由于 40 件产品中有 3 件废品，故即使不进行大量试验，我们也会认为抽到废品的可能性为 $\frac{3}{40}$.

从上面两个引例中，我们看到一种简单、直观地计算概率的方法. 但在应用这个方法时，要求随机试验具备以下两个特点：

(1) 试验的样本空间只包含有限个元素(即基本事件)，即 $S=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$；

(2) 试验中每个基本事件发生的可能性相同，即 $P(e_1)=P(e_2)=\cdots=P(e_n)=\frac{1}{n}$.

具备上述特点的随机试验是大量存在的，这种试验称为等可能概型，它在概率论发展的初期曾是主要的研究对象，所以也称为古典概型.

二、古典概型中事件概率的计算

例如，一个袋子中装有 10 个大小、形状完全相同的球，其中 6 个红球、4 个白球. 将球编号为 1～10，把球搅匀，蒙上眼睛从中任取一球. 记 $A=\{$摸到 2 号球$\}$，$B=\{$摸到红球$\}$，则 $P(A)=\frac{1}{10}$，$P(B)=\frac{6}{10}$. 这里实际上是从静态时的“比例”转化为动态时的“概率”，当我们要求“摸到红球”的概率时，只要找出它在静态时相应的比例.

定义 1.3 设试验 E 是古典概型，其样本空间 S 由 n 个基本事件组成，事件 A 由 k 个基本事件组成，则定义事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{A\text{ 包含的基本事件数}}{S\text{ 中的基本事件总数}}.$$

此概率称为为古典概率，这种确定概率的方法称为古典方法. 这样就把求概率的问题转化为计数问题.

例 1-5 同时抛掷两枚骰子,求事件 A="点数之和等于 8"的概率.

解 等可能的基本事件共有 $6^2=36$ 个,若用(x,y)表示第一枚骰子出 x 点、第二枚骰子出 y 点这一基本事件,则全部基本事件有

$$\begin{matrix}(1,1)(1,2)(1,3)(1,4)(1,5)(1,6)\\(2,1)(2,2)(2,3)(2,4)(2,5)(2,6)\\(3,1)(3,2)(3,3)(3,4)(3,5)(3,6)\\(4,1)(4,2)(4,3)(4,4)(4,5)(4,6)\\(5,1)(5,2)(5,3)(5,4)(5,5)(5,6)\\(6,1)(6,2)(6,3)(6,4)(6,5)(6,6)\end{matrix}$$

事件 A 所包含的基本事件是$(2,6)$、$(3,5)$、$(4,4)$、$(5,3)$、$(6,2)$五个,故 $P(A)=\frac{5}{36}$.

上例采用的是罗列基本事件的方法,这种方法直观、清楚,但是太繁琐了.在很多场合下,由于基本事件的总数很大,实际上是行不通的.因此在大多数场合,我们是以基本计数原理——加法原理和乘法原理为理论依据,以排列组合为重要工具,来分析求解古典概型的.

加法原理 设完成一件事有 m 种方式,第一种方式有 n_1 种方法,第二种方式有 n_2 种方法……第 m 种方式有 n_m 种方法,无论通过哪种方法都可以完成这件事,则完成这件事总共有 $n_1+n_2+\cdots+n_m$ 种方法.

乘法原理 设完成一件事有 m 个步骤,第一个步骤有 n_1 种方法,第二个步骤有 n_2 种方法……第 m 个步骤有 n_m 种方法,必须通过每一个步骤才算完成这件事,则完成这件事共有 $n_1\times n_2\times\cdots\times n_m$ 种不同的方法.

排列 从 n 个不同元素中取 k 个$(1\leqslant k\leqslant n)$的不同排列总数为

$$P_n^k=n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)=\frac{n!}{(n-k)!}.$$

P_n^k 在本书中用 A_n^k 来表示.当 $k=n$ 时称为全排列,即

$$A_n^n=A_n=n(n-1)(n-2)\cdots2\cdot1=n!.$$

组合 从 n 个不同元素中取 k 个$(1\leqslant k\leqslant n)$的不同组合总数为

$$C_n^k=\frac{A_n^k}{k!}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

C_n^k 常记作$\binom{n}{k}$,称为组合系数.

例 1-6 从 1,2,…,10 这十个数字中任取三个,分别求:三个数都小于 6 的概率;一个数字大于 6,一个数字小于 6,另一个数字恰为 6 的概率.

解 设 A 表示"三个数字都小于 6",则基本事件总数 n 为 C_{10}^3,A 中所含基本事件数 k 为 C_5^3,因此

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{C_5^3}{C_{10}^3}=\frac{10}{120}=\frac{1}{12}.$$

设 B 表示"一个数字大于 6,一个数字小于 6,另一个数字恰为 6",则 $n=C_{10}^3=120$,$k=C_4^1C_5^1C_1^1=20$,于是

$$P(B)=\frac{k}{n}=\frac{20}{120}=\frac{1}{6}.$$

例 1-7 有 10 件产品,其中 3 件次品,现从中无放回地任抽 6 件.求:(1) 全部抽到正品的概率;(2) 恰好抽到两件次品的概率;(3) 至少抽到一件次品的概率.

解 设 A 表示"全部抽到正品",B 表示"恰好抽到两件次品",C 表示"至少抽到一件次品",从 10 件产品中任取 6 件,共有 C_{10}^{6} 种取法,则

(1) $P(A)=\dfrac{C_7^6}{C_{10}^6}=\dfrac{1}{30}$;

(2) $P(B)=\dfrac{C_3^2C_7^4}{C_{10}^6}=\dfrac{1}{2}$;

(3) $P(C)=\dfrac{C_3^1C_7^5+C_3^2C_7^4+C_3^3C_7^3}{C_{10}^6}=\dfrac{29}{30}$ 或 $P(C)=1-P(\overline{C})=1-\dfrac{C_7^6}{C_{10}^6}=\dfrac{29}{30}$.

例 1-8 上例中产品有放回地任抽 6 次,每次一件.求:(1) 全部抽到正品的概率;(2) 恰好抽到两件次品的概率.

分析 设 A 表示"全部抽到正品",B 表示"恰好抽到两件次品".每次有放回地抽取一件,连抽 6 次,有 10^6 种等可能取法;组成 A 的取法只有 7^6 种;组成 B 的取法是:两件次品的可能取法有 3^2 种,4 件正品的可能取法有 7^4 种,由于两件次品在 6 次抽样过程中出现的次序是任意的,所以 B 的取法有 $C_6^2\cdot3^2\cdot7^4$ 种.故

$$P(A)=\frac{7^6}{10^6}=0.118,\ P(B)=\frac{C_6^2\cdot3^2\cdot7^4}{10^6}=0.324.$$

例 1-9 假设电话号码由 0,1,2,…,9 中四个数字组成(可以重复),任取一个电话号码,求它是由不同的四个数字组成的概率.

解 设所求事件为 A.从十个不同的数中任取四个数(可以重复),共有 10^4 种,而由不同的四个数组成电话号码的方法,共有 A_{10}^4 种,故

$$P(A)=\frac{A_{10}^4}{10^4}=\frac{63}{125}.$$

例 1-10 袋中有 a 只白球,b 只红球,k 个人依次在袋中取一只球.(1) 作放回抽样,(2) 作不放回抽样,求第 $i(i=1,2,\cdots,k)$ 人取到白球(记为事件 B)的概率($k\leqslant a+b$).

解 (1) 放回抽样的情况,显然有:$P(B)=\dfrac{a}{a+b}$;

(2) 不放回抽样的情况:$P(B)=a\cdot A_{a+b-1}^{k-1}/A_{a+b}^{k}=\dfrac{a}{a+b}$.

指出:$P(B)$与 i 无关,即 k 个人取球,尽管取球的先后次序不同,各人取到白球的概率是一样的,大家机会相同(这就好比在购买福利彩票时,每人得奖的机会是一样的);另外在放回抽样与不放回抽样的情况下 $P(B)$是一样的.

例 1-11 将 15 名新生随机地平均分配到三个班级中去,这 15 名新生中有 3 名是优秀生.问:(1) 每一个班级各分配到一名优秀生的概率是多少?(2) 3 名优秀生分配在同一班级的概率是多少?

解 15 名新生平均分配到三个班级中的分法总数为 $C_{15}^5C_{10}^5C_5^5=\dfrac{15!}{5!5!5!}$,每一种分配法为一基本事件,且每个基本事件发生的可能性相同.

(1) $p_1=\dfrac{3!12!}{4!4!4!}\Big/\dfrac{15!}{5!5!5!}=\dfrac{25}{91}$;