高等学校“十三五”规划教材

概率论与数理统计

第二版

李志强 编

化学工业出版社

高等学校“十三五”规划教材

概率论与数理统计

第二版

李志强 编

化学工业出版社

·北京·

本书共十章，主要内容包括随机事件及其概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律和中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、回归分析、方差分析、正交设计。本书注重阐明概率论的基本概念、基本理论以及数理统计常用方法的背景和思想，并通过配套的例题和习题，加强对基本理论和公式的理解和应用。为了丰富工科数学的教学内容，使学生对近代统计学的发展成果有所了解，提高学生的创新能力，本书将贝叶斯统计、逐步回归、岭回归、协方差分析和正交设计等统计方法的基本内容编入教材，为读者运用这些统计方法提供一个入门引导。

为便于学习，书后附有习题参考答案和常用分布表。本书内容阐述简明扼要、层次清晰，例题和习题覆盖面广，既可作为本科生公共数学概率论与数理统计课程的教学用书，也可作为考研复习的指导书，还可以作为相关专业人员和广大教师的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计/李志强编，—2 版．—北京：化学工业出版社，2016.9
高等学校“十三五”规划教材
ISBN 978-7-122-27561-5

Ⅰ.①概… Ⅱ.①李… Ⅲ.①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 152895 号

责任编辑：唐旭华　郝英华
责任校对：边　涛　　　　装帧设计：张　辉

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街 13 号　邮政编码 100011）
印　　刷：北京市振南印刷有限责任公司
装　　订：北京国马印刷厂
710mm×1000mm　1/16　印张 17　字数 361 千字　2016 年 10 月北京第 2 版第 1 次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686）　售后服务：010-64518899
网　　址：http://www.cip.com.cn
凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　　价：32.00 元

前　言

本书是在第一版的基础上，根据教育部高等学校工科数学教学指导委员会制订的高等学校《概率论与数理统计课程教学基本要求》，尤其是近几年理工科院校教学改革要求和考研需求修订而成，以满足理工科和经管类各专业培养应用型人才的概率论与数理统计课程的教学需要。

修订版在保留第一版的系统和风格的基础上，修正了部分记号、公式、定理和习题，保持知识结构条理清晰，同时进一步突出了重点。本次修订，对书中知识点和配套的习题进行了梳理和总结，并以知识点与习题（例题）对照表的形式放在附表中，希望能更好地满足高校教师课堂教学与学生自主学习的需要。

为了丰富工科数学的教学内容，使学生对近代统计学的发展成果有所了解，提高学生的创新能力，本书将贝叶斯统计、逐步回归、岭回归、协方差分析和正交设计等统计方法的基本内容编入教材，为读者运用这些统计方法提供一个入门引导。

全书内容中超出《概率论与数理统计课程教学基本要求》的部分标以“*”号，以供选学。讲完本书前七章（包含了《概率论与数理统计课程教学基本要求》规定的全部内容）约需48～52学时；讲完全书约需64～68学时。各章配有较多例题和习题，书末附有部分习题参考答案。

本次修订得到化学工业出版社和同行的帮助支持，在此深表感谢！书中存在的不足之处，欢迎广大读者批评指正。

编　者

2016年6月

目　录

第一章 随机事件及其概率

在对自然界的研究中，人们发现有两类现象，一类是在一定条件下必然发生（或不发生）的现象，例如，上抛一个硬币必然下落；在一个大气压下，100℃的水必然沸腾，等等。这类现象称为确定性现象。另一类现象，在一定条件下其结果呈现出不确定性，例如，在相同条件下抛一枚硬币，其结果可能是“币值”面朝上，也可能是“国徽”面朝上，这在每次抛掷之前无法确定抛掷的结果是什么。但是，在大量的重复试验或观察中，它的结果又呈现出某种规律性，如多次重复抛一枚硬币得到“币值”面、“国徽”面朝上的可能性大致各占一半；多次重复掷一颗骰子（正六面体）就会发现各点朝上的可能性大致各占1/6。这类现象，虽然每次试验或观察结果都具有不确定性，但在大量重复（相同条件下）试验或观察中，它的结果又具有某种数量规律性（统计规律性），称之为随机现象。

概率论与数理统计就是一门从数量和几何形体的角度研究随机现象的学科。

概率论与数理统计的理论和方法有着广泛的应用，几乎遍及所有科学技术领域，工农业生产和国民经济的各个部门。如在近代物理、气象、天文、地震的预报、产品的质量检查、农业试验、实验的数据处理及多因素实验配方的最佳方案、可靠性工程、自动控制等，都显示了概率论与数理统计独特的作用。

§1 随机事件及样本空间

一、随机事件及其有关概念

为了揭示随机现象的规律性，如前所述，需要做有下面三个特点的试验。

(1) 在相同的条件下可以重复地进行；

(2) 每次试验的结果不止一个，但试验的所有可能结果预先是明确的；

(3) 每次试验之前不能预先确定哪一种结果会出现。

这种试验称之为随机试验（random experiment），简称试验，记作 E。

上面提到的投掷一枚硬币，观察哪一面朝上的试验；掷一颗正六面体的骰子，观察出现的点数的试验都是随机试验。又如

E_1：记录电话交换台一分钟内接到的呼唤次数；

E_2：将一枚硬币抛三次，观察“币值”面朝上的次数；

E_3：掷两颗骰子，观察其出现的点数之和。

这些试验都具有随机试验的三个特点。今后，通过随机试验来研究随机现象。

随机试验的每一个可能结果，称为**基本事件**（simple event），通常用小写的希腊字母 ω 表示。在随机试验中，可能发生也可能不发生，而在大量试验中呈现统计规律性的事件统称为随机事件，简称事件。基本事件是随机事件中最简单的一类，由基本事件复合而成的事件称为**复合事件**。在每次随机试验中，一个复合事件发生，当且仅当构成该复合事件的任一基本事件发生。如掷一颗骰子的试验中，其出现的点数，“1 点”、“2 点”……“6 点”都是基本事件。出现偶数点，它是由出现“2 点”或“4 点”或“6 点”三个基本事件组成的，这是个复合事件。

在每次试验中必然发生的事件称为必然事件，用字母 Ω 表示；必然不发生的事件称为不可能事件，用符号 ϕ 表示。如掷一颗骰子，出现的点数“大于或等于 1 而小于或等于 6”，这是必然事件，而出现的点数“等于 7”，这是不可能事件。应当指出，必然事件或不可能事件都具有确定性，但为了今后研究的方便，仍将这两种事件看成特殊的随机事件。

二、随机事件的关系及其运算

在随机现象的研究中，需要考虑不同随机事件之间的相互关系，以及用相对简单的随机事件来表示复杂的随机事件。例如，检验某种圆柱形构件产品的外形尺寸。如果规定只有它的长度与直径都合格时才能成为合格品，那么“产品合格”与“直径合格”、“长度合格”这三个事件之间有着密切的关系。因此，有必要讨论事件之间的相互关系与运算。

(1) 如果事件 A 发生必导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A，记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$。例如，“直径不合格” $\subset$ “产品不合格”。

若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称事件 A 与事件 B 相等，记为 $A=B$。

对任一事件 A，规定 $\phi\subset A$。显然，$A\subset\Omega$。

(2) 两事件 A 与 B 至少有一个发生所构成的事件称为事件 A 与 B 的和事件，记为 $A\cup B$。例如，“直径不合格”$\cup$“长度不合格”= “产品不合格”。

类似地，n 个事件 A_1，A_2，…，A_n 中至少有一个发生所构成的事件称为这 n 个事件的和事件，记为 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$，简记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$。同样，$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 表示事件组“A_1，A_2，…，A_n，…”中至少有一个发生所构成的事件。

(3) 两个事件 A 与 B 同时发生所构成的事件称为事件 A 与 B 的积事件，记为 $A\cap B$ 或 AB。例如，“直径合格”$\cap$“长度合格”=“产品合格”。

事件组 A_1，A_2，…，A_n 同时发生，记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$。事件组 A_1，A_2，…，A_n，…同时发生，记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$。

(4) 如果事件 A 与 B 不能同时发生，即 $AB=\phi$，则称事件 A 与 B 互斥（或互不相容）。例如，“直径不合格”与“产品合格”互斥。

(5) 如果事件 A 和 B 满足 $A\cup B=\Omega$ 且 $AB=\phi$，则称事件 A 与 B 互为逆事

件，又称事件 A 与事件 B 互为对立事件。记为 $A=\overline{B}$ 或 $B=\overline{A}$。例如，“直径合格”与“直径不合格”互为逆事件。换言之，事件 A 与事件 B 互为对立事件，指的是在每次试验中，事件 A,B 中必有一个发生，且仅有一个发生。

(6) 由事件 A 发生而事件 B 不发生所构成的事件称为事件 A 与事件 B 的差事件，记为 $A-B$。例如，“直径合格”－“长度不合格”＝“产品合格”。

显然，$A-B=A\overline{B}=A-AB$。$\overline{A}=\Omega-A$。

设 A,B,C 表示事件，随机事件之间的上述关系与运算具有如下几条性质。

(1) 若 $A\subset B$，$B\subset C$，则 $A\subset C$。

(2) $A\cup B=B\cup A$。

(3) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$；$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$。

(4) $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$；$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$。

(5) $\overline{\overline{A}}=A$，若 $A\subset B$，则 $\overline{A}\supset\overline{B}$。

(6) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$；$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$。

上述性质的证明都很容易，下边只证对偶性质 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，其余留给读者做练习。

按照事件相等的定义，若 $\overline{A\cup B}$ 发生，则 $A\cup B$ 不发生，即 A 与 B 均不发生，换言之，$\overline{A}$ 发生且 $\overline{B}$ 发生，亦即 $\overline{A}\cap\overline{B}$ 发生，于是 $\overline{A\cup B}\subset(\overline{A}\cap\overline{B})$。同理可证 $(\overline{A}\cap\overline{B})\subset\overline{A\cup B}$。所以 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$。

三、样本空间

为了使概率论建立在严密的理论基础上，须引进样本空间的概念。

随机试验 E 的所有可能结果，即基本事件全体组成的集合称为试验 E 的**样本空间**，记作 Ω。样本空间的每一个元素，即每一个基本事件，称为样本空间的**样本点**。

例如，在前面列举的 E_1 中，若用 e_i 表示电话总机在一分钟内接到 i 次呼唤，则 E_1 的样本空间为 $\Omega_1=\{e_0,e_1,e_2,\cdots,e_n,\cdots\}$；在 E_2 中，若用 i 表示“币值”面朝上的次数，则 E_2 的样本空间为 $\Omega_2=\{0,1,2,3\}$；在 E_3 中，若用 i 表示掷两颗骰子出现的点数之和，则 E_3 的样本空间为 $\Omega_3=\{2,3,4,5,6,\cdots,12\}$。

样本空间的元素是由试验目的确定的，例如，掷两颗骰子，观察一点朝上的个数 i，此时，样本空间 $\Omega=\{i\,|\,i=0,1,2\}$。这与 E_3 的样本点的意义不同，样本空间也不同。

样本空间是概率论最基本的一个概念，它把事件与集合联系起来，用集合表示事件；由一个样本点组成的单点集就是基本事件，试验 E 的样本空间 Ω 的子集为 E 的**随机事件**。在每次试验中，当且仅当这一子集中的一个样本点出现时，称这一事件发生。于是事件间的关系和运算就可以用集合论的知识来解释。

随机事件之间的关系与运算可以表示为一个示意图，称为随机事件的 Venn 图 (Venn diagram)。在 Venn 图中，用平面上的矩形表示样本空间（即必然事件），矩形内的任一子区域表示一个随机事件，如图 1-1 所示，图中的两个圆形表示事件

A 和事件 B。

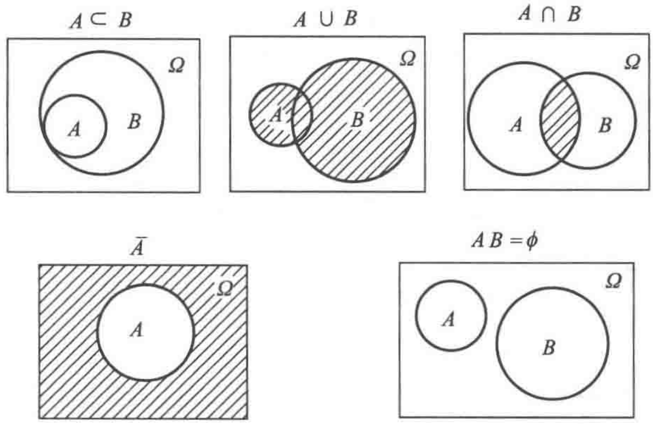

图 1-1

【例 1】 从一批产品中每次取出一个产品进行检验（每次取出的产品不放回），事件 A_i 表示第 i 次取到合格品（$i=1,2,3$）。试用事件的运算符号表示下列事件：三次都取到了合格品；三次中至少有一次取到合格品；三次中恰有两次取到合格品；三次中最多有一次取到合格品；三次中不多于两次取到合格品。

解 三次都取到了合格品：$A_1A_2A_3$；

三次中至少有一次取到了合格品：$A_1\cup A_2\cup A_3$；

三次中恰有两次取到合格品：$A_1A_2\overline{A}_3\cup A_1\overline{A}_2A_3\cup\overline{A}_1A_2A_3$；

三次中最多有一次取到合格品：$\overline{A}_1\overline{A}_2\cup\overline{A}_1\overline{A}_3\cup\overline{A}_2\overline{A}_3$；

三次中都不多于两次取到合格品：$\overline{A}_1\cup\overline{A}_2\cup\overline{A}_3$。

§2 频率与概率

随机事件在一次试验中是否发生是不确定的，人们常常希望知道某些事件在一次试验中发生的可能性究竟有多大，并希望用一个数来表示事件在一次试验中发生的可能性大小。为此首先引入频率，它描述了事件发生的频繁程度，进而引出表征事件在一次试验中发生的可能性大小的数——概率。

一、频率

定义 2.1 在相同的条件下，做 n 次重复试验，若事件 A 发生了 m 次，则称比值 m/n 为这 n 次试验中事件 A 发生的频率，记为 $f_n(A)$，即 $f_n(A)=\dfrac{m}{n}$。

易证，频率具有下列基本性质。

(1) 对任一事件 A 有 $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$。

(2) $f_n(\Omega)=1, f_n(\phi)=0$。

(3) 若 A_1，A_2，…，A_k 是两两互斥的事件，则

$$f_n\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right)=\sum_{i=1}^{k} f_n(A_i)$$

由于事件 A 发生的频率是它发生的次数与试验次数之比，其大小表示 A 发生的频繁程度，频率越大，事件 A 发生越频繁，这就意味着 A 在一次试验中发生的可能性愈大，直观的想法是用频率来表示 A 在一次试验中发生的可能性大小。但是否能用频率作为概率的定义呢？请看下面具体事例。

历史上有人作过成千上万次掷硬币的试验，表 1-1 列出了他们的试验记录。

表 1-1

实验者	实验次数 n	正面朝上的次数 m	频率 $f_n(A)$
德·摩根	2048	1061	0.5181
蒲丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005

由上述数据可以看出：

(1) 频率随着掷硬币次数 n 的变化而不同，还可用试验说明对于相同的掷硬币次数 n，频率也具有随机波动性；

(2) 掷硬币次数 n 较小时，频率随机波动的幅度较大，但随着 n 的增大，频率呈现出稳定性，即当 n 逐渐增大时，频率总是在数 0.5 附近摆动，而逐渐稳定于 0.5。

由此可以看出，当 n 较小时用频率来表达事件发生的可能性的大小显然是不合适的，而当 n 逐渐增大时，频率逐渐稳定于某一个常数。对于每一个随机事件 A 都有这样一个客观存在的常数与之对应。这种“频率稳定性”就是通常所说的统计规律性，它不断地为人们的实践所证实，它揭示了隐藏在随机现象中的规律性。用这个频率的稳定值来表示事件发生的可能性大小是合适的。

二、概率的古典定义

概率的古典定义源自于概率的古典模型，这种模型的核心思想来自于对只包含有限个等可能基本事件的随机试验的研究。这种随机试验是人们最早注意到的一类随机现象，它与排列、组合问题有着密切的联系。

如果随机试验，具有如下两个特征：

(1) 试验的样本空间的基本事件只有有限个；

(2) 试验中每个基本事件发生的可能性相同。

具有这两个特征的随机试验所对应的数学模型称为**古典概型**（或称**等可能概型**）。

定义 2.2　在古典概型中，如果基本事件的总数为 n，事件 A 包含 m 个基本事件，则称 $\frac{m}{n}$ 为事件 A 的概率，记为 $P(A)=\frac{m}{n}$。

关于概率论的产生，目前公认的是始于 17 世纪，帕斯卡尔（B. Pascal）与费尔马（P. de Fermat）在来往信件中关于掷骰子游戏中的数学问题的讨论。此后，经多位数学家的工作，概率论的内容得到了不断的丰富，到了 1812 年，法国数学

家拉普拉斯（P. S. Laplace）完成了他的集大成之作《Théorie analytique des probabilities》。在该著作中，拉普拉斯提出了概率的上述定义。现在将此定义称为概率的古典定义，因为它只适用于古典概型。

【例 1】 号码锁上有6个拨盘，每个拨盘上有 0～9 共 10 个数字，当这 6 个拨盘上的数字组成原确定打开号码锁的 6 位数时（第一位可以是 0），锁才能打开，如果不知道锁的号码，一次就把锁打开的概率是多少?

解 原确定打开号码锁的六位数字只有一个，设 A 表示“一次就把锁打开”事件，由题知，号码锁所有可能组成的六位号码共有 10^6 个。因此

$$P(A)=\frac{1}{10^6}=0.000001$$

这说明一次就把锁打开的可能性只为百万分之一，因此，在不知锁号码的情况下，一次就把锁打开几乎是不可能的。

【例 2】 设一口袋中有 m 件产品，其中有 k 件正品，$m-k$ 件次品。现从中一次任意取出 n（$n\leqslant m$）件产品，问其中恰有 j（$j\leqslant k$）件正品的概率。

解 从 m 件产品中任取 n 件，所有可能的取法共有 C_m^n 种，即基本事件总数为 C_m^n。在 k 件正品中任取 j 件，所有可能的取法为 C_k^j 种；其余 $n-j$ 件只能从 $m-k$件次品中取出，所有可能的取法为 C_{m-k}^{n-j}种。于是，所求事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{C_k^j\cdot C_{m-k}^{n-j}}{C_m^n}$$

定理 2.1 古典概率具有下列性质：

（1）对任意事件 A，有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$。

（2）$P(\Omega)=1$，$P(\phi)=0$。

（3）如果事件 A 与 B 互斥，则

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

证 性质（1）、（2）显然。

对于性质（3），设样本空间共有 n 个基本事件，事件 A 中包含 m_1 个，事件 B 中包含 m_2 个，已知 $AB=\phi$，则 $A\cup B$ 中包含 m_1+m_2 个两两互斥的基本事件，因而

$$P(A\cup B)=\frac{m_1+m_2}{n}=\frac{m_1}{n}+\frac{m_2}{n}=P(A)+P(B)$$

利用数学归纳法可证：若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互斥，则有

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n}A_k\right)=\sum_{k=1}^{n}P(A_k)$$

此性质称为概率的有限可加性。

由性质（3）可证，$P(A)+P(\overline{A})=1$，即 $P(A)=1-P(\overline{A})$。

【例 3】 将一枚硬币抛掷三次。

（1）设事件 A_1 为“恰有一次出现正面”，求 $P(A_1)$。

（2）设事件 A_2 为“至多有一次出现正面”，求 $P(A_2)$。

（3）设事件 A_3 为“至少有一次出现正面”，求 $P(A_3)$。

解　(1) 一枚硬币抛掷三次，所有可能的结果为 $2^3=8$。"恰有一次出现正面"，可能只是第一次出现正面，可能只是第二次出现正面，可能只是第三次出现正面。所有可能为 3 种，因而

$$P(A_1)=\frac{3}{8}$$

(2)"至多有一次出现正面"意味着"三次无一次正面"或"三次恰有一次正面"，因而

$$P(A_2)=\frac{1+3}{8}=\frac{1}{2}$$

(3)"至少有一次出现正面"与"无一次出现正面"为对立事件，则

$$P(A_3)=1-P(\text{无一次出现正面})=1-\frac{1}{2^3}=\frac{7}{8}$$

【例 4】　产品放在一箱内，其中正品 46 件，废品 4 件，从箱中取产品两次，每次随机地取一件。考虑两种取产品方式：第一次取一件观察结果后放回箱中，搅匀后再取一件，这种取产品方式叫做有放回抽样；第一次取一件不放回箱中，第二次从剩余的产品中再取一件，这种取产品方式叫做不放回抽样。试分别就上面两种情况，求

(1) 取到的两件产品都是正品的概率；

(2) 取到的两件产品为同质量的概率；

(3) 取到的两件产品中至少有一件是正品的概率。

解　设 A，B，C 分别表示事件"取到的两件都是正品"、"取到的两件都是废品"、"取到两件中至少有一件是正品"。易知，"取到的两件为同质量"事件为 $A\cup B$，而 $C=\overline{B}$。

有放回抽样的情况：

(1) $P(A)=\dfrac{46\times 46}{50\times 50}=0.8464$

(2) $P(B)=\dfrac{4\times 4}{50\times 50}=0.0064$

且 $AB=\phi$，所以　　$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=0.8528$

(3) $P(C)=P(\overline{B})=1-P(B)=0.9936$

不放回抽样的情况：

(1) $P(A)=\dfrac{46\times 45}{50\times 49}=0.8449$

(2) $P(B)=\dfrac{4\times 3}{50\times 49}=0.0049$

又 $AB=\phi$，所以　　$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=0.8498$

(3) $P(C)=P(\overline{B})=1-P(B)=0.9951$

【例 5】　设有 n 个球，每个都能以同样的概率 $\frac{1}{N}$ 落到 N 个盒子 $(N\geqslant n)$ 的每一

个盒子中（设盒子的容量不限），试求：

(1) 每个盒子至多有一个球的概率 p_1；

(2) 某指定的 n 个盒子中各有一个球的概率 p_2；

(3) 任何 n 个盒子中各有一个球的概率 p_3。

解 对于每一个球，它可落入 N 个盒子中的任一个，因而它有 N 种落入法，于是 n 个球落入 N 个盒子中共有$\underbrace{N \cdot N \cdot \cdots \cdot N}_{n}=N^n$ 种落入法。

(1) 每个盒子至多有一个球，于是第一个球有 N 种落入法，第二个球有 $N-1$ 种落入法，类似地做下去，可知放法共有 $N(N-1)\cdots[N-(n-1)]$种，则

$$p_1=\frac{N(N-1)\cdots[N-(n-1)]}{N^n}=\frac{P_N^n}{N^n}$$

(2) 已指定 n 个盒子中各有一个球的落入法共有 $n(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1=n!$ 种，则

$$p_2=\frac{n!}{N^n}$$

(3) 任何 n 个盒子中各有一个球，完成这件事需分两步。首先从 N 个盒子任取 n 个盒子，这有 C_N^n 种方法；再把 n 个球放入某指定的 n 个盒子中（每盒放入一球），这有 $n!$ 种方法，则

$$p_3=\frac{C_N^n\cdot n!}{N^n}=\frac{N!}{N^n\cdot(N-n)!}$$

三、几何概率

当随机试验样本空间中的基本事件个数为无穷多个时，便产生了一种新的概率模型。

如果随机试验具有下列两个特征：

(1) 随机试验样本空间中的基本事件有无穷多个；

(2) 每一个基本事件在样本空间中是“均匀分布”的。

具有这样两个特征的随机试验所对应的数学模型称为**几何概型**。

在几何概型中，对样本空间及其子集的度量，是采用几何的手段。直观地说，在一维空间是区间长度，二维空间是区域面积，三维空间是区域体积……。空集的几何度量为零。需要特别指出的是，“基本事件在样本空间中是均匀分布的”具体含意是：由样本点构成的子集所对应的随机事件发生的可能性大小与子集的几何度量结果成正比，而与该子集的几何形状及其在样本空间中的位置无关。

定义 2.3 在几何概型中，以 $L(\Omega)$和 $L(A)$分别表示样本空间和随机事件 A 所对应的子集的几何度量值，则称$\dfrac{L(A)}{L(\Omega)}$为事件 A 的概率，记作

$$P(A)=\frac{L(A)}{L(\Omega)}$$

【例 6】（会面问题）两人相约 7 点到 8 点在某地会面，先到者等候另一人 20 分钟，过时就可离去，试求这两人能会面的概率。

解　以 x,y 分别表示两人到达的时刻，则会面的充要条件为 $|x-y|\leqslant 20$。这是一个几何概率问题，可能的结果全体是边长为 60 的正方形里的点，能会面的点的区域用阴影标出（如图 1-2），所求概率为 $p=\dfrac{60^2-40^2}{60^2}=\dfrac{5}{9}$。

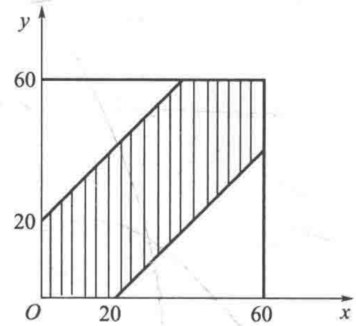

图 1-2

【例 7】　在线段 AD 上任取两点 B,C，在 B,C 处折断而得三个线段，求"这三个线段能构成三角形"的概率。

解　设 A 表示事件"三个线段能构成三角形"，三个线段的长度分别为 x,y,z，线段 AD 长度为 a，则有

$$x+y+z=a$$
$$x>0,\ y>0,\ z>0,\ a>0$$

把 x,y,z 看成空间点的坐标，则所有基本事件可用平面 $x+y+z=a$ 在第一卦限内的部分上$\triangle PQR$ 上的所有点表示。要使三条线段构成三角形，需满足条件

$$0<x<y+z,\ 0<y<x+z,\ 0<z<x+y$$

满足上述三个不等式点的集合为平面 $x+y+z=a$ 上$\triangle PQR$ 的三边中点连线所构成的$\triangle EFG$ 上的所有点组成（如图 1-3 所示）。则

$$P(A)=\frac{\triangle EFG\text{ 的面积}}{\triangle PQR\text{ 的面积}}=\frac{1}{4}$$

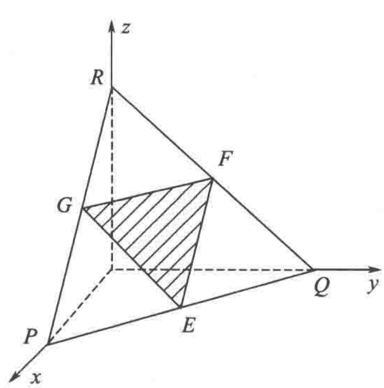

图 1-3

四、概率的公理化定义

两个互斥事件的和的概率等于这两个事件的概率之和，是古典概率与几何概率的一条核心性质，概率的公理化模型就是将这一性质加以推广。与古典概型和几何概型不同，在公理化模型中，所涉及的随机试验，不再局限于基本事件的总数有限、基本事件具有等可能性或在样本空间中均匀分布、样本空间及其子集具有几何度量值。

定义 2.4 设 E 是随机试验，Ω 是它的样本空间，对于 E 的每一事件 A 赋予一个实数，记为 $P(A)$，称 $P(A)$ 为事件 A 的概率，如果它满足下列三个条件：

(1) 对于每一个事件 A，有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

(2) $P(\Omega)=1$；

(3) 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 是两两互斥的事件，即对于 $i\neq j$，$A_iA_j=\phi$，$i,j=1,2,\cdots$，则有

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)$$

并称此为概率的可列可加性。

显然，概率的古典定义和几何定义是公理化定义的特殊情形。

由概率的公理化定义可以推得概率的一些重要性质。

性质 1 $P(\phi)=0$

证 $\quad \Omega=\Omega\cup\phi\cup\phi\cup\cdots$

由条件(3)知 $\quad P(\Omega)=P(\Omega)+P(\phi)+P(\phi)+\cdots$

又 $P(\Omega)=1$，故 $\quad 1=1+P(\phi)+P(\phi)+\cdots$

所以 $\quad 0=P(\phi)+P(\phi)+\cdots$

由条件(1)知 $\quad P(\phi)\geqslant 0$

所以 $\quad P(\phi)=0$

性质 2 如果 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互斥，则有

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n}A_k\right)=\sum_{k=1}^{n}P(A_k)$$

证 在条件 (3) 中，令 $A_{n+1}=A_{n+2}=\cdots=\phi$，并利用性质 1 推得

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n}A_k\right)=P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\right)=\sum_{k=1}^{\infty}P(A_k)=\sum_{k=1}^{n}P(A_k)$$

此性质也称为概率的有限可加性。

性质 3 对任一事件 A，成立等式

$$P(A)=1-P(\overline{A})$$

证 因为 $A\cup\overline{A}=\Omega$，且 $A\overline{A}=\phi$，由性质 2 知

$$P(A)+P(\overline{A})=P(A+\overline{A})=P(\Omega)=1$$

性质 4 （减法公式）若 $A\subset B$，则 $\quad P(B-A)=P(B)-P(A)$

证 因为当 $A\subset B$ 时，$B=A\cup(B-A)$，且 $A(B-A)=\phi$，由性质 2 知

$$P(B)=P(A)+P(B-A)$$

即
$$P(B-A)=P(B)-P(A)$$

推论 若 $A\subset B$，则 $P(A)\leqslant P(B)$。

性质 5（加法公式） 设 A,B 为任意两个事件，则有
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

证 因为 $A\cup B=A\cup(B-AB)$，且 $A(B-AB)=\phi$，$AB\subset B$，由可加性和性质 4 知
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B-AB)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

推论 $P(A\cup B)\leqslant P(A)+P(B)$

性质 5 还可推广到多个事件的情况，例如，设 A_1,A_2,A_3 为任意三个事件，则有
$$P(A_1\cup A_2\cup A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)$$
$$-P(A_1A_3)-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3)$$

一般，对于任意 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，可以用归纳法证得
$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+$$
$$\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$$

【例 8】 设 $P(A)=\dfrac{1}{3}$，$P(B)=\dfrac{1}{2}$，在下列三种情况下求 $P(B\overline{A})$的值。

(1) A 与 B 互斥；

(2) $A\subset B$；

(3) $P(AB)=\dfrac{1}{8}$。

解 (1) 由于 $AB=\phi$，故 $B\subset\overline{A}$，则 $B\overline{A}=B$，因此
$$P(B\overline{A})=P(B)=\frac{1}{2}$$

(2) 当 $A\subset B$ 时
$$P(B\overline{A})=P(B-A)=P(B)-P(A)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

(3) 当 $P(AB)=\dfrac{1}{8}$时，因为 $B\overline{A}=B-A=B-AB$，又 $AB\subset B$，则
$$P(B\overline{A})=P(B-A)=P(B-AB)=P(B)-P(AB)$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$$

【例 9】 在1～2000的整数中随机地取一个数，问取到的整数不能被 6 整除，又不能被 8 整除的概率是多少？

解 设 A 为事件"取到的数能被 6 整除"，B 为事件"取到的数能被 8 整除"，