普通高等教育“十二五”规划教材

矩阵论与数值分析基础

JUZHENLUN YU SHUZHI FENXI JICHU

邱启荣　张可铭　编

中国电力出版社
CHINA ELECTRIC POWER PRESS

普通高等教育“十二五”规划教材

矩阵论与数值分析基础

JUZHENLUN YU SHUZHI FENXI JICHU

邱启荣　张可铭　编
朱来义　主审

中国电力出版社
CHINA ELECTRIC POWER PRESS

内 容 提 要

本书为普通高等教育“十二五”规划教材。全书共六章，主要内容包括：矩阵运算与矩阵分解，线性空间与线性变换，矩阵的 Jordan 标准形与矩阵函数，方程（组）求解的数值方法，数值逼近方法与数值微积分，常微分方程的数值方法等内容。本书注重数学概念的理解与应用，突出数学思想与数学方法的阐述，精简了定理的证明、公式的推导。

本书可作为理工科院校硕士研究生矩阵论与数值分析基础课程的教材，还可作为学习矩阵论与数值分析基础人员的参考用书。

图书在版编目（CIP）数据

矩阵论与数值分析基础/邱启荣，张可铭编．—北京：中国电力出版社，2011.9

普通高等教育“十二五”规划教材

ISBN 978-7-5123-2127-4

Ⅰ.①矩… Ⅱ.①邱… ②张… Ⅲ.①矩阵论—高等学校—教材②数值分析—高等学校—教材 Ⅳ.①O151.21②O241

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 189861 号

中国电力出版社出版、发行

（北京市东城区北京站西街 19 号 100005 http：//www.cepp.sgcc.com.cn）

汇鑫印务有限公司印刷

各地新华书店经售

*

2011 年 11 月第一版 2011 年 11 月北京第一次印刷

787 毫米×1092 毫米 16 开本 13.75 印张 336 千字

定价 **26.00** 元

前　言

矩阵论与数值分析是理工科院校硕士研究生重要的公共基础课程，在华北电力大学电气与电子信息工程、动力工程、自动控制与计算机等专业的硕士研究生课程设置中，它们是两门课程，一般分别在学生一年级第一学期的上、下两个半学期中开设。在国内外著名大学中，它们大都也是分两门课程开，因此，教材是单独的，两门课程内容结合得很少。

鉴于学历教育类工程硕士需要有一年的时间参加工程训练，非学历教育类工程硕士以自学为主，为了在有限的时间内，让研究生在掌握必需的数学基本理论与方法的同时，具备应用数学和计算机手段解决实际问题的能力，本教材根据（全日制、在职）工程硕士研究生的特点和培养创新型人才的要求，重新组织和精选教材内容，将矩阵论与数值分析两门工科院校硕士研究生重要的公共基础课程的内容按课程体系进行编写。本教材精简了教学内容，着重提高研究生应用数学方法理论和解决实际问题的能力。课程所选内容的起点低、范围广，以适应不同专业研究生的需要。读者只需具备基本的大学数学知识，就可以进行课程学习。教材内容尽可能做到深入浅出，通俗易懂，并注意与大学数学（高等数学、线性代数）有关内容的衔接，使读者易于阅读理解。

本书由华北电力大学邱启荣、张可铭编写，其中第 1 章～第 4 章由邱启荣编写，第 5 章和第 6 章由张可铭编写。全书由中国人民大学朱来义教授主审。

本书作为华北电力大学“211 工程”三期 2009 年创新人才培养建设项目的一部分，得到了学校、研究生院和数理系的大力支持。本书在编写过程中，参考了同行的工作，他们的工作为本书的编写提供了丰富的素材，也提供了有益的借鉴。本书的主审人对书稿进行了认真的审阅，并提出了许多宝贵的意见。在此，作者对他们表示衷心的感谢。

限于编者水平，加之时间仓促，书中错漏和不足之处在所难免，恳请广大读者批评指正。

编　者

2011 年 7 月

目　　录

第 1 章　矩阵运算与矩阵分解

1.1　矩阵的基本运算与方阵的特征值

1.1.1　矩阵

定义 1.1.1　由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 排成的 m 行 n 列的数表

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=(a_{ij})_{m\times n}=(a_{ij})$$

称为 m 行 n 列矩阵，简称 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$，其中 a_{ij} 叫做矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素.

根据矩阵中的元素是实数还是复数，可将矩阵分为实矩阵与复矩阵. 下面给出一些特殊矩阵.

(1) 行矩阵　$m=1$　$\boldsymbol{A}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)_{1\times n}$.

(2) 列矩阵　$n=1$　$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}_{m\times 1}$.

(3) 零矩阵　$\boldsymbol{A}=(0)_{m\times n}=\boldsymbol{0}$（不同型的零矩阵是不同的）.

(4) 方阵　$m=n$，$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，称为 n 阶方阵.

(5) 单位矩阵　$\boldsymbol{E}_n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 称为 n 阶单位矩阵.

(6) 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，如果

1) 当 $i>j$ 时，$a_{ij}=0$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为上三角阵.

2) 当 $i<j$ 时，$a_{ij}=0$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为下三角阵.

1.1.2　矩阵的基本运算

1. 矩阵的加法

定义 1.1.2　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$，则矩阵

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的和，记为 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$.

加法运算律

(1) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$.（交换律）

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$.（结合律）

2. 数与矩阵的乘法

定义 1.1.3 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$k$ 为常数，则称 $k\boldsymbol{A}$ 为数与矩阵的乘法，简称数乘，即

$$k\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

运算律

(1) $(\lambda\mu)\boldsymbol{A}=\lambda(\mu\boldsymbol{A})$；

(2) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{A}$；（$\lambda$，$\mu$ 为常数）

(3) $\lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\lambda\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}$.

矩阵的加法运算和数与矩阵的乘法统称为矩阵的代数运算.

例 1.1.1 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$，求 $2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{B}$.

解 $2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 9 & -6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ -9 & 8 \end{pmatrix}$.

3. 矩阵与矩阵的乘法

定义 1.1.4 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}$，则规定 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积是一个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}$，其中

$$\begin{aligned} c_{ij} &= a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj} \\ &= \sum_{k=1}^{s} a_{ik}b_{kj}, \quad i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n \end{aligned}$$

并记作 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$.

矩阵乘法的运算律（假定运算是可行的）

(1) $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$（结合律）；

(2) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$；$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}$（分配律）；

(3) $\lambda(\boldsymbol{AB})=(\lambda\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{B})$.

一般情况下

(1) 消去律不成立，即由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$，得不出 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$；

(2) 交换律不成立，即 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$.

设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶方阵. 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则称 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 是可交换的.

例 1.1.2 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & 2 & -2 \end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{AB}$.

解

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1\times2+3\times5 & 1\times3+3\times2 & 1\times(-1)+3\times(-2)\\ -1\times2+2\times5 & -1\times3+2\times2 & -1\times(-1)+2\times(-2)\\ 4\times2+0\times5 & 4\times3+0\times2 & 4\times(-1)+0\times(-2)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}17 & 9 & -7\\ 8 & 1 & -3\\ 8 & 12 & -4\end{pmatrix}$$

4. n 阶方阵的幂

定义 1.1.5 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，则定义

$$\boldsymbol{A}^1=\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}^1\boldsymbol{A}^1,\cdots,\boldsymbol{A}^{k+l}=\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A}$$

对任意 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，规定：$\boldsymbol{A}^0=\boldsymbol{E}_n$.

方阵幂的运算律

(1) $\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A}^l=\boldsymbol{A}^{k+l}$;

(2) $(\boldsymbol{A}^k)^l=\boldsymbol{A}^{kl}$;

其中 k，l 为正整数.

由于一般情况下，$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$. 当 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$ 时，$(\boldsymbol{AB})^k\neq\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^k$.

5. 转置矩阵与共轭转置矩阵

定义 1.1.6 把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行均换成同序数的列所得到的矩阵，称为 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，记作 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 或 $\boldsymbol{A}'$.

例如

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

运算律

(1) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$;

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$;

(3) $(k\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$;

(4) $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

定义 1.1.7 把复矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的每一个元素分别取共轭数后所得到的矩阵，称为 $\boldsymbol{A}$ 的共轭转置矩阵，记作 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$.

例如 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1-3i & 5 & 6-4i\\ 3i & 7+5i & 0\end{pmatrix}$ 的共轭转置矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}=\begin{pmatrix}1+3i & -3i\\ 5 & 7-5i\\ 6+4i & 0\end{pmatrix}$.

显然对于实矩阵 $\boldsymbol{A}$，有 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

对 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{n\times n}$，如果 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，则称它为实对称阵；如果 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$，则称它为反对称阵.

对 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{n\times n}$，如果 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{A}$，则称它为 Hermite（埃尔米特）阵.

如 $\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 3 & -4\\ 0 & -4 & -6\end{pmatrix}$ 是实对称阵，而 $\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}2 & 1-3i & 0\\ 1+3i & 3+7i & -4+5i\\ 0 & -4-5i & -6\end{pmatrix}$ 是 Hermite 阵.

对 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{n\times n}$，如果 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，则称它为正交阵. 正交阵有以下性质

(1) 若 $\boldsymbol{A}$ 是正交阵，则 $\det(\boldsymbol{A})=\pm1$.

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 是正交阵，则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{-1}$，且 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也是正交阵.

(3) 同阶正交阵的乘积仍是正交阵.

(4) $\boldsymbol{A}$ 是正交阵的充分必要条件是它的行（列）向量组是两两正交的单位向量组.

对 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{n\times n}$，如果 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，则称它为酉矩阵.

实对称阵有如下性质

(1) $\boldsymbol{A}$ 的特征值皆为实数；

(2) $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量；

(3) 对应于不同特征值的特征向量必正交；

(4) 存在正交阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角阵.

如果 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{n\times n}$（也包括 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{n\times n}$）满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 是正规矩阵.

不难验证以上的对角阵、实对称阵、实反对称阵、正交阵和酉矩阵都是正规矩阵. 当然还有其他满足条件的正规矩阵. 正规矩阵是一类重要的矩阵，它有一个重要的性质，一个 n 阶方阵是正规矩阵的充分必要条件是它能用相似变换化简为一个对角阵.

对实对称阵 $\boldsymbol{A}$，如果对任意非零向量 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^{n}$，都有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0$，则称 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵；如果对任意非零向量 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^{n}$，都有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}<0$，则称 $\boldsymbol{A}$ 是负定矩阵.

正（负）定矩阵有如下性质

(1) 对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为正（负）定的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为正（负）.

(2) 对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为正定的充分必要条件是：$\boldsymbol{A}$ 的各阶顺序主子式都为正，即

$$a_{11}>0,\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}>0,\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}>0,\cdots$$

(3) 对称矩阵 A 为负定的充分必要条件是：奇数阶顺序主子式为负，而偶数阶顺序主子式为正，即

$$(-1)^r\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1r}\\\vdots&\ddots&\vdots\\a_{r1}&\cdots&a_{rr}\end{vmatrix}>0,\quad r=1,2,\cdots,n$$

其中 (2) 和 (3) 称为霍尔维茨定理.

6. *方阵的行列式*

定义 1.1.8 由 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素所构成的 n 阶行列式（各元素的位置不变），称为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式. 记作 $|\boldsymbol{A}|$ 或 $\det\boldsymbol{A}$.

注意：方阵与其行列式不同，前者为数表，后者为数值.

运算律：设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 是 n 阶方阵，则

(1) $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|$；

(2) $|k\boldsymbol{A}|=k^{n}|\boldsymbol{A}|$；

(3) $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$.

1.1.3 矩阵的初等变换与初等方阵

定义 1.1.9 下面三种变换称为矩阵的初等行变换

（1）对换两行（对换 i，j 两行，记为 $r_i \leftrightarrow r_j$）；

（2）以不为 0 的数 k 乘以矩阵的某一行的所有元素（第 i 行乘 k 记为 $r_i \times k$）；

（3）把某一行的 k 倍加到另一行对应的元素上（第 j 行的 k 倍加到第 i 行，记为 $r_i + kr_j$）.

对应地，可以定义矩阵的初等列变换．矩阵的初等行变换和矩阵的初等列变换统称为矩阵的初等变换.

由单位矩阵经过一次初等变换得到的方阵称为初等矩阵．因此，初等方阵有如下三类.

1．*对调两行或两列*

对调 $\boldsymbol{E}$ 中第 i，j 两行，即（$r_i \leftrightarrow r_j$），得初等方阵

$$\boldsymbol{E}(i,j) = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & \\ & & & 0 & & \cdots & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & & & & & \\ & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \\ & & & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & \cdots & & 0 & & & \\ & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \\ \\ \leftarrow \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

2．*以数 $k \neq 0$ 乘某行或某列*

以数 $k \neq 0$ 乘单位矩阵的第 i 行（$r_i \times k$），得初等矩阵 $\boldsymbol{E}(i(k))$

$$\boldsymbol{E}(i(k)) = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & k & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

3．*以数 $k \neq 0$ 乘某行（列）加到另一行（列）上*

以 k 乘 $\boldsymbol{E}$ 的第 j 行加到第 i 行上（$r_i + kr_j$）[或以 k 乘 $\boldsymbol{E}$ 的第 i 列加到第 j 列上（$c_j + kc_i$）]

$$\boldsymbol{E}(i,j(k)) = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \cdots & k & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \leftarrow \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

对 $A_{m\times n}$ 施行一次初等行变换，相当于在 A 的左边乘以相应的 m 阶初等矩阵；对 A 施行一次初等列变换，相当于在 A 的右边乘以相应的 n 阶初等矩阵.

初等变换在线性代数中的应用十分广泛，概括起来包括以下几个方面

(1) 求逆矩阵；

(2) 解矩阵方程；

(3) 求矩阵的最简型；

(4) 解线性方程组；

(5) 求矩阵和向量组的秩；

(6) 求向量组的极大无关组.

例 1.1.3 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，$X$ 满足矩阵方程 $AX=2X+A$，求 X.

解 由 $AX=2X+A$，得

$$(A-2E)X=A$$

$\because$ $|A-2E|=\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&0\\1&0&-1\end{vmatrix}=1\neq0$,

$\therefore$ $A-2E$ 可逆.

下面用初等行变换求 X.

$\because$

$$(A-2E,\ A)=\begin{pmatrix}0&1&1&2&1&1\\1&0&0&1&2&0\\1&0&-1&1&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}1&0&0&1&2&0\\0&1&1&2&1&1\\1&0&-1&1&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-r_1}\begin{pmatrix}1&0&0&1&2&0\\0&1&1&2&1&1\\0&0&-1&0&-2&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2+r_3}\begin{pmatrix}1&0&0&1&2&0\\0&1&0&2&-1&2\\0&0&-1&0&-2&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3\div(-1)}\begin{pmatrix}1&0&0&1&2&0\\0&1&0&2&-1&2\\0&0&1&0&2&-1\end{pmatrix}$$

$\therefore$

$$X=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&-1&2\\0&2&-1\end{pmatrix}$$

定义 1.1.10 设在矩阵 A 中有一个不等于 0 的 r 阶子式 D，且所有 $r+1$ 阶子式（如果存在的话）全等于 0，那么 D 称为矩阵 A 的最高阶非零子式，数 r 称为矩阵 A 的秩，记作 $\mathrm{rank}(A)$. 并规定零矩阵的秩等于零.

我们知道，初等变换不改变矩阵的秩. 用初等变换求矩阵秩的方法是把矩阵用初等行变换变成为行阶梯形矩阵，行阶梯形矩阵中非零行的行数就是矩阵的秩.

定义 1.1.11 设 $m\times n$ 复矩阵 H 的秩为 $r(r>0)$，并且满足以下条件，则称矩阵 H

为行阶梯阵：

（1）矩阵 $\boldsymbol{H}$ 的前 r 行中的每一行至少含有一个不为零的元，而后 $m-r$ 行的元素均为零；

（2）如果矩阵 $\boldsymbol{H}$ 的第 i 行的第一个不为零的元素 1 在第 j_i 列（$i=1,2,\cdots,r$），则 $j_1<j_2<\cdots<j_r$.

如果行阶梯阵 $\boldsymbol{H}$ 的 $j_1,j_2,\cdots,j_r$ 列是单位矩阵 $\boldsymbol{E}_m$ 的前 r 列，则称矩阵 $\boldsymbol{H}$ 为行最简形.

如

$$\boldsymbol{H}_1=\begin{pmatrix}2&1&0&1&-4&3\\0&0&-2&-4&4&3\\0&0&0&1&0&4\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

是行阶梯阵，而矩阵

$$\boldsymbol{H}_2=\begin{pmatrix}1&1&0&0&-4&-3\\0&0&1&0&3&5\\0&0&0&1&0&4\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

是行最简形.

例 1.1.4 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&0&0&1\\0&6&2&4&10\\1&11&3&6&16\\1&-19&-7&-14&-34\end{pmatrix}$ 的行最简形和秩.

解 对 $\boldsymbol{A}$ 施行初等行变换化为阶梯形矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&0&0&1\\0&6&2&4&10\\1&11&3&6&16\\1&-19&-7&-14&-34\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&0&0&1\\0&6&2&4&10\\0&9&3&6&15\\0&-21&-7&-14&-35\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&2&0&0&1\\0&3&1&2&5\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}$$

因此，$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=2$.

$$\boldsymbol{A}\sim\begin{pmatrix}1&2&0&0&1\\0&3&1&2&5\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-2/3&-4/3&-7/3\\0&1&1/3&2/3&5/3\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{C}$$

$\boldsymbol{C}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的最简形.

例 1.1.5 求解齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2+2x_3+x_4=0\\2x_1+x_2-2x_3-2x_4=0\\x_1-x_2-4x_3-3x_4=0\end{cases}$.

解 对系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 施行初等行变换

$$A=\begin{pmatrix}1&2&2&1\\2&1&-2&-2\\1&-1&-4&-3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&2&1\\0&-3&-6&-4\\0&-3&-6&-4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&2&1\\0&1&2&\frac{4}{3}\\0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-2&-\frac{5}{3}\\0&1&2&\frac{4}{3}\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

原方程组同解的方程组为

$$\begin{cases}x_1-2x_3-\frac{5}{3}x_4=0\\x_2+2x_3+\frac{4}{3}x_4=0\end{cases}$$

因此方程组的解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}2\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}\frac{5}{3}\\-\frac{4}{3}\\0\\1\end{pmatrix}，其中 c_1，c_2 为任意常数.$$

例 1.1.6 求解非齐次方程组的通解$\begin{cases}x_1-x_2-x_3+x_4=0\\x_1-x_2+x_3-3x_4=1\\x_1-x_2-2x_3+3x_4=-\frac{1}{2}\end{cases}$.

解 对增广矩阵 B 进行初等行变换

$$B=\begin{pmatrix}1&-1&-1&1&0\\1&-1&1&-3&1\\1&-1&-2&3&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&-1&1&0\\0&0&2&-4&1\\0&0&-1&2&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&0&-1&\frac{1}{2}\\0&0&1&-2&\frac{1}{2}\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

由于 $R(A)=R(B)=2$，故方程组有解，且它的同解方程组为

$$\begin{cases}x_1=x_2+x_4+\frac{1}{2}\\x_3=2x_4+\frac{1}{2}\end{cases}$$

所以方程组的通解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}，其中 c_1，c_2 为任意常数.$$

例 1.1.7 设四维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1+a,1,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,2+a,2,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,3,3+a,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(4,4,4,4+a)^{\mathrm{T}}$，问 a 为何值时，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关？当 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关时，求其一个最大线性无关组，并将其余向量用该最大线性无关组线

性表示.

解法一 记$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$，则

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1+a & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2+a & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3+a & 4\\ 1 & 2 & 3 & 4+a\end{vmatrix}=(a+10)a^3$$

于是当$a=0$或$a=-10$时，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$线性相关.

当$a=0$时，$\boldsymbol{\alpha}_1$为$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$的一个最大线性无关组，且$\boldsymbol{\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_4=4\boldsymbol{\alpha}_1$，

当$a=-10$时，对$\boldsymbol{A}$施以初等行变换，有

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-9 & 2 & 3 & 4\\ 1 & -8 & 3 & 4\\ 1 & 2 & -7 & 4\\ 1 & 2 & 3 & -6\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-9 & 2 & 3 & 4\\ 10 & -10 & 0 & 0\\ 10 & 0 & -10 & 0\\ 10 & 0 & 0 & -10\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}-9 & 2 & 3 & 4\\ 1 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)$$

由于$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$，$\boldsymbol{\beta}_4$为$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$，$\boldsymbol{\beta}_4$的一个最大线性无关组，且$\boldsymbol{\beta}_1=-\boldsymbol{\beta}_2-\boldsymbol{\beta}_3-\boldsymbol{\beta}_4$，故$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$为$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$的一个最大线性无关组，且$\boldsymbol{\alpha}_1=-\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4$.

解法二 记$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$，对$\boldsymbol{A}$施以初等行变换，有

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1+a & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2+a & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3+a & 4\\ 1 & 2 & 3 & 4+a\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1+a & 2 & 3 & 4\\ -a & a & 0 & 0\\ -a & 0 & a & 0\\ -a & 0 & 0 & a\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}$$

当$a=0$时，$\boldsymbol{A}$的秩为1，因而$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$线性相关，此时，$\boldsymbol{\alpha}_1$为$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$的一个最大线性无关组，且$\boldsymbol{\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_4=4\boldsymbol{\alpha}_1$.

当$a\neq0$时，再对$\boldsymbol{B}$施以初等行变换，有

$$\boldsymbol{B}\sim\begin{pmatrix}1+a & 2 & 3 & 4\\ -1 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}a+10 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4)$$

如果$a\neq-10$，$\boldsymbol{C}$的秩为4，从而$\boldsymbol{A}$的秩为4，故$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关.

如果$a=-10$，$\boldsymbol{C}$的秩为3，从而$\boldsymbol{A}$的秩为3，故$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$线性相关.

由于$\boldsymbol{\gamma}_2$，$\boldsymbol{\gamma}_3$，$\boldsymbol{\gamma}_4$为$\boldsymbol{\gamma}_1$，$\boldsymbol{\gamma}_2$，$\boldsymbol{\gamma}_3$，$\boldsymbol{\gamma}_4$的一个最大线性无关组，且$\boldsymbol{\gamma}_1=-\boldsymbol{\gamma}_2-\boldsymbol{\gamma}_3-\boldsymbol{\gamma}_4$，于是$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$为$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$的一个最大线性无关组，且$\boldsymbol{\alpha}_1=-\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4$.

1.1.4 逆矩阵

定义 1.1.12 由$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$的行列式$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$中元素$a_{ij}$的代数

余子式$A_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$构成的如下n阶方阵

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

称为$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵，记作$\boldsymbol{A}^*$，即

$$\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

定义 1.1.13 设$\boldsymbol{A}$为n阶方阵，若存在一个n阶方阵$\boldsymbol{B}$，使得

$$\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$$

则称方阵$\boldsymbol{A}$可逆，并称方阵$\boldsymbol{B}$为$\boldsymbol{A}$的逆矩阵，记作$\boldsymbol{A}^{-1}$.

逆矩阵有如下性质

(1) 若$\boldsymbol{A}^{-1}$存在，则$\boldsymbol{A}^{-1}$必唯一；

(2) 若$\boldsymbol{A}$可逆，则$\boldsymbol{A}^{-1}$也可逆，且$(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$;

(3) 若$\boldsymbol{A}$可逆，则$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$可逆，且$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$;

(4) 若同阶方阵$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$都可逆，则$\boldsymbol{AB}$也可逆，且$(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$;

(5) 方阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$可逆$\Leftrightarrow|\boldsymbol{A}|\neq 0$且$\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{\boldsymbol{A}^*}{|\boldsymbol{A}|}$.

特别地，对于二阶矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$，如果

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$$

则

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

由以上定理可知，对于数值矩阵$\boldsymbol{A}$，如果$|\boldsymbol{A}|\neq 0$，我们总可以利用公式$\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{\boldsymbol{A}^*}{|\boldsymbol{A}|}$来求$\boldsymbol{A}^{-1}$. 但是，当$\boldsymbol{A}$的阶数$n$较大时，计算量太大，因此这个公式主要用于理论推导和求低阶方阵及特殊方阵的逆阵. 对于一般可逆矩阵求逆阵的方法是初等变换法. 同时希望大家注意，初等行变换的方法便于用计算机进行编程求解.

例 1.1.8 求矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$的逆矩阵.

解 ∵

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E})=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\underset{\sim}{r_2-2r_1}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0\\0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1\\0 & -4 & 3 & -2 & 1 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-4r_2]{r_1+2r_2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2\\0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & -1 & -2 & 1 & -4\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2+r_3]{r_1+2r_3}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -3 & 2 & -6\\0 & -1 & 0 & -2 & 1 & -3\\0 & 0 & -1 & -2 & 1 & -4\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3\div(-1)]{r_2\div(-1)}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -3 & 2 & -6\\0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 3\\0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 4\end{pmatrix}$$

∴

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}-3 & 2 & -6\\2 & -1 & 3\\2 & -1 & 4\end{pmatrix}$$

1.1.5 矩阵的特征值与特征向量

定义 1.1.14 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，若存在非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 及数 λ，使等式

$$\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$$

成立，则称 λ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，$\boldsymbol{\alpha}$ 是属于 λ 的特征向量．称

$$\Delta_A(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\-a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\-a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}$$

为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式，而 $\Delta_A(\lambda)=0$ 为特征方程．

定义 1.1.15 （1）在 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 中，任意选取标号相同的 k 行与 k 列（$1\leqslant k\leqslant n$），位于这 k 行与 k 列交叉处的 k^2 个元素按原有位置组成的 k 阶行列式称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 k 阶主子式．

（2）矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有 k 阶主子式的和叫做矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 k 阶迹，记作 $\mathrm{tr}^{[k]}(\boldsymbol{A})$，即

$$\mathrm{tr}^{[k]}(A)=\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n}\begin{vmatrix}a_{i_1i_1} & \cdots & a_{i_1i_k}\\\cdots & \cdots & \cdots\\a_{i_ki_1} & \cdots & a_{i_ki_k}\end{vmatrix},\quad k=1,2,\cdots,n \tag{1.1.1}$$

其中 $a_{i_ti_s}(1\leqslant i_t,i_s\leqslant n;t,s=1,2,\cdots,n;i_1<i_2<\cdots<i_k)$ 是位于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中第 i_t 行、i_s 列交叉处的元素．

n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 k 阶迹 $\mathrm{tr}^{[k]}(\boldsymbol{A})$ 为 C_n^k 个 k 阶行列式之和（$k=1,2,\cdots,n$）．根据这个定义，显然有 $\mathrm{tr}^{[1]}(\boldsymbol{A})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$；

$$\mathrm{tr}^{[2]}(\boldsymbol{A})=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\begin{vmatrix}a_{ii} & a_{ij}\\a_{ji} & a_{jj}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11} & a_{13}\\a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix}a_{11} & a_{1n}\\a_{n1} & a_{nn}\end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix}a_{n-1n-1} & a_{n-1n}\\a_{nn-1} & a_{nn}\end{vmatrix};$$

…

$\mathrm{tr}^{[n]}(\boldsymbol{A})=|\boldsymbol{A}|$．

定理 1.1.1 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式 $\Delta_A(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|$ 可以写成如下形式

$$\Delta_A(\lambda)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\mathrm{tr}^{[k]}(\boldsymbol{A})\lambda^{n-k} \tag{1.1.2}$$

显然，$\boldsymbol{A}$ 的特征值就是特征方程的解．特征方程在复数范围内恒有解，其个数等于方程的次数（重根按重数计算），因此 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个特征值．将此代数方程解出就可以