高等学校数学教材配套辅导书

概率统计辅导

（修订本）

主　编　北京大学数学科学学院　章昕

总策划　胡东华

科学技术文献出版社

概率统计辅导

主　编　北京大学数学科学学院　章　昕
总策划　胡东华

科学技术文献出版社
Scientific and Technical Documents Publishing House
北　京

图书在版编目(CIP)数据

概率统计辅导/章昕编著. - 北京:科学技术文献出版社,2000.10
ISBN 7 - 5023 - 3636 - 2
Ⅰ.概... Ⅱ.章... Ⅲ.①概率论 - 自学参考资料②数理统计 - 自学参考资料 Ⅳ.021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 45451 号

出 版 者:科学技术文献出版社
邮购部电话:(010)62579473 - 8100
图书发行部电话:(010)62534708,62624508,62624119
门市部电话:(010)62534447,62543201
图书发行部传真:(010)62622642
策划编辑:胡东华
责任编辑:张美丽
责任校对:张美丽
封面设计:胡东华
发 行 者:科学技术文献出版社发行 新华书店总店北京发行所经销
印 刷 者:昌平奔腾印刷厂
版(印)次:2001 年 6 月第 2 版第 1 次印刷
开 本:850×1168 大 32 开
字 数:280 千字
印 张:17.5
定 价:20.00 元

前　言

概率统计作为数学的一个重要分支在许多领域中有着广泛的应用。现在,不但理工科学,而且经济学、管理学专业对概率统计的要求也越来越高。如果仅仅靠一本教材,有限的几个课时和课后少量的练习,往往是很难学好这门课的。在历年考研试题中概率统计也不容忽视,而且难度有所增加。

为了解决这一问题,我们于去年精心编写了这本书。在书的每一节里,我们首先列出了这一节的主要内容及计算公式;然后给出了大量详细的例题,使读者能在最短的时间对每一节内容一目了然,并借助例题达到理解记忆,融汇贯通的目的。对于有些例题,还给出了几种解法,以便读者进行对比。在每一章的后面,我们列出了历年的考研真题,以便考研的同学能够参考和借鉴。最后,给出了一定量的练习,读者可以自己挑选,做完后可参考后面的答案来评判掌握的情况。

本书在一年的发行过程中,深得读者的厚爱,同时也反馈了一些意见。我们根据读者的意见,在这次修订过程中,我们对全国流行的经典教材——浙江大学《概率论与数理统计》第二版的习题作了相应的参考答案。由于本书和浙大的教材在知识点的编排上有所不同,为此,我们征求了策划者和作者的意见,认为宜保留本书原有的编排特色,把浙大的教材答案当作附录附在书后,供读者参考使用。

由于编者水平有限,加之时间仓促,其中错漏不妥之处,敬请广大读者批评指正。

编者

2001 年 6 月

“双博士”品牌图书购书奖励及成才计划

据许多大学生反映，他们的聪明和勤奋绝不比别人差，但环境的闭塞和信息的不灵通使其在大学英语四、六级考试中处于不利地位。该奖励计划旨在推动命题者与考生的沟通，使全国购本品牌书的大学生，都能及时了解大学英语四、六级考试信息，并获得其他意想不到的奖励！

凡在全国各地购买或邮购正版（即本页背面贴有激光防伪标志）“双博士”品牌大学系列丛书者，（封面带有如右图标，且最后一页附有此页内容的书），购满5本以上者，详细填写本页背面所附回执，收齐全部回执，连同4元邮资挂号寄至：(100080)北京大学西南门海淀西大街36号中国海淀图书城昊海楼五层514、515室，读书新知双博士信息中心收（本中心电话：010－62624508），均可成为“双博士”中学、大学及考研考试信息网会员。（请读者最好将所有回执收齐一次性寄出，但以后也可再购书，而升级）。其中购买5本以上10本以下者，成为三级会员；11本至20本者，成为二级会员；21本（含21本）以上，成为一级会员。所有会员均享有以下权利（现在就读大二（含）以下各年级的会员，该权利也可在其升入大三、大四时享有）：

Ⅰ　在每年6月份的全国大学英语四、六级考试之前二个月，即4月左右，请四六级考试命题专家编写二套四、六级模拟试卷（含详细解答）（不对外零售），在4月底免费赠送：邮寄到各位一至三级会员（四级、六级模拟卷只能选一）。从历年考试经验来看，该卷针对性强，每年都有20～30分左右命中，肯定对您考试很有帮助。

Ⅱ　为所有一、二级会员都设立“双博士”成才奖励计划：一、二级会员可以从本中心免费获得“双博士”品牌考研类图书。具体为：一级会员可免费获得80元“双博士”品牌考研类图书（赠送范围：考研应试教程系列丛书及英语词汇系列丛书）；二级会员可免费获得30元以上“双博士”品牌考研类图书（范围同上）。在每年5月一次性全部邮出。（如2003年考研书，在2002年5月邮出）。

Ⅲ　“双博士”品牌图书介绍：本品牌图书含中学、大学、考研三类图书。在校大学生中，每3个人中就有一个购买了“双博士”品牌图书。

短短几年，“双博士”品牌系列丛书，发展到大学类教辅及考研辅导丛书销量居全国同类书第一，占全国考研类、大学教辅类图书三分之一市场，在考生中树立了不可替代的品牌形象，引起了媒体的广泛关注。

1999年11月5日《光明日报》是这样报道的（后被多家报纸转载）：“据悉，这套由国家商标局注册的‘双博士’品牌文教图书，是我国第一个文教类图书注册的图书品牌商标。该图书500多个品种。由于在图书选题和策划出版上狠下功夫，几年来，该品牌系列文教图书已经得到了读者的普遍信任和好评，成为文教图书领域最具影响力的图书之一。”

“双博士品牌图书购书奖励及成才计划”会员回执表

（无防伪标无效）

读者姓名		性别		就读年级	
所在大学		电话（含区号）		英语任课教师	
通迅地址				邮政编码	
所购书名		售书单位（盖章有效）		（加盖书店各种章均可）	
读者建议及其它					

请仔细填写以下全部栏目，以免错邮：

□□□□□□

邮至：__________省__________市______________

____

_______________收

北京大学西南门海淀西大街36号海淀图书城昊海楼515室　双博士信息中心　胡荣

电话：(010)62624508　　邮编：100080

备注：给一、二、三级会员免费提供四、六级模拟卷：①要____年模拟试卷（4月邮出），②选其中一项，打“√”：四级（　　），六级（　　）

□□□□□□

邮至：__________省__________市______________

____

_______________收

北京大学西南门海淀西大街36号海淀图书城昊海楼515室　双博士信息中心　胡荣

电话：(010)62624508　　邮编：100080

备注：一、二级会员免费赠送考研书，请填或打“√”：

①要那一年的考研书：______年（在此前一年的5月邮出）

②需要的考研书科目：政治（　），英语（　），理工数学（　），经济数学（　），西医（　）

③您是几级会员：一级（　　），二级（　　）

注：①只需填写第1张，②本次共邮来____张回执表，③以前是否邮过回执是（　），不是（　）④邮4元邮资（　　）

目　录

第一章　随机事件及其概率

在这一章里，我们首先复习随机事件及其概率，事件的关系和运算等基本概念，然后介绍几种常用的概率：古典概率、几何概率、条件概率和贝努里概型，最后学习一些计算概率的常用方法。通过复习，应掌握如何判别事件的概率的概型及如何利用概率的性质和有关公式来计算概率。

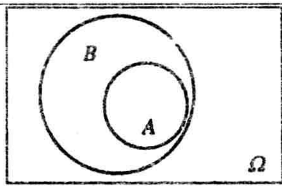
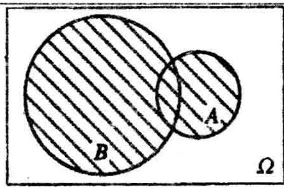
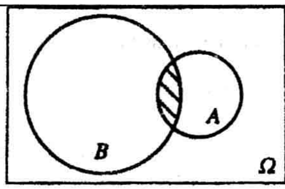
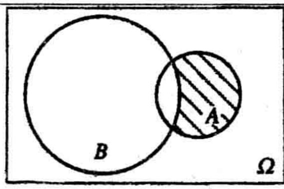
§1.1　事件的关系和运算

1.1.1　考试内容及理解记忆方法

表 1.1.1　事件及几个基本概念的定义

<table>
<tr><th>名称</th><th>定　　义</th><th>举例</th></tr>
<tr><td>随机试验</td><td>可以在相同的条件下重复进行，并且每次试验的结果事先不可预知的试验</td><td rowspan="6">掷一颗均匀的骰子，观察出现的点数是一个随机试验。试验的结果“点数是3”是一个随机事件。而事件 w_1 = “点数1”，w_2 = “点数2”，…，w_6 = “点数6”是6个基本事件，事件 B = “点数为奇数”是一个复合事件。“点数为1到6中的某一个”为必然事件；“点数为7”是不可能事件。</td></tr>
<tr><td>随机事件</td><td>在随机试验中，可能发生也可能不发生的事件，也简称为事件</td></tr>
<tr><td>基本事件</td><td>仅含有一个样本点的随机事件（随机试验中每一种可能的试验结果称为一个样本点）</td></tr>
<tr><td>复合事件</td><td>含两个或两个以上样本点的随机事件</td></tr>
<tr><td>必然事件</td><td>必然会发生的事件</td></tr>
<tr><td>不可能事件</td><td>试验中不可能发生的事件</td></tr>
</table>

表 1.1.2　事件的关系和运算

名称	意义	文氏图	备注
事件的包含	如果事件 A 发生，则事件 B 一定发生，称事件 B 包含事件 A。用 $B \supset A$ 或 $A \subset B$ 表示。		注：$\phi \subset A \subset \Omega$ 总是成立的。
事件的相等	如果 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，则称事件 A 与 B 相等。用 $A = B$ 表示。		
事件的和	“事件 A 与 B 中至少有一个发生”是一个事件，称为事件 A 与 B 的和，记为 $A + B$ 或 $A \cup B$。		注：事件 $A + B$ 发生是指仅 A 发生或者仅 B 发生或者 A 与 B 同时发生。
事件的积	“事件 A、B 同时发生”是一个事件，称为 A 与 B 的积。记为 AB 或 $A \cap B$。		注：事件 AB 发生是指 A 发生且 B 也发生。
事件的差	“事件 A 发生而 B 不发生”是一个事件。称为 A 与 B 的差，记作 $A - B$。		注：$A - B$ 与 $B - A$ 是两个不同的事件。

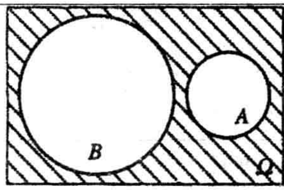
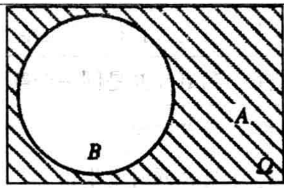
名称	意义	文氏图	备注
事件的互不相容(互斥)	如果事件 A 与 B 不能同时发生，即 $AB=\varnothing$。称 A 与 B 互不相容（或互斥）。		注：A 与 B 互不相容只表示这两个事件不能同时发生，但却允许它们同时都不发生。
事件的对立	事件 A 与 B 不能同时发生，但必须有一个发生，即 A,B 满足 $AB=\varnothing$ 且 $A+B=\Omega$，称 A 与 B 是对立的(或互逆的)事件，记为 $\bar{A}=B$ 或 $\bar{B}=A$。		注：当 A 与 B 对立时，A 与 B 既不能同时发生，但也不能同时不发生，即 A 发生时，B 一定不发生，而 A 不发生时，B 一定发生。
完备事件组	如果事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容，且 $A_1+A_2+\cdots+A_n=\Omega$，则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 构成一个完备事件组。		

表 1.1.3　同种记号在概率论与集合论中的对照

记号	概率论	集合论
Ω	样本空间,必然事件	全集
ϕ	不可能事件	空集
w	基本事件	元素
A	事件	子集
$A \subseteq B$	事件 A 发生,则 B 一定发生	A 是 B 的子集
$A = B$	事件 A 和事件 B 是同一个事件	A 与 B 相等
$A \cup B(A + B)$	事件 A 与 B 中至少有一个发生	A 与 B 的并集(和集)
$A \cap B(AB)$	事件 A 与 B 同时发生	A 与 B 的交集
$A - B$	事件 A 发生,而 B 不发生	A 与 B 的差集
$AB = \phi$	事件 A 与 B 不相容	A 与 B 的交集为空
$\bar{A}$	A 的对立事件	A 的补集

表 1.1.4　关系运算的推广

分配律:$AB + C = (A + C)(B + C)$;	交换律:$A + B = B + A, AB = BA$;
摩根律(对偶律):$\overline{A + B} = \bar{A}\bar{B}, \overline{AB} = \bar{A} + \bar{B}$;	结合律:$(A + B) + C = A + (B + C)$; $(AB)C = A(BC)$;
补元律:$A\bar{A} = \phi \quad A + \bar{A} = \Omega$;	还原律:$\bar{\bar{A}} = A$;
吸收律:若 $A \subset B$,则 $AB = A$,且 $A + B = B$;	分解律:若 $A \subset B$,则 $B = A + \bar{A}B$;
蕴涵律:若 $AB = \phi$,则 $A \subset \bar{B}, B \subset \bar{A}$;	排中律:$A \cup \bar{A} = \Omega$;
矛盾律:$A \cap \bar{A} = \phi$;	差积转换律:$A - B = A \cap \bar{B} = A - (A \cap B)$。

1.1.2 典型例题解析

例 1:设袋内有 10 个编号为 1 ~ 10 的球,从中任取一个,观察其号码

(1) 写出这个试验的样本空间。

(2) 若 A 表示"取得的球的号码是奇数",B 表示"取得的球的号码是偶数",C 表示"取得的球的号码小于 5",则

①$A+B$, ②AB, ③$\overline{C}$, ④$\overline{A}C$,

⑤ $\overline{B+C}$, ⑥ $\overline{BC}$, ⑦$A-C$ 各表示什么事件?

(3) 事件 A 与 B 是否互不相容?

(4) AC 与 $\overline{A}C$ 是否互不相容?是否对立?

解:(1) 若用 w_i 表示"取得的球的号码为 i"($i=1,2,\cdots,10$),则这个试验的样本空间为 $\Omega=\{w_1,w_2,\cdots,w_{10}\}$。

(2) ① $A+B$ 表示"取得的球的号码或者是奇数,或者是偶数",它是必然事件,即 $A+B=\Omega$。

② AB 表示"取得的球的号码既是奇数又是偶数",它是不可能事件,即 $AB=\phi$。

③$\overline{C}$ 表示"取得的球的号码大于等于 5",即 $\overline{C}=\{w_5,w_6,\cdots,w_{10}\}$。

④$\overline{A}C$ 表示"取得的球的号码是大于 5 的偶数",即 $\overline{A}C=\{w_6,w_8,w_{10}\}$。

⑤ $\overline{B+C}$ 表示"取得的球的号码不是偶数也不小于 5",也就是"取得的球的号码是大于等于 5 的奇数",即$\overline{B+C}=\overline{B}\overline{C}=\{w_5,w_7,w_9\}$。

⑥ $\overline{BC}$ 表示"取得的球的号码不是小于 5 的偶数",也就是"取得的球的号码是奇数或者大于等于 5",即$\overline{BC}=\overline{B}+\overline{C}=\{w_1,w_3,w_5,w_6,w_7,w_8,w_9,w_{10}\}$。

⑦$A-C$表示"取得的球的号码是奇数但不小于5",也就是"取得的球的号码是大于等于 5 的奇数",即 $A-C=\{w_5,w_7,w_9\}$。

(3)A与B互不相容,因为取得的球的号码不会既是奇数又是偶数,即 $AB=\phi$。同时,$A+B=\Omega$,所以 A 与 B 是对立事件。

(4) 因为 $AC=\{w_1,w_3\}$,$\overline{A}C=\{w_6,w_8,w_{10}\}$ 所以$(AC)(\overline{A}C)=\phi$,但 $AC+\overline{A}C=\{w_1,w_3,w_6,w_8,w_{10}\}\neq\Omega$,因而 AC 与$\overline{A}C$ 互不相容,但不对立。

例 2:在计算机系学生中任选一名学生,设事件

A = "选出的学生是男生";

B = "选出的学生是三年级学生";

C = "选出的学生是科普队的"。

(1) 叙述事件 $AB\bar{C}$ 的含义。

(2) 在什么条件下,$ABC = C$ 成立?

(3) 什么时候关系 $C \subseteq B$ 成立?

解:(1) 事件 AB 的含义是“选出的学生是三年级的男生”,而事件 $\bar{C}$ 的含义是选出的学生不是科普队的,所以 $AB\bar{C}$ 的含义是“选出的学生是三年级的男生不是科普队员”。

(2) 由于 $ABC \subseteq C$,故 $ABC = C$ 的条件是:当且仅当 $C \subseteq ABC$.即当且仅当 $C \subseteq AB$,即“科普队员都是三年级的男生”。

(3) 当科普队员全是三年级学生时,C 是 B 的子事件,即 $C \subseteq B$ 成立。

例 3:用已知事件表达有关的其他事件

(1)“A 发生,而 B 与 C 都不发生”可表为 $A\bar{B}\bar{C}$ 或 $A\overline{(B \cup C)}$;

(2)“A,B,C 中恰有一个发生”可表为 $A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C$;

(3)“A,B,C 中恰有两个发生”可表为 $AB\bar{C} \cup A\bar{B}C \cup \bar{A}BC$ 或 $AB \cup BC \cup CA - ABC$;

(4)“A,B,C 中不多于一个发生”可表为 $\bar{A}\bar{B}\bar{C} \cup A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C$ 或 $\overline{AB \cup BC \cup CA}$。

注:上面的表示法是根据事件的关系与运算,以及事件的运算律得到的。比如(1),单个看,是 A 发生,B 不发生,C 也不发生,所以就是 $A\bar{B}\bar{C}$;把“B,C 都不发生”一起看,它的逆事件是“B,C 中至少一个发生”,即 $B \cup C$,于是“B,C 都不发生”就是 $\overline{B \cup C}$,所以结果可以写成 $A\overline{(B \cup C)}$。

例 4:设 A,B,C 为随机事件,试证明下列各式:

(1)$(A - AB) \cup B = A \cup B$;

(2)$(A \cup B) - B = A - AB = A\bar{B}$;

(3)$(A \cup B) - AB = A\bar{B} \cup \bar{A}B$;

(4)$A \cup (B - AB) \cup (C - AC) = A \cup B \cup C$。

证明 (1) 方法一 设 $w \in A \cup B$,则

$$\begin{cases} \text{或 } w \in A\bar{B} \Rightarrow w \in A \text{ 同时 } w \in \bar{B} \Rightarrow w \in (A - B) \Rightarrow w \in (A - AB) \\ \text{或 } w \in \bar{A}B \Rightarrow w \in B \text{ 同时 } w \in \bar{A} \Rightarrow w \in B \\ \text{或 } w \in AB \Rightarrow w \in B \end{cases}$$

于是 $w \in (A - AB) \cup B$ 故

$$(A - AB) \cup B \supset A \cup B$$

另一方面,有$(A - AB) \subset A \subset A \cup B$。于是

$$(A - AB) \cup B \subset A \cup B$$

故 $$(A-AB)\cup B=A\cup B$$

方法二　设 $A\cup B$ 发生,则 A,B 至少有一个发生,那么有下面三种情况:

①A 发生而 B 不发生 $\Rightarrow A$ 发生而 AB 不发生 $\Rightarrow A-AB$ 发生 $\Rightarrow(A-AB)\cup B$ 发生;

②A 不发生而 B 发生 $\Rightarrow(A-AB)\cup B$ 发生;

③A,B 都发生 $\Rightarrow(A-AB)\cup B$ 发生。

因此不论哪种情况,总有$(A-AB)\cup B$ 发生,即有

$$(A-AB)\cup B\supset A\cup B$$

另一方面,由方法一知,$(A-AB)\cup B\subset A\cup B$,由于"$\subset$"及"$\supset$"同时成立,故(1)得证。

方法三　注意到 $A-B=A\bar{B}$,于是

$$\begin{aligned}(A-AB)\cup B&=(A\overline{AB})\cup B=[A(\bar{A}\cup\bar{B})]\cup B\\&=(A\bar{A}\cup A\bar{B})\cup B\\&=(A\bar{B})\cup B=A\cup B\end{aligned}$$

方法四　由于 $A-AB$ 表示 A 发生而 A,B 不同时发生,即 A 发生 B 不发生,故 $(A-AB)\cup B$ 表示 A 与 B 至少有一个发生,这等价于事件 $A\cup B$ 发生。故$(A-AB)\cup B=A\cup B$。

(2) 由于

$$(A\cup B)-B=(A\cup B)\bar{B}=A\bar{B}\cup B\bar{B}=A\bar{B}$$

而 $$A-AB=A\overline{AB}=A(\bar{A}\cup\bar{B})=A\bar{A}\cup A\bar{B}=A\bar{B}$$

故 $$(A\cup B)-B=A-AB=A\bar{B}$$

(3) 由于

$$\begin{aligned}(A\cup B)-AB&=(A\cup B)(\overline{AB})=(A\cup B)(\bar{A}\cup\bar{B})\\&=[(A\cup B)\bar{A}]\cup[(A\cup B)\bar{B}]=\bar{A}B\cup A\bar{B}\end{aligned}$$

故 $$(A\cup B)-AB=A\bar{B}\cup\bar{A}B$$

(4) 由于

$$\begin{aligned}&A\cup(B-AB)\cup(C-AC)=A\cup(B\overline{AB})\cup(C\overline{AC})\\&=A\cup[B(\bar{A}\cup\bar{B})]\cup[C(\bar{A}\cup\bar{C})]\\&=A\cup(B\bar{A})\cup(C\bar{A})=(A\cup B)\cup(C\bar{A})\\&=[(A\cup B)\cup C]\cap[(A\cup B)\cup\bar{A}]\\&=(A\cup B\cup C)\cap\Omega=A\cup B\cup C\end{aligned}$$

故 $$A\cup(B-AB)\cup(C-AC)=A\cup B\cup C$$

1.1.3 小结

在本节中，我们详细的给出了事件及其相关的概念，事件的关系和运算的定义和运算律。在例题中，给出了如何求试验的样本空间，如何用已知事件的关系来表示其他事件，及事件之间关系的演算。

§1.2 事件的概率

1.2.1 考试内容及理解记忆方法

1. 概率的定义

(1) 概率的统计定义

如果在 n 次重复试验中事件 A 发生了 m 次，当 n 逐渐增大时，比值 $\frac{m}{n}$ 稳定地在某一常数 p 附近摆动，且 n 越大，摆动幅度越小。则称此常数 p 为事件 A 的概率，记为 $P(A)$。

注：比值 $\frac{m}{n}$ 称作 n 次试验中 A 发生的频率，必须进行 n 次试验才能计算事件 A 发生的频率；而事件 A 的概率 $P(A)$ 是事件 A 在一次试验中发生的可能性的大小。

(2) 概率的古典定义

若试验结果一共有 n 个基本事件 $w_1, w_2, \cdots, w_n$，且每次试验中各基本事件出现的可能性完全相同，而事件 A 由其中 m 个事件 $w_{i1}, w_{i2}, \cdots, w_{im}(m \leqslant n)$ 组成，则事件 A 的概率 $P(A) = \frac{m}{n}$。

注：概率的古典定义要求试验具有两个特点：试验的样本空间的样本点的有限性和每次试验中各基本事件 $w_1, w_2, \cdots, w_n$ 出现的等可能性。我们称具有上述两个特点的试验为古典试验，建立在古典试验上的数学模型为古典概型。

(3) 概率的公理化定义

设 E 是随机试验，Ω 是它的样本空间，对于 E 的每一事件 A 赋予一个实数，记作 $P(A)$，称为事件 A 的概率。如果集合函数 $P(\cdot)$ 满足下列条件：

1° 非负性　对于每一个事件 A，有 $P(A) \geqslant 0$；

2° 规范性　$P(\Omega) = 1$；

3° 可列可加性　设 $A_1, A_2, \cdots$，是两两互不相容的事件，即 $i \neq j$ 时，$A_iA_j \neq \phi$，$i, j = 1, 2, \cdots$，则有