高等学校教学参考书

高等数学习题集

习题选解

上册

桂子鹏 骆承钦 邱伯驺 张依华 编

高等教育出版社

高等学校教学参考书

高等数学习题集

习题选解

上册

桂子鹏 骆承钦 邱伯驺 张依华 编

高等教育出版社

本书选择同济大学数学教研室编的《高等数学习题集》(1965年修订本)中一千三百多道题目来解答的，侧重于具有典型性的题和较难的题，还补充了近百道题目及其解答．对初学者来说，我们觉得首先应该自己独立思考，寻求合适的解题方法，得出答案；遇有困难时，再求助于题解．这样有助于独立思考能力的培养和解题技能技巧的掌握．

本书分上、下册出版，上册选解的内容包括解析几何学、函数、极限、一元函数的微分学和不定积分．

本书系供电视、业余、函授等高等院校师生和自学者使用，也可供科技人员参考．

责任编辑　丁鹤龄

高等学校教学参考书

高 等 数 学 习 题 集

习 题 选 解

上 册

桂子鹏 骆承钦 邱伯驺 张依华 编

*

高等教育出版社出版

新华书店上海发行所发行

上 海 新 华 印 刷 厂印装

*

开本 787×1092　1/32　印张 11 6/16　字数 274,000

1980年4月第1版　1986年6月第12次印刷

印数 1,065,001—1,115,000

书号 13010·0461　　定价 1.65元

前　言

在学习高等数学时，做习题是必不可少的．鉴于有许多读者选用同济大学数学教研室编的《高等数学习题集》（1965年修订本），我们选编了这本《习题选解》，供读者参考．

我们在选题时侧重于选具有典型性的题和较难的题，共选解了一千三百余题，另外，又补充近百道题目．有些题目我们做了详细解答，其中一部分提供了多种解法；有些题目在解答时则写得比较扼要．

为了配合《高等数学习题集》，本书中题目的编号完全与它一致．补充的题目按内容分别列在各章之末．

《习题选解》是由桂子鹏负责，与骆承钦、邱伯驺和张依华一起编写的．王福楹、徐礼存、谈祝多三位老师审阅了全部稿子，并提出了宝贵的修改意见．在此，谨向三位老师表示衷心感谢．

由于编者的学识水平不高，教学经验也不足，对于《习题选解》中的错误和不妥之处，希望读者多多提出批评意见．

编　者

1980.2 于同济大学

目　录

前言……iv

第一编　解析几何

第一章　平面上的直角坐标、曲线及其方程……1

平面上点的直角坐标，坐标变换……1

两点间的距离，线段的定比分点……2

曲线及其方程……7

杂题……11

曲线的参数方程……12

第二章　直线……14

杂题……20

第三章　二次曲线……30

圆……30

椭圆……34

双曲线……38

抛物线……40

一般二次方程的简化……42

椭圆及双曲线的初步……45

杂题……47

第四章　极坐标……52

第五章　行列式 矢量代数初步……56

第六章　空间直角坐标、矢量代数初步……69

空间点的直角坐标……69

矢量代数……72

第七章　曲面方程与空间曲线方程……88

第八章　平面与空间直线方程……95

平面方程 ······ 95
空间的直线方程 ······ 101
杂题 ······ 109
第九章　二次曲面 ······ 122

第二编　数 学 分 析

第十章　函数 ······ 130
绝对值的运算 ······ 130
函数值的求法 ······ 131
函数的定义域 ······ 132
建立函数关系 ······ 135
函数性质的讨论 ······ 138
函数的图形 ······ 141
双曲函数 ······ 148
补充题 ······ 148
第十一章　极限 ······ 151
数列的极限 ······ 151
函数的极限 ······ 152
无穷大,无穷小 ······ 154
极限的求法 ······ 155
无穷小的比较,等价无穷小 ······ 162
杂题 ······ 164
补充题 ······ 172
第十二章　函数的连续性 ······ 175
函数的连续性 ······ 175
补充题 ······ 180
第十三章　导数及微分 ······ 182
导数概念 ······ 182
求函数的导数 ······ 186

杂题 ……196
导数的应用 ……204
微分及其应用 ……218
高阶导数 ……224
参变量方程的导数 ……234
补充题 ……238
第十四章　中值定理,导数在函数研究上的应用 ……241
中值定理 ……241
罗彼塔法则 ……246
泰勒公式 ……253
函数的单调性 ……260
函数的极值 ……265
最大值和最小值应用杂题 ……271
曲线的凹性和拐点 ……284
渐近线 ……290
函数研究及其图形的描绘 ……293
平面曲线的曲率 ……304
方程的近似解 ……308
第十五章　不定积分 ……313
简单不定积分 ……314
换元积分法 ……316
分部积分法 ……321
换元积分法和分部积分法杂题 ……324
分式有理函数的积分 ……330
三角函数有理式的积分 ……336
简单代数无理式的积分 ……338
杂题 ……342
补充题 ……354

第一编 解析几何

第一章 平面上的直角坐标、曲线及其方程

平面上点的直角坐标，坐标变换

1.9. 证明点$A_1(a,b)$关于第Ⅰ和第Ⅲ象限角的平分线的对称点A_2必有坐标(b,a).

证法一 用线段连结点(a,b)和点(b,a)，中点的坐标$\left(\frac{a+b}{2},\frac{a+b}{2}\right)$在直线$y=x$上，其斜率为$\frac{a-b}{b-a}=-1$，故垂直于$y=x$，所以点$(a,b)$和点$(b,a)$对称于直线$y=x$.

证法二 欲证点(a,b)与点(b,a)对称于$y=x$，只需证将点(a,b)、(b,a)分别绕O点旋转$\frac{\pi}{4}$后所得到的点对称于y轴即可（因旋转$\frac{\pi}{4}$后，直线$y=x$成为y轴）. 点(a,b)、(b,a)绕O点旋转$\frac{\pi}{4}$后，其坐标分别为

$$x_1=\frac{\sqrt{2}}{2}(a-b),\quad y_1=\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)$$

及

$$x_2=\frac{\sqrt{2}}{2}(b-a),\quad y_2=\frac{\sqrt{2}}{2}(b+a).$$

由$x_1=-x_2$, $y_1=y_2$知，点(x_1,y_1)、(x_2,y_2)对称于y轴，故得证.

1.12. 某点在两轴方向相同的两坐标系下的坐标为$(12,-7)$和$(0,15)$，各系的原点在他系下的坐标等于什么？

解 设两坐标系为xOy与$x'O'y'$，某点的坐标相应地为

$(x,y)=(12,-7),(x',y')=(0,15)$, O'在xOy系下的坐标为(a,b)，O在$x'O'y'$系下的坐标为(a',b'),则

$$\begin{cases}x=x'+a,\\ y=y'+b,\end{cases}\quad \begin{cases}a=x-x'=12-0=12,\\ b=y-y'=-7-15=-22.\end{cases}$$

显然 $$a'=-a=-12,\quad b'=-b=22.$$

1.13. 如果将坐标轴依逆时针方向旋转60°，点$M(1,\sqrt{3})$在新坐标系下的坐标等于什么?

解 设点M在新、旧坐标系下的坐标分别为(x',y')、(x,y),则

$$\begin{cases}x'=x\cos\alpha+y\sin\alpha,\\ y'=-x\sin\alpha+y\cos\alpha.\end{cases}$$

现在 $x=1$, $y=\sqrt{3}$, $\alpha=60°$, 故

$$\begin{cases}x'=1\cdot\cos60°+\sqrt{3}\cdot\sin60°=2,\\ y'=-1\cdot\sin60°+\sqrt{3}\cdot\cos60°=0.\end{cases}$$

即M的新坐标为$(2,0)$.

1.15. 坐标轴应该旋转多少角度，方能使点$M(2,0)$在新系下的横标和纵标变成相等?（我们把角度限制在$-\frac{\pi}{2}$到$\frac{\pi}{2}$之间.）

解 设点$M(2,0)$在新系下的坐标为(a,a),则

$$\begin{cases}a=2\cos\alpha+0\cdot\sin\alpha=2\cos\alpha,\\ a=-2\sin\alpha+0\cdot\cos\alpha=-2\sin\alpha.\end{cases}$$

所以 $$\operatorname{tg}\alpha=-1,\quad \alpha=-\frac{\pi}{4}.$$

即坐标轴应依顺时针方向旋转45°.

两点间的距离，线段的定比分点

1.20. 证明点$(7,2)$和点$(1,-6)$在以点$(4,-2)$为圆心的圆周上，并求这个圆的半径.

证 因为点$(7,2)$到点$(4,-2)$的距离为

$$d_1=\sqrt{3^2+4^2}=5,$$

点(1, −6)到点(4, −2)的距离为

$$d_2=\sqrt{3^2+4^2}=5,$$

故$d_1=d_2$,因此点(7, 2)和点(1, −6)在以点(4, −2)为圆心、半径$R=5$的圆周上.

1.24. 已知点M到两坐标轴和点(3, 6)都有相等的距离,求点M的坐标.

解 设点M的坐标为(x, y),则按题意有

$$|x|=|y|=\sqrt{(x-3)^2+(y-6)^2}.$$

若$x=y$,则$x^2=(x-3)^2+(x-6)^2$,即$x^2-18x+45=0$,得$x_1=3$, $x_2=15$,从而$y_1=3$, $y_2=15$.

若$x=-y$,则$x^2=(x-3)^2+(x+6)^2$,即$x^2+6x+45=0$,无解. 故点M为(3, 3)或(15, 15).

1.26. 试用解析法证明,任意三角形两边中点连线之长等于第三边之长的一半.

证 设三角形的三顶点为$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,$C(x_3,y_3)$,则$\overline{AB}$之中点D为$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$,$\overline{AC}$之中点$E$为$\left(\frac{x_1+x_3}{2},\frac{y_1+y_3}{2}\right)$,所以

$$|DE|=\sqrt{\left(\frac{x_1+x_3}{2}-\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2+\left(\frac{y_1+y_3}{2}-\frac{y_1+y_2}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2}=\frac{1}{2}|BC|.$$

1.27. 设点$M_1(1, 1)$,$M_2(2, 2)$,$M_3(3, -1)$是平行四边形的三个顶点,求第四个顶点.

解 设平行四边形的四个顶点依次为(x_A,y_A),(x_B,y_B),(x_C,y_C)及$(x_D;y_D)$,由于平行四边形的对角线互相平分,故它们满足:

$$x_A+x_C=x_B+x_D,\quad y_A+y_C=y_B+y_D.$$

若设第四个顶点为$M_4(x,y)$,则按M_1,M_2,M_3,M_4的各种可能次序,可得

1° $1+3=2+x$, $1+(-1)=2+y$, 从而$x=2$, $y=-2$;

2° $1+2=3+x$, $1+2=-1+y$, 从而 $x=0$, $y=4$;

3° $2+3=1+x$, $2+(-1)=1+y$, 从而 $x=4$, $y=0$.

因此本题有三解: $(2,-2)$, $(0,4)$, $(4,0)$.

1.28. 设正方形相邻两顶点是$A(2,3)$和$B(6,6)$,求其余的顶点.

解 设第三个顶点为$C(x_C,y_C)$.

因为
$$|AC|^2=2|AB|^2,$$
即
$$(x_C-2)^2+(y_C-3)^2=2(4^2+3^2)=50,$$
$$|AB|^2=|BC|^2,\quad 即\quad (x_C-6)^2+(y_C-6)^2=25.$$
解得
$$x_C=3,9,\quad y_C=10,2.$$
于是得$C_1(3,10)$或$C_2(9,2)$.

设第四个顶点为$D(x_D,y_D)$.

由
$$\begin{cases}x_D+x_B=x_A+x_C\\ y_D+y_B=y_A+y_C,\end{cases}\quad 即\quad \begin{cases}x_D=x_A-x_B+x_C,\\ y_D=y_A-y_B+y_C,\end{cases}$$
得$D_1(-1,7)$或$D_2(5,-1)$.

因此正方形的其余两个顶点为$(3,10)$, $(-1,7)$或$(9,2)$, $(5,-1)$.

1.33. 已知两点$A(2,1)$,$B(3,9)$. 求(a)分线段$\overline{AB}$得比值 4:1 的点M的坐标;(b)分线段$\overline{BA}$得比值 4:1 的点M的坐标.

解 (a) $x=\dfrac{2+4\cdot 3}{1+4}=\dfrac{14}{5}$, $y=\dfrac{1+4\cdot 9}{1+4}=\dfrac{37}{5}$,

即M为$\left(\frac{14}{5}, \frac{37}{5}\right)$.

(b) $x=\frac{3+4\cdot 2}{1+4}=\frac{11}{5}$, $y=\frac{9+4\cdot 1}{1+4}=\frac{13}{5}$,

即M为$\left(\frac{11}{5}, \frac{13}{5}\right)$.

1.36. 线段$\overline{AB}$被点$M_1(1, 2)$和$M_2(3, 4)$分成相等的三部分. 求点A和B的坐标.

解 设A的坐标为(x_1,y_1),B的坐标为(x_2,y_2). 按题意,

$$\lambda_1=\frac{M_1A}{AM_2}=-\frac{1}{2}, \qquad \lambda_2=\frac{M_1B}{BM_2}=-2.$$

所以 $$x_1=\frac{1+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 3}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)}=-1, \quad y_1=\frac{2+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 4}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)}=0.$$

$$x_2=\frac{1+(-2)\cdot 3}{1+(-2)}=5, \qquad y_2=\frac{2+(-2)\cdot 4}{1+(-2)}=6.$$

故A的坐标为$(-1,0)$,B的坐标为$(5,6)$.

1.40. 已知三角形的顶点:$A(1,4)$,$B(-5,0)$及$C(-2,-1)$. 求它的中线的交点.

解 设三角形三顶点为$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,$C(x_3,y_3)$,$\overline{BC}$之中点为$M\left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}\right)$,又设中线的交点为$H(x, y)$,则

$\lambda=\frac{AH}{HM}=2$,故

$$x=\frac{x_1+2\cdot\frac{x_2+x_3}{2}}{1+2}=\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3),$$

$$y=\frac{y_1+2\cdot\frac{y_2+y_3}{2}}{1+2}=\frac{1}{3}(y_1+y_2+y_3).$$

将本题中A、B、C三点的坐标代入上式,即得中线的交点为$(-2,1)$.

1.41. 已知平行四边形的相邻两顶点为$A\left(-4\frac{1}{2},-7\right)$和$B(2,6)$及对角线的交点$M\left(3,\ 1\frac{1}{2}\right)$. 求它的其余两个顶点.

解 设其余两个顶点为$C(x_1,y_1)$,$D(x_2,y_2)$. 因M是$\overline{AC}$的中点,故

$$x_1=2\cdot 3-\left(-\frac{9}{2}\right)=10\frac{1}{2},\quad y_1=2\cdot\frac{3}{2}-(-7)=10;$$

同样M是$\overline{BD}$的中点,故

$$x_2=2\cdot 3-2=4,\quad y_2=2\cdot\frac{3}{2}-6=-3.$$

即另两顶点为$\left(10\frac{1}{2},\ 10\right)$, $(4,-3)$.

1.42. 点$A(1,1)$到点B的长为5单位,线段$\overline{AB}$中点的横标为3单位,求点B的坐标.

解 设点B的坐标为(x,y),则按题意有

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y-1)^2=5^2,\\ \dfrac{x+1}{2}=3.\end{cases}$$

解得$x=5$, $y=4,-2$. 因此点B的坐标为$(5,4)$或$(5,-2)$.

1.43. 已知三角形各边的中点为$P(3,\ -2)$, $Q(1,\ 6)$和$R(-4,\ 2)$. 求三角形的顶点.

解 设三角形的顶点为$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,$C(x_3,y_3)$,则按题意有

$$\frac{x_1+x_2}{2}=3,\quad \frac{y_1+y_2}{2}=-2,$$

$$\frac{x_2+x_3}{2}=1,\quad \frac{y_2+y_3}{2}=6,$$

$$\frac{x_1+x_3}{2}=-4,\quad \frac{y_1+y_3}{2}=2.$$

解得 $x_1=-2, x_2=8, x_3=-6, y_1=-6, y_2=2, y_3=10$. 因此，三角形的顶点为$(-2,-6)$，$(8, 2)$，$(-6,10)$.

曲线及其方程

1.47. 一动点，它到 y 轴的距离等于它到点$C(2, 0)$的距离. 建立它的轨迹方程.

解 设动点的坐标为$M(x, y)$，则按题意有

$$|x|=\sqrt{(x-2)^2+y^2},\quad 即\quad x^2=x^2-4x+y^2+4,$$

故

$$y^2=4(x-1).$$

1.50. 在两坐标轴间有定长线段AB，在AB上有某一点P，当点A永远在横轴上，同时点B永远在纵轴上移动时，试求点P的轨迹.

解 设点P的坐标为(x, y)，A的坐标为$(x', 0)$，B的坐标为$(0, y')$且$|AB|=l$，$\lambda=\frac{AP}{PB}=\frac{m}{n}$，则按题意有

$$x'^2+y'^2=l^2, \tag{1}$$

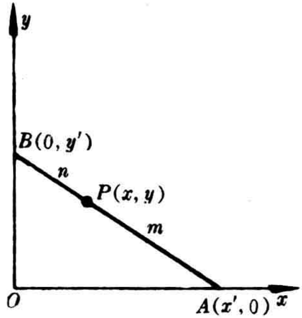
$$x=\frac{x'}{1+\frac{m}{n}},\quad 即\quad x'=\frac{m+n}{n}x, \tag{2}$$

$$y=\frac{\frac{m}{n}y'}{1+\frac{m}{n}},\quad 即\quad y'=\frac{m+n}{m}y, \tag{3}$$

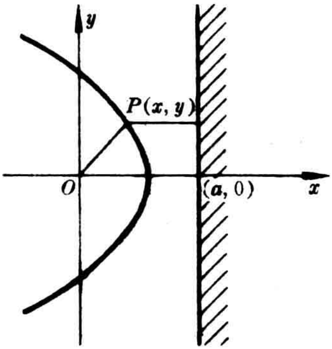
将(2)、(3)代入(1)，得

$$\frac{(m+n)^2}{n^2}x^2+\frac{(m+n)^2}{m^2}y^2=l^2.$$

不妨设$m+n=l$，从而得



1.50 图



1.52 图

$$\frac{x^2}{n^2}+\frac{y^2}{m^2}=1.$$

1.52. 一渔轮在进行拖网时，测得它到一小岛的距离与到一直线海岸的距离之比保持为一定数e. 试建立渔轮航行的轨迹方程(圆锥曲线).

解 设以小岛为原点，y轴平行于海岸，且小岛在海岸左方，a为小岛到海岸距离. 又渔轮的位置为$P(x,y)$. 则按题意有

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|a-x|}=e,$$

即 $$x^2+y^2=e^2(x^2-2ax+a^2),$$

故 $$x^2(1-e^2)+y^2+2ae^2x-a^2e^2=0.$$

1.53. 一枢轴 RQ 绕定点P旋转，并推动直角三角形ACB使沿直线KL滑动，求枢轴 RQ 与斜边 AB 的延长线的交点M的轨迹方程.

解 设 RQ 的方程为

$$Y=kX+d, \tag{1}$$

故C的坐标为$\left(-\frac{d}{k},0\right)$,$B$的坐标为$\left(a-\frac{d}{k},0\right)$,$A$的坐标为$\left(-\frac{d}{k},b\right)$，从而$AB$的方程为

$$Y=-\frac{b}{a}\left(X+\frac{d}{k}\right)+b. \tag{2}$$

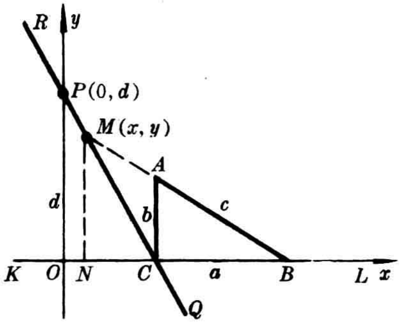
解联立方程(1)、(2)，即得交点M的坐标为

$$x=\frac{ab}{ak+b}-\frac{d}{k},$$

$$y=\frac{abk}{ak+b},$$

这是以 k 为参数的曲线方程；或者消去参数 k，得

$$y=-\frac{b}{a}\left(x+\frac{xd}{y-d}\right)+b,$$



1.53 图

化简即得交点M的直角坐标方程：

$$ay^2+bxy-a(b+d)y+abd=0.$$

1.56. 求曲线 $4x^2+y^2=32$ 和 $y^2=8x$ 的交点.

解 交点坐标由下面方程组的解来决定：

$$\begin{cases}4x^2+y^2=32, & (1)\\ y^2=8x. & (2)\end{cases}$$

把(2)代入(1)，得

$$4x^2+8x-32=0, \quad 即 \quad x^2+2x-8=0,$$

解得 $x_1=-4$, $x_2=2$.

$x_1=-4$ 代入(2)，y无解.

$x_2=2$代入(2)，得$y_1=-4$，$y_2=4$. 故交点为$(2,-4)$及$(2,4)$.

1.58. 下列各曲线方程，如平移坐标轴至其后所示的新原点，应变为何种形式？

(a) $3x-4y=6$, $(2,0)$;

(b) $5x-y+2=0$, $(3,-2)$;

(c) $x^2+y^2-4x-2y=0$, $(2,1)$;

(d) $y^2-4x+8=0$, $(2,0)$;

(e) $y^2=x^3$, $(-2,-3)$.

解 (a) 作平移 $x=x'+2$, $y=y'$, 则

$$3(x'+2)-4y'=6, \quad 即 \quad y'=\frac{3}{4}x'.$$

(b) 作平移 $x=x'+3$, $y=y'-2$, 则

$$5(x'+3)-(y'-2)+2=0, \quad 即 \quad 5x'-y'+19=0.$$

(c) 作平移 $x=x'+2$, $y=y'+1$, 则

$$(x'+2)^2+(y'+1)^2-4(x'+2)-2(y'+1)=0,$$

即

$$x'^2+y'^2=5.$$

(d) 作平移 $x=x'+2$, $y=y'$, 则

$$y'^2-4(x'+2)+8=0, \quad 即 \quad y'^2-4x'=0.$$

(e) 作平移 $x=x'-2$, $y=y'-3$, 则

$$(y'-3)^2=(x'-2)^3,$$

即

$$y'^2-6y'-x'^3+6x'^2-12x'+17=0.$$

1.59. 下列各曲线方程,如依其后所注角度将坐标轴依逆时针方向旋转,应变为如何?

(a) $x+y=0, \frac{\pi}{4}$; (b) $x+2y=1, \frac{\pi}{3}$;

(c) $x^2+4xy+y^2=16, \frac{\pi}{4}$.

解 (a) 作旋转 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}(x'-y')$, $y=\frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y')$, 则

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(x'-y')+\frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y')=0, \quad 即 \quad x'=0.$$

(b) 作旋转 $x=\frac{1}{2}(x'-\sqrt{3}y')$, $y=\frac{1}{2}(\sqrt{3}x'+y')$, 则

$$\frac{1}{2}(x'-\sqrt{3}y')+2\cdot\frac{1}{2}(\sqrt{3}x'+y')=1,$$