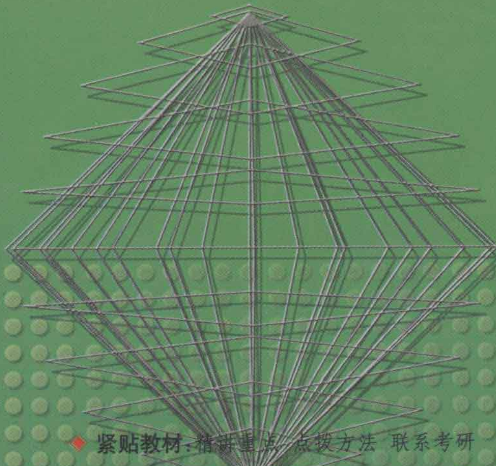
华腾教育
HUA TENG EDUCATION
高等学校教材经典同步辅导丛书数学类(二)
配高教社工程数学《复变函数》第四版 西安交大高数教研室 编

工程数学
复变函数
（第四版）

同步辅导及习题全解

华腾教育教学与研究中心
丛书主编 清华大学 范亮宇
本书主编 清华大学 曾 捷



- 紧贴教材：精讲重点 点拨方法 联系考研
- 考试宝典：教材精华 经典试卷 常考试题
- 学习卡：资料下载 信息交流 互动论坛
- 课后习题：三级突破 分析要点 总结难点

中国矿业大学出版社

高等学校教材经典同步

复变函数

（第四版）

同步辅导及习题全解

华腾教育教学与研究中心
丛书主编　清华大学　范亮宇
本书主编　清华大学　曾　捷

中国矿业大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

复变函数同步辅导及习题全解/曾捷主编. —徐州：中国矿业大学出版社，2006.8

(高等学校教材经典同步辅导丛书)

ISBN 7-81107-396-X

Ⅰ.复… Ⅱ.曾… Ⅲ.复变函数—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.O174.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 086953 号

主　　编　曾　捷
责任编辑　罗　浩
出版发行　中国矿业大学出版社
网　　址　http://www.cumtp.com　**E-mail**　cumtpvip@cumtp.com
印　　刷　北京市昌平百善印刷厂
经　　销　新华书店
开　　本　850×1168　1/32　**本册印张** 9.75　**本册字数** 204 千字
版次印次　2006 年 8 月第 1 版　2006 年 8 月第 1 次印刷
总 定 价　57.60 元
(图书出现印装质量问题，本社负责调换)

高等学校教材
经典同步辅导丛书编委会

前言

PREFACE

《复变函数》是数学、通信、电子、自动化等专业重要的基础课程之一。西安交通大学高等数学教研室主编的《复变函数》(第四版)以体系完整、结构严谨、层次清晰、深入浅出的特点成为这门课程的经典教材，被全国许多院校采用。为了帮助读者更好地学好这门课程，掌握更多知识，我们根据多年的教学经验编写了这本与此教材配套的《复变函数同步辅导及习题全解》。本书旨在使广大读者理解基本概念，掌握基本知识，学会基本解题方法与解题技巧，提高应试能力。

本书作为一种辅助性的教材，具有较强的针对性、启发性、指导性和补充性的特点。考虑到读者的不同情况，我们在内容上做了以下安排：

1. 内容提要：串讲概念，总结性质和定理，使知识全面系统，便于掌握。

2. 典型例题与解题技巧：精选各类题型，涵盖本章所有重要知识点，对题目进行深入、详细的讨论与分析，并引导学生思考问题、能够举一反三，拓展思路。

3. 历年考研真题评析：精选历年考研真题进行深入的讲解。

4. 课后习题全解：本书给出了西安交通大学高等数学教研室主编的《复变函数》(第四版)各章习题的答案。我们不仅给出了详细的解题过程，而且我们还依照难易程度给题目划分了三个等级，并根据等级的不同分别对题目进行了不同程度的讲解。

编写本书时，依据大学本科现行教材及教学大纲的要求，参考了清华大学、北京大学、同济大学、浙江大学、人民大学、复旦大学等高等院校的教材，并结合教学大纲的要求进行编写。

我们衷心希望本书提供的内容能够对读者在掌握课程内容、提高解题能力上有所帮助。同时，由于编者的水平有限，本书难免出现不妥之处，恳请广大读者批评指正。

华腾教育教学与研究中心

目录

CONTENTS

第一章

复数与复变函数

内容提要

一、复数及其代数运算和几何表示

1. 复数的概念

定义 设 x,y 都是实数,我们把形如 $z=x+iy$ 的表达式称为复数.其中 i 称为虚数单位,且具有性质 $i^2=-1$,x 和 y 分别称为复数 z 的实部和虚部,记为

$$x=\mathrm{Re}(z),y=\mathrm{Im}(z).$$

(1)当 $x=0,y\neq 0$ 时,$z=iy$ 称为纯虚数.

(2)当 $y=0$ 时,$z=x+0\cdot i$ 视为实数 x.

(3)设 $z_1=x_1+iy_1,z_2=x_2+iy_2$,则 $z_1=z_2$,当且仅当 $x_1=x_2$,$y_1=y_2$.

(4)当 $x=y=0$ 时,称 $z=0$.

2. 复数的运算

(1)加(减)法

两个复数的加(减)法,定义为实部与实部相加(减)及虚部与虚部相加(减),即

$$(x_1+iy_1)\pm(x_2+iy_2)=(x_1\pm x_2)+i(y_1\pm y_2).$$

(2)乘法

两个复数相乘按多项式乘法法则相乘并注意 $i^2=-1$,即

$$(x_1+iy_1)\cdot(x_2+iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1).$$

(3)除法

若 $z_2\neq0$,将满足 $z_2\cdot z=z_1$ 的复数 z 定义为 z_1 除以 z_2 的商,

记为 $z=\frac{z_1}{z_2}$,即

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}.$$

(4)复数的共轭及性质

设 $z=x+iy$,称 $x-iy$ 为复数 z 的共轭复数,记为 $\bar{z}$ 或 z^*,即 $\bar{z}=x-iy$,它有如下性质:

①$\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$, $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\ \overline{z_2}$, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}(z_2\neq0)$;

②$\bar{\bar{z}}=z$, $z\bar{z}=[\mathrm{Re}(z)]^2+[\mathrm{Im}(z)]^2$;

③$\mathrm{Re}(z)=\frac{1}{2}(z+\bar{z})$, $\mathrm{Im}(z)=\frac{1}{2i}(z-\bar{z})$.

3. 复数的几种表示方法

(1)复数的坐标表示

每一个复数 $z=x+iy$ 确定平面上一个坐标为(x,y)的点,反之亦然,这意味着复数集与平面上的点之间存在一一对应.由于这个特殊的一一对应存在,我们常把以 x 为实轴,y 为虚轴的平面称之为复平面.(x,y)为复数 $z=x+iy$ 的坐标表示形式,称为点 z.

(2)复数的向量表示

记复数 $z=x+iy$ 在平面上确定的点为 P,原点为 O.设复数 z 对应向量$\overrightarrow{OP}$.这也是一个特别的一一对应.为此我们称向量$\overrightarrow{OP}$为复数 z 的向量表示式.

向量$\overrightarrow{OP}$的长度称为复数 z 的模或绝对值，记为$|z|$，我们有结论：

$$z\bar{z}=|z|^2=|z^2|.$$

当 $z\neq0$ 时，以正实轴为始边，向量$\overrightarrow{OP}$为终边所确定的角 θ 称为复数 z 的辐角，记为

$$\mathrm{Arg}z=\theta.$$

当 $z=0$ 时，辐角不确定.

$\mathrm{Arg}z$ 是一个多值函数. 称满足条件$-\pi<\theta\leqslant\pi$ 的 θ 为幅角的主值，记为 $\arg z$. 从而有

$$\mathrm{Arg}z=\arg z+2k\pi\qquad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

利用复数的向量表示法对任意复数 z_1,z_2，三角不等式

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$$

的意义为三角形的一边不大于两边之和，不等式

$$|z_1-z_2|\geqslant||z_1|-|z_2||$$

表示三角形的一边不小于两边之差的绝对值.

(3)复数的三角表示

设 $z\neq0$，r 是 z 的模，θ 是 z 的任意一个辐角. 则

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta).$$

(4)复数的指数表示

在三角表式示中，利用欧拉公式：$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ 可得

$$z=re^{i\theta},$$

称为复数 z 的指数表示式.

以上复数的不同表示法仅是形式上的差异，它们各有其特点. 复数及其运算的几何解释可以从向量表示法得到，复数运算中模与幅角的变化规律可以由三角或指数表示法得到.

4. 复数的乘幂与方根

(1)积与商

设 $z_1=r_1e^{i\theta_1}$，$z_2=r_2e^{i\theta_2}$ 则

$z_1z_2=r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$, $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}$　$(r_2\neq0)$.

即

①$|z_1z_2|=|z_1||z_2|$, $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$　$(z_2\neq0)$;

②$\mathrm{Arg}(z_1z_2)=\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2$, $\mathrm{Arg}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)=\mathrm{Arg}z_1-\mathrm{Arg}z_2$.

注意:(ⅰ)正确理解等式②的含义;

(ⅱ)乘积与商的几何解释.

(2)乘幂

设 $z=re^{i\theta}$,则 $z^n=r^ne^{in\theta}=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$. 棣莫弗(DeMoivre)公式:$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$ 及其应用.

(3)方根

设 $z=re^{i\theta}$,则$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\dfrac{\theta+2k\pi}{n}\right)$

$(k=0,1,2,\cdots,n-1)$.

注意:$\sqrt[n]{z}$的 n 值性及几何解释.

二、复变函数及其极限与连续

1.复变函数的概念

复变函数是高等数学中一元实变函数概念的推广,二者定义的表述形式几乎完全一样,只要将定义中的“实数(或实数集)”换为“复数(或复数集)”就行了.但对下面几点应多加注意:

(1)实变函数是单值函数,而复变函数有单值函数和多值函数之分.

(2)复变函数 $w=f(z)$是从 z 平面上的点集 G 到 w 平面上的点集 G^* 的一个映射,因此,它不但可以把 z 平面上的点映射(或变换)为 w 平面上的点,而且可以把 z 平面上的曲线或图形映射为 w 平面上的曲线或图形,实现两个不同复平面上的图形之间的有趣的变换,为简化或研究某些问题提

供了可能.

(3)由于一个复变函数 $w=f(z)$ 对应着两个二元实变函数：

$$u=u(x,y),\quad v=v(x,y),$$

所以，可以将对复变函数的研究转化为对两个二元实变函数的研究. 这是研究复变函数的常用思想方式之一.

2. **平面点集**

(1) z_0 的 δ—邻域：满足关系 $|z-z_0|<\delta$ 的点 z 的全体称为点 z_0 的一个 δ—邻域，而满足 $0<|z-z_0|<\delta$ 的点 z 的全体称为点 z_0 的一个去心 δ—邻域.

(2)内点：设 G 是一平面点集，$z_0\in G$，若存在 z_0 的某个邻域也包含于 G，则称 z_0 为 G 的内点.

(3)开集：若 G 的每个点都是内点，则称 G 为开集.

(4)连通集：对 $G\subset \boldsymbol{C}$(即复平面)，G 非空，若存在一对 $\mathbb{C}$ 中不交的开集 G_1, G_2，满足 $G_1\cap G\neq\Phi$，$G_2\cap G\neq\Phi$，且 $G\subset(G_1\cup G_2)$ 则称 G 为连通集.

(5)区域：连通的开集叫区域. 应该注意的是，可以证明，对于开集，连通性等价于另一种更直观的属性，即道路连通，也即 G 内任意两点都可以用一条 G 中的折线连接.

(6)边界：若 z_0 点的任意一个邻域内既有区域 G 中的点，又有不属于 G 中的点，则 z_0 称为区域 G 的一个边界点. 由 G 的全体边界点组成的集合称为 G 的边界.

(7)闭区域：区域 G 及其边界一起构成闭区域，记为 $\bar{G}$.

(8)简单闭曲线：设曲线 $C: z=z(t)=x(t)+iy(t)$，$a\leqslant t\leqslant b$. 当 $x(t)$ 与 $y(t)$ 连续时，称 C 为连续曲线. 对 $t_1, t_2\in[a,b)$，当 $t_1\neq t_2$ 而有 $z(t_1)=z(t_2)$ 时，点 $z(t_1)$ 称为曲线 C 的重点. 没有重点的连续曲线 C，称为简单(或 Jordan)曲线. 如果简单曲线 C 的两个端点重合，则 C 称为简单闭曲线.

由以上定义知，简单曲线自身不相交，简单闭曲线则只有起点与终点重合.

(9)光滑曲线：曲线 $z=z(t)=x(t)+iy(t)$，$a\leqslant t\leqslant b$，当 $x'(t)$

与 $y'(t)$ 连续且 $[x'(t)]^2+[y'(t)]^2\neq 0$ 时，称为光滑曲线，由几条光滑曲线依次连接而成的曲线，称为按段光滑曲线.

(10)单连通域：若属于区域 G 的任何简单闭曲线 C 的内部也属于 G，则称 G 为单连通域. 否则称为多连通域.

3. **复变函数的极限与连续性**

(1)定义：设函数 $w=f(z)$ 在 z_0 点的去心领域 $0<|z-z_0|<\rho$ 内有定义，若任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0(0<\delta\leqslant\rho)$，当 $0<|z-z_0|<\delta$ 时，有 $|f(z)-A|<\varepsilon$ 成立，则称常数 A 为 $f(z)$ 当 z 趋于 z_0 时的极限，记为：

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=A.$$

若 $f(z)$ 在 z_0 点有定义，且 $f(z_0)=A$，则称 $f(z)$ 在点 z_0 连续. 若 $f(z)$ 在区域 G 内每一点都连续，我们称 $f(z)$ 在 G 内连续.

(2)设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，$A=u_0+iv_0$，$z_0=x_0+iy_0$，那么

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=A\Leftrightarrow\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=u_0\\ \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=v_0\end{cases} \qquad ①$$

由此可见，复变函数极限的定义虽在形式上与一元实函数的极限定义相似，但实质上却相当于二元实函数的极限. 这导致了第二章用极限定义的复变函数的导数的概念，较之一元实变函数的导数概念，其要求要苛刻得多.

(3)如果 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$，$\lim\limits_{z\to z_0} g(z)=B$，那么

$$\lim_{z\to z_0}[f(z)\pm g(z)]=A\pm B,$$

$$\lim_{z\to z_0}[f(z)\cdot g(z)]=AB,$$

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{A}{B}\quad(B\neq 0).$$

(4)由定义及式①易得连续的充要条件：

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=f(z_0)\Leftrightarrow\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}u(x,y)=u(x_0,y_0)\\ \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}v(x,y)=v(x_0,y_0)\end{cases}$$

两个连续函数 $h=g(z)$，$w=f(h)$复合所得的函数 $w=f[g(z)]$仍是连续函数.

典型例题与解题技巧

【例 1】 将复数 $z=\dfrac{(\sqrt{3}+i)(2-2i)}{(\sqrt{3}-i)(2+2i)}$化为三角形式与指数形式.

解题分析　将一个复数 z 化为三角形式与指数形式的关键在于求出该复数的模与辐角的主值. 通常的方式是先将 z 化成代数形式 $z=x+iy$，再利用 $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ 与反正切公式分别求出它的模与主辐角. 本题中由于 z 的分子与分母互为共轭复数，而复数与其共轭复数的模相等，因此，容易利用复数商的模公式求出 $|z|$. 至于主辐角除可反正切公式求得外. 也可以利用关于乘积与商的辐角公式来求. 下面给出两种解法，便于读者比较.

解题过程　将 z 的分子与分母同乘以 $(\sqrt{3}+i)(2-2i)$，得 $z=\dfrac{(\sqrt{3}+i)^2}{|\sqrt{3}+i|^2}\cdot\dfrac{(2-2i)^2}{|2-2i|^2}=\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)(-i)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i$，所以

$|z|=1$，$\arg z=\operatorname{arctg}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\dfrac{\pi}{6}$. 从而得到 z 的三角形式与指数形式：

$$z=\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}=e^{-\frac{\pi}{6}i}.$$

另一种解法是，由于分子与分母恰为一对共轭复数，故其模相同，于是

$$|z|=\frac{|(\sqrt{3}+i)(2-2i)|}{|(\sqrt{3}-i)(2-2i)|}=1$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Arg}z&=2[\operatorname{Arg}(\sqrt{3}+\mathrm{i})+\operatorname{Arg}(2-2i)]\\&=-\frac{\pi}{6}+2k\pi.\end{aligned}$$

【例 2】 设 z_1,z_2 为复平面上任意两点,证明不等式

$$|z_1-z_2|\geqslant||z_1|-|z_2||.$$

分析 这个不等式的几何意义为以 z_1,z_2,z_1-z_2 为边的三角形,一边的长度($|z_1-z_2|$)不小于两边的长度之差的绝对值($||z_1|-|z_2||$).证明这个不等式可利用书中已证的三角不等式.

证明 $|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$

$\because |z_1|=|z_1-z_2+z_2|\leqslant|z_1-z_2|+|z_2|$

$\therefore |z_1|-|z_2|\leqslant|z_1-z_2|$ ①

$\because |z_2|=|z_2-z_1+z_1|\leqslant|z_2-z_1|+|z_1|$

$\therefore |z_2|-|z_1|\leqslant|z_2-z_1|=|z_1-z_2|$ ②

利用①与②得

$$|z_1-z_2|\geqslant||z_1|-|z_2||.$$

【例 3】 设复数 α 满足 $|\alpha|<1$,试证

$$\left|\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}\right|\begin{cases}=1,当|z|=1\\<1,当|z|<1\\>1,当|z|>1\end{cases}$$

分析 比较复数 $\frac{z_1}{z_2}$ 的模 $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$ 与 1 的大小等价于比较 $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|^2$ 与 1 的大小,也相当于比较 $|z_1|^2$ 与 $|z_2|^2$ 的大小.此时常用公式 $|z|^2=z\bar{z}$,$|z_1\pm z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2\pm2\operatorname{Re}(\bar{z}_1z_2)$以及三角不等式.

证明 由等式

$$|z-\alpha|^2=|z|^2+|\alpha|^2-2\operatorname{Re}(\bar{\alpha}z)$$
$$|1-\bar{\alpha}z|^2=1+|\alpha|^2|z|^2-2\operatorname{Re}(\bar{\alpha}z)$$

可知

$$|z-\alpha|^2-|1-\bar{\alpha}z|^2=(|z|^2-1)(1-|\alpha|^2)$$

注意到 $|\alpha|<1$，便有

$$|z-\alpha|^2-|1-\overline{\alpha}z|^2\begin{cases}=0,当\ |z|=1\\<0,当\ |z|<1\\>0,当\ |z|>1\end{cases}$$

从而

$$\left|\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}\right|^2=\frac{|z-\alpha|^2}{|1-\overline{\alpha}z|^2}\begin{cases}=1,当\ |z|=1\\<1,当\ |z|<1\\>1,当\ |z|>1\end{cases}$$

由此即得要证明的结论.

【例 4】 函数 $w=\dfrac{1}{z+1}$ 将 z 平面上的下列曲线变成 w 平面上的什么曲线？

(1) $x^2+y^2=1$；　(2) $y=x+1$；　(3) $y=1$.

解题分析　解此题的要点是利用公式

$$x=\frac{1}{2}(z+\overline{z}),\qquad y=\frac{1}{2i}(z-\overline{z})$$

及题中映射

$$w=\frac{1}{z+1},\quad z=\frac{1}{w}-1.$$

$z=\frac{1}{w}-1$

$x=\frac{1}{2}(z+\overline{z})$

$y=\frac{1}{2i}(z-\overline{z})$

解题过程　令 $w=u+iv$

(1) 由 $x^2+y^2=1$ 有

$$\frac{1}{4}(z+\overline{z})^2-\frac{1}{4}(z-\overline{z})^2=1$$

即

$$z\overline{z}=1$$

$$\left(\frac{1}{w}-1\right)\left(\frac{1}{\overline{\omega}}-1\right)=1$$

$$\frac{(1-w)\cdot(1-\overline{\omega})}{\omega\overline{\omega}}=1$$

$$(1-w)(1-\overline{\omega})=w\overline{\omega}$$

$$w+\overline{\omega}=1$$

.9.