微积分教程（上）

主　编　金义明　李剑秋
副主编　丁嘉华　卢俊峰

浙江工商大学出版社
ZHEJIANG GONGSHANG UNIVERSITY PRESS

微积分教程(上)

主　编　金义明　李剑秋
副主编　丁嘉华　卢俊峰

浙江工商大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

微积分教程. 上 / 金义明，李剑秋主编. —杭州：浙江工商大学出版社，2011.8

ISBN 978-7-81140-351-0

Ⅰ. ①微… Ⅱ. ①金… ②李… Ⅲ. ①微积分—高等学校—教材 Ⅳ. ①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 158367 号

微积分教程(上)

金义明　李剑秋 主编

责任编辑	郦　晶
封面设计	刘　韵
责任印制	汪　俊
出版发行	浙江工商大学出版社 (杭州市教工路 198 号　邮政编码 310012) (E-mail:zjgsupress@163.com) (网址:http://www.zjgsupress.com) 电话:0571-88904980,88831806(传真)
排　　版	杭州朝曦图文设计有限公司
印　　刷	浙江新华数码印务有限公司
开　　本	787mm×960mm　1/16
印　　张	14
字　　数	289 千
版 印 次	2011 年 8 月第 1 版　2011 年 8 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN 978-7-81140-351-0
定　　价	29.00 元

前　言

微积分的建立是人类智慧最伟大的创造之一，一部微积分发展史，是人类一步一步顽强地认识客观事物的历史，是人类理性思维的结晶。它给出一整套的科学方法，开创了科学的新纪元，并因此加强与加深了数学的作用。恩格斯说："在一切理论成就中，未必再有什么像17世纪下半叶微积分的发现那样被看作人类精神的最高胜利了。"目前，微积分的理论与方法不仅广泛地应用于自然科学、工程技术领域，并已渗透到社会、经济各个领域，并日益显示出其重要性。学习和掌握微积分的基础知识，不仅是对理工类学生的要求，也是对经济管理类、人文科学等各类学生的基本要求和必备素质。

但是，囿于文科类学生的知识结构，微积分教与学的双方都存在较大困难。为了编写一本适合经济管理类本科学生学习微积分的教材，本书在以下几个方面做了努力：

(1) 注意与中学数学的衔接，增加或强化了中学数学教材中删去的微积分所必备的知识点，如反三角函数、和差化积与积化和差公式等；

(2) 尽量从实际出发，注重概念与定理的直观描述和实际背景，注重知识的生动性和趣味性，克服学生在数学认知上的心理障碍，逻辑推理做到删繁就简，够用就行，对学生感到疑惑或容易犯错误的知识点，则讲深、讲透；

(3) 例题丰富多样，讲解浅显易懂，多联系实际，培养学生用数学的能力，从而不断提高学生学习数学的主动性和积极性；

(4) 加强微积分各章节内容在经济管理中的应用，增强学生将数学应用到解决经济管理方面问题的意识和能力；

(5) 习题精心挑选，覆盖面广，难易程度呈阶梯型分布，循序渐进。

本书是按照国家教委对经济、管理类大学本科微积分考试大纲，结合编者多年来在经济管理类专业微积分课程的教学实践、教学改革中所积累的经验，充分考虑到独立学院学生的特点，并参考研究生入学考试数学考试大纲，编写而成。

本书编写的宗旨是：坚持"以应用为目的，以必需够用为度"的原则，以"掌握概念，强

化应用，培养技能”为重点，以“数学为本，经济为用”为目标。

本书可作为高等学校经济管理各专业及相关专业的微积分教材。全书分上下两册，共分十章，内容包括函数、极限与连续、一元函数微分学、一元函数积分学、多元函数微积分学、无穷级数、常微分方程和差分方程。第一、二、三章由金义明编写，第四、九、十章由李剑秋编写，第五、六章由卢俊峰编写，第七、八章由丁嘉华编写，最后由金义明总纂定稿。以上编写人员均为浙江工商大学杭州商学院教师。本教材由金义明制作了配套的PPT电子教案。

讲授本教材约需130课时。

由于编者的水平有限，书中肯定存在疏漏和不足，敬请广大师生和读者不吝指正。

编　者

2011年5月于浙江工商大学

目　录

第一章　函　数

函数是数学的基本概念之一，是微积分研究的主要对象. 本章介绍函数的相关概念，是中学函数知识的巩固和延伸.

1.1　区间与邻域

1.1.1　区间

在生产实践和经济活动中，会遇到各种不同的量. 有些量在变化过程中保持不变，我们称之为**常量**，通常用字母 a,b,c 等表示；有些量在某一变化过程中可取不同值，我们称之为**变量**，常用字母 x,y,z,t,u 等表示，其取值范围可以用**集合**来表示.

区间和点的邻域是常用的一类实数集.

设 a,b 为两个实数，且 $a<b$，实数集 $\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ 称为**闭区间**(图 1-1-1)，记为 $[a,b]$，即

$$[a,b]=\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}.$$

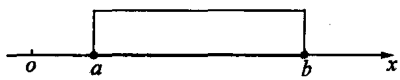

图 1-1-1

实数集 $\{x \mid a<x<b\}$ 称为**开区间**(图 1-1-2)，记为 (a,b)，即

$$(a,b)=\{x \mid a<x<b\}.$$

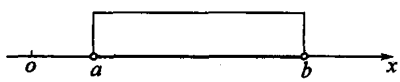

图 1-1-2

类似地，

$$[a,b)=\{x \mid a \leqslant x<b\},$$

$$(a,b]=\{x \mid a<x \leqslant b\}$$

称为**半开半闭区间**，分别如图 1-1-3、图 1-1-4 所示.

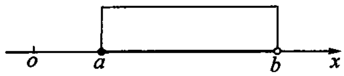

图 1-1-3

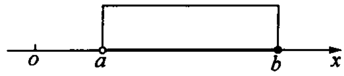

图 1-1-4

这些区间称为**有限区间**,a,b 称为区间的**端点**.在几何上,它们都可以用数轴上长度有限的线段来表示.

引入记号 $+\infty$(读作"正无穷大")及 $-\infty$(读作"负无穷大"),可类似地表示**无限区间**.例如

$$[a,+\infty)=\{x \mid x \geqslant a\},$$
$$(-\infty,\ b)=\{x \mid x<b\}.$$

这两个无限区间在数轴上分别如图 1-1-5、图 1-1-6 所示.

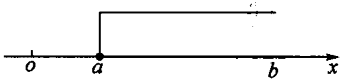

图 1-1-5

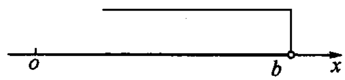

图 1-1-6

全体实数的集合 $\mathbf{R}$ 也可表示为无限区间 $(-\infty,+\infty)$.

当不需要特别辨明区间有限或无限,是否包含端点时,我们将它们简称为"区间",并常用 I 表示.

1.1.2 邻域

设 δ 是某一正数,则开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 称为点 a 的 δ **邻域**,记作 $U(a,\delta)$,即

$$U(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}=\{x \mid |x-a|<\delta\}.$$

点 a 称为该邻域的**中心**,δ 称为该邻域的**半径**(图 1-1-7).

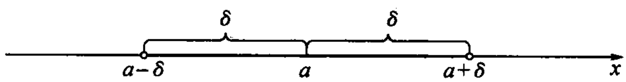

图 1-1-7

在几何上 $U(a,\delta)$ 表示:与点 a 的距离小于 δ 的一切点的全体.

开区间 $(a-\delta,\ a)=\{x \mid a-\delta<x<a\}$ 称点 a 的**左邻域**,

开区间 $(a,\ a+\delta)=\{x \mid a-\delta<x<a\}$ 称点 a 的**右邻域**.

有时需要把邻域的中心去掉,点 a 的 δ 邻域 $U(a,\delta)$ 去掉中心 a 后,称为点 a 的去心 δ 邻域(图 1-1-8),记作 $\overset{o}{U}(a,\ \delta)$,即

$$\overset{o}{U}(a,\ \delta)=(a-\delta,\ a)\cup(a,\ a+\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}.$$

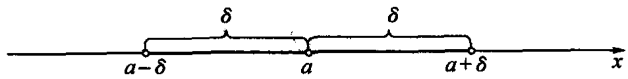

图 1-1-8

为了方便，把开区间$(a-\delta,a)$称为点a的左δ邻域，把开区间$(a,a+\delta)$称为点a的右δ邻域.

例 用区间表示满足下列不等式的所有x的集合：

(1) $|x|\leqslant 2$ (2) $|x-1|<1$ (3) $|x+a|<\varepsilon$(a，ε为常数，$\varepsilon>0$)

(4) $|x|>5$ (5) $|x+2|\geqslant 3$ (6) $x^2<9$

解 (1) 由$|x|\leqslant 2$，利用绝对值知识，可得$-2\leqslant x\leqslant 2$，

即有$\{x \mid |x|\leqslant 2\}=[-2, 2]$.

(2) 由$|x-1|<1$，可得$-1<x-1<1$，即$0<x<2$，

于是$\{x \mid |x-1|<1\}=(0, 2)$.

(3) 由$|x+a|<\varepsilon$，可得$-\varepsilon<x+a<\varepsilon$，即$-a-\varepsilon<x<-a+\varepsilon$，

于是$\{x \mid |x+a|<\varepsilon\}=(-a-\varepsilon, -a+\varepsilon)$.

(4) 由$|x|>5$，可得$x>5$或$x<-5$，

因此$\{x \mid |x|>5\}=(-\infty, -5)\cup(5, +\infty)$.

(5) 由$|x+2|\geqslant 3$，可得$x+2\geqslant 3$或$x+2\leqslant -3$，即$x\geqslant 1$或$x\leqslant -5$，

因此$\{x \mid |x+2|\geqslant 3\}=(-\infty, -5]\cup[1, +\infty)$.

(6) 由$x^2<9$，可得$|x|<3$，故有$\{x \mid x^2<9\}=(-3, 3)$.

习题 1.1

1. 用区间表示满足下面不等式的变量的变化范围：

(1) $-2<x\leqslant 4$ (2) $x\leqslant 0$

(3) $x^2\leqslant 16$ (4) $|x-3|<3$

(5) $|3x-2|\geqslant 1$ (6) $|x-x_0|<\delta$($\delta>0$及x_0均为常数)

2. 用区间表示下面的邻域：

(1) 1 的 0.01 邻域 (2) -2 的 1 邻域

(3) 0 的 0.1 去心邻域 (4) -1 的 2 左邻域

(5) x_0 的 ε 右邻域($\varepsilon>0$) (6) x_0 的 δ 去心邻域

1.2 函数的概念

1.2.1 函数的定义

由于实践和各门科学自身发展的需要，到了 16 世纪，对物体运动的研究成为自然科学的中心问题. 与之相适应，数学在经历了两千多年的发展之后进入了一个新的时代，即变量数学的时代. 作为在运动中变化的量（变量）及它们之间的依赖关系的反映，数学中产生了变量和函数的概念.

例如，伽利略发现自由落体下落的距离 s 与经历的时间 t 的平方成正比，得到著名的公式

$$s = \frac{1}{2}gt^2,$$

确定了变量 t 与 s 之间的依赖关系，即**函数关系**，这就是自由落体运动规律的数学表述.

定义 1.1 设数集 $D \subset \mathbf{R}, D \neq \varnothing$，如果对 D 中的每一个 x，按照某个对应法则 f，有唯一的数 $y \in \mathbf{R}$ 与之对应，则称 f 是定义在 D 上的一个**函数**，记为

$$y = f(x), x \in D,$$

其中 D 称为**定义域**，$f(x)$ 称为与 x 对应的函数值. 当 x 取遍 D 中每一个数值时，对应的函数值的全体称为**值域**，记为 $f(D)$，即

$$f(D) = \{y \mid y = f(x), x \in D\}.$$

表示对应法则的记号除了 f 外，还往往可用其他英文字母或希腊字母来表示，如“g”、“F”、“φ”、“Ψ”等. 相应地，函数可记为 $y = g(x)$，$y = F(x)$，$y = \varphi(x)$，$y = \Psi(x)$ 等，有时还直接用因变量的记号来表示对应法则，如记函数为 $y = y(x)$. 在同一问题中，需用不同的记号来表示不同的函数.

由函数的定义可知，定义域 D 和对应法则 f 是构成函数的两个要素，两个函数只有在定义域、对应关系都相同时，才是同一函数.

例 1 判断下列各对函数是否相同：

(1) $y = x + 1,\ s = t + 1$ (2) $y = x + 2,\ y = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

(3) $y = x,\ y = \sqrt{x^2}$ (4) $y = x,\ y = \sqrt[3]{x^3}$

解 (1) 两个函数的定义域和对应法则均相同，所以两个函数相同.

(2) 前者的定义域为一切实数，而后者要求 $x \neq 2$，所以两个函数不同.

(3) $y = \sqrt{x^2} = |x|$，当 $x < 0$ 时，后者 $y = -x$，所以对应法则不同，因此两个函数不同.

(4) 两个函数的定义域和对应法则均相同，所以两个函数相同.

在讨论函数时，必须注意函数的定义域. 若讨论的是纯数学问题，函数的定义域约定为使数学表达式有意义的自变量的取值范围，此时定义域又称为**自然定义域**. 而在实际问题中，函数的定义域要根据问题的实际意义来确定. 例如，函数 $y=x^2$，当在数学上作一般讨论时，定义域为 $(-\infty,+\infty)$，而若把它看作是正方形的面积 y 与边长 x 的函数关系时，定义域就为 $(0,+\infty)$.

例 2　求函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-2}}{\ln(5-x)}$ 的(自然)定义域.

解　要使表达式有意义，必须满足

$$\begin{cases} x-2\geqslant 0 \\ 5-x>0, \\ 5-x\neq 1 \end{cases}\qquad 解得 \begin{cases} x\geqslant 2 \\ x<5. \\ x\neq 4 \end{cases}$$

所以函数的(自然)定义域为 $D=[2,4)\cup(4,5)$.

1.2.2　函数的表示法

函数的表示法通常有三种：表格法、图象法和解析法.

例 3　某一时期银行的人民币定期储蓄存期与年利率如下表所示.

存　期	三个月	六个月	一年	两年	三年	五年
年利率(%)	0.55	0.82	1.05	1.45	1.82	2.20

该例表明了年利率与存期之间的对应函数关系，这种表示函数关系的方法称为**表格法**.

例 4　某城市规定出租车收费标准如下：路程不超 3 公里时，车费是 10 元，超过 3 公里的部分每公里加收 2 元，出租车车费与公里数的函数关系如图 1-2-1 所示.

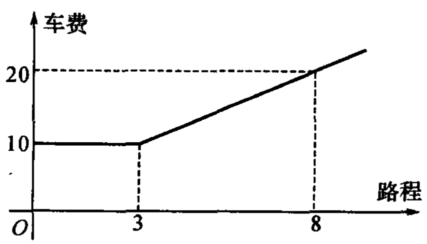

图 1-2-1

这种表示函数关系的方法称为**图象法**.

表格法和图象法直观明了，而**解析法**简洁准确，易于运算，便于理论研究. 例如，$y=$

$\lg x, y=\sin\sqrt{x}$ 都是用解析法来表示函数.

在用解析法表示函数时,有时一个函数要用几个式子表示. 这种在自变量的不同范围中用不同的数学式子来表示的函数,通常称为**分段函数**. 例如,例 4 中,路程 x 与车费 y 的函数关系也可用解析法表示为一个分段函数

$$y=\begin{cases}10, & 0<x\leqslant 3\\ 10+2(x-3), & x>3\end{cases},$$

它的定义域为$(0,+\infty)$.

我们再来举几个分段函数的例子.

例 5　绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $f(D)=[0,+\infty)$,图形如图 1－2－2 所示.

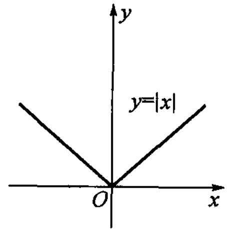

图 1－2－2

例 6　符号函数

$$y=\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ 1, & x>0\end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $f(D)=\{-1,0,1\}$,图形如图 1－2－3 所示.

例 7　取整函数 $y=[x]$, $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数. 例如, $[2.8]=2$, $[-\pi]=-4$, $[\sqrt{3}]=1$. 易知,取整函数 $y=[x]$ 的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $f(D)=\mathbf{Z}$. 图形如图 1－2－4 所示.

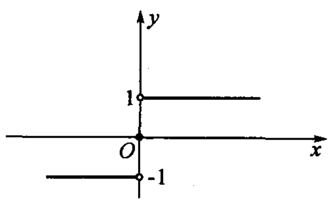

图 1－2－3

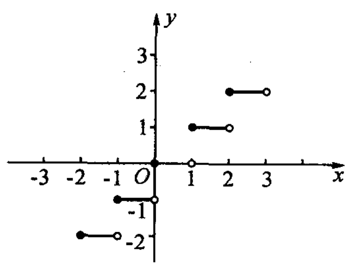

图 1－2－4

例 8　求函数 $f(x)=\begin{cases}x+2, & x<0\\ 2, & 0\leqslant x<1\\ 2-x, & x\geqslant 1\end{cases}$ 的定义域,并作出其图形.

解　分段函数的定义域是各段定义域的并集,因此 $D=(-\infty,+\infty)$,图形如图 1－2－5 所示.

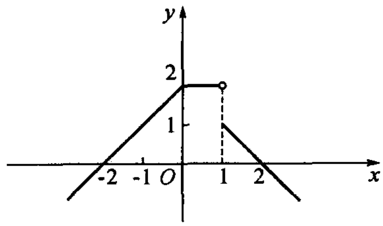

图 1-2-5

在自然科学和经济学中，经常会遇到分段函数情形. 在作分段函数的图形时，应将各段图形作在同一坐标系内. 注意：分段函数表示的是一个函数而非多个函数.

1.2.3 函数关系的建立

我们通过实例介绍如何建立变量之间的函数关系.

为了建立函数关系，需要明确问题中的因变量与自变量，再根据题意确定因变量与自变量的关系，从而得出函数关系，并根据实际背景确定函数的定义域.

例 9 某企业对某产品制订了如下的销售策略：购买不超过 20 公斤，每公斤 10 元；购买不超过 200 公斤，其中超过 20 公斤的部分，每公斤 7 元；购买超过 200 公斤的部分，每公斤 5 元. 试建立购买费用与购买量间的函数关系.

解 设购买量为 x(公斤) 时，费用为 y(元). 则

$$y=\begin{cases}10x, & 0\leqslant x\leqslant 20\\ 10\times 20+7(x-20), & 20<x\leqslant 200,\\ 10\times 20+7\times 180+5(x-200), & x>200\end{cases}$$

即得

$$y=\begin{cases}10x, & 0\leqslant x\leqslant 20\\ 60+7x, & 20<x\leqslant 200,\\ 460+5x, & x>200\end{cases}$$

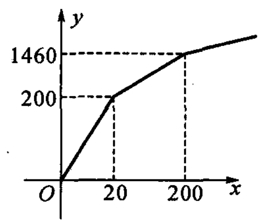

图 1-2-6

这个分段函数的图形如图 1-2-6 所示.

例 10 某人从美国到加拿大去度假，他把美元兑换成加元时币面数值增加 12%，回国后他发现把加元兑换成美元时，币面数值减少 12%. 把两次兑换的方式用函数表示出来，问：若他先将 x 美元兑换成加元之后再兑换回美元是赚了还是赔了？

解 设 $f(x)$ 为将 x 美元兑换成的加元数，$g(x)$ 为将 x 加元兑换成的美元数，则

$$f(x)=x+x\cdot 12\%=1.12x,\quad x\geqslant 0,$$
$$g(x)=x-x\cdot 12\%=0.88x,\quad x\geqslant 0.$$

由于 $g[f(x)]=0.88f(x)=0.88\cdot 1.12x=0.9856x<x$，因此，他最终赔了.

例 11　如图 1-2-7,从边长为 a 的正三角形铁皮上剪一个矩形,设矩形的一条边长为 x,周长为 l,面积为 A,试分别将 l 和 A 表示为 x 的函数.

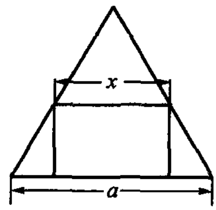

图 1-2-7

解　矩形的另一条边长为 $\frac{a-x}{2}\cdot\tan 60^\circ=\frac{\sqrt{3}(a-x)}{2}$,

该矩形周长 $l=\sqrt{3}(a-x)+2x=(2-\sqrt{3})x+\sqrt{3}a,x\in(0,a)$,

矩形面积 $A=\frac{\sqrt{3}(a-x)}{2}\cdot x=\frac{\sqrt{3}}{2}ax-\frac{\sqrt{3}}{2}x^2,x\in(0,a)$.

习题　1.2

1. 下列函数是否相同,为什么?

(1) $y=\frac{x^2-1}{x+1}$ 与 $y=x-1$　　(2) $y=1$ 与 $y=\sin^2x+\cos^2x$

(3) $y=x\sqrt{x^2-1}$ 与 $y=\sqrt{x^4-x^2}$　　(4) $y=\ln x^2$ 与 $y=2\ln x$

(5) $y=\begin{cases}\frac{x}{|x|}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 与 $y=\begin{cases}-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ 1, & x>0\end{cases}$

2. 求下列函数的自然定义域:

(1) $y=\frac{x-2}{x^2-4x}$　　(2) $y=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$　　(3) $y=\frac{1}{\lg(x-\pi)}+\lg\frac{x}{2}$

(4) $y=\arcsin(x+1)$　　(5) $y=\frac{\arctan x}{\log_3\sqrt{x+2}}$　　(6) $y=\sqrt{6+x-x^2}+\ln(x+1)$

3. 某工厂生产某产品总数量为 1000 吨,规定向某客户销售时每吨定价为 130 元,但若销售量超过 700 吨,则超出部分可按每吨降价一成予以优惠. 试求该厂在向客户销售时,其销售总收入与销售量的函数关系.

4. 某餐店开始营业前,作如下估计:如设置 40 ～ 80 个座位,每个座位每周可获利润 8 元,但如果座位超过 80 个,每增加 1 个,每周每个将少赚 0.04 元. 试将每周利润 L 表示为座位个数 x 的函数,并求:当座位数超过多少个时,预计将亏本.

5. 某产品年产量为 x 台,每台售价为 200 元. 当年产量不超过 500 台时,可以全部售出;当年产量超过 500 台时,须经广告宣传后才可再售出一些,这时超额销售部分需花广告费每台 2 元和销售杂务费每台 15 元,但最多也只能售出 200 台. 试求该产品年销售总收入与年产量 x 的函数关系.

6. 将边长 10cm 的一块正方形铁皮的四角各截去一个大小相同的小正方形,然后将四边折起做成一个无盖的方盒,试求所得方盒体积与截去的小正方形边长的函数关系.

1.3　函数的基本性质

1.3.1　函数的单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,区间 $I \subset D$. 如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2,当 $x_1 < x_2$ 时,恒有

$$f(x_1) < f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调增加**的(图 1-3-1);如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2,当 $x_1 < x_2$ 时,恒有

$$f(x_1) > f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调减少**的(图 1-3-2).

单调增加和单调减少的函数统称为**单调函数**.

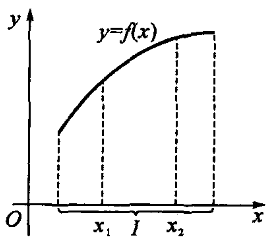

图 1-3-1

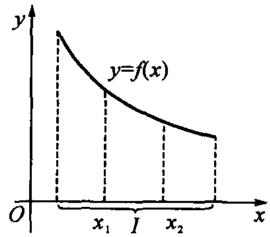

图 1-3-2

例如,函数 $f(x) = x^2$ 在区间$[0, +\infty)$上是单调增加的,在区间$(-\infty, 0]$上是单调减少的,在区间$(-\infty, +\infty)$内函数 $f(x) = x^2$ 不是单调的(图 1-3-3).

又如,函数 $f(x) = x^3$ 在区间$(-\infty, +\infty)$内是单调增加的(图 1-3-4).

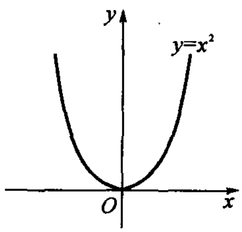

图 1-3-3

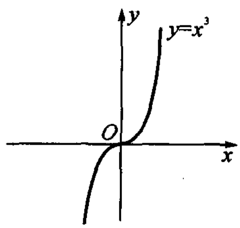

图 1-3-4

函数的单调性将在学习导数后,在第四章中作进一步的研究.

1.3.2　函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称,若对于任一 $x \in D$,恒有

$$f(-x)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**偶函数**.若对于任一 $x\in D$,恒有

$$f(-x)=-f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**奇函数**.

例如,$f(x)=x^2$ 是偶函数,因为 $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$. 而 $f(x)=x^3$ 是奇函数,因为 $f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$.

偶函数的图形关于 y 轴是对称的(图1-3-5),奇函数的图形关于原点是对称的(图1-3-6).

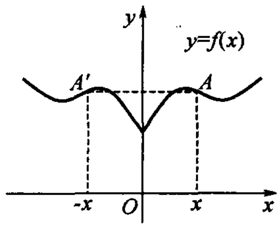

图 1-3-5

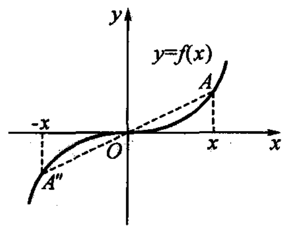

图 1-3-6

例 判断下列函数的奇偶性:

(1) $f(x)=2^x+2^{-x}$　　(2) $f(x)=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$

(3) $f(x)=\ln(\sqrt{1+x^2}+x)$　　(4) $f(x)=\begin{cases}1-e^{-x}, & x\leqslant 0\\ e^x-1, & x>0\end{cases}$

解 (1) $f(-x)=2^{-x}+2^x=f(x)$,所以 $f(x)$ 是偶函数.

(2) $f(-x)=\dfrac{2^{-x}-1}{2^{-x}+1}=\dfrac{1-2^x}{1+2^x}=-f(x)$,所以 $f(x)$ 是奇函数.

(3) $f(x)+f(-x)=\ln(\sqrt{x^2+1}+x)+\ln(\sqrt{x^2+1}-x)=\ln 1=0$,所以 $f(x)$ 是奇函数.

(4) $f(-x)=\begin{cases}1-e^{-(-x)}, & -x\leqslant 0\\ e^{-x}-1, & -x>0\end{cases}=\begin{cases}1-e^{x}, & x\geqslant 0\\ e^{-x}-1, & x<0\end{cases}=\begin{cases}1-e^{x}, & x>0\\ e^{-x}-1, & x\leqslant 0\end{cases}$ $=-f(x)$,所以 $f(x)$ 是奇函数.

1.3.3 函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,如果存在一个正数 T,使得对于任一 $x\in D$,有 $x\pm T\in D$,且

$$f(x+T)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**周期函数**,T 称为 $f(x)$ 的**周期**,通常我们说的周期是指**最小正周期**(如果存