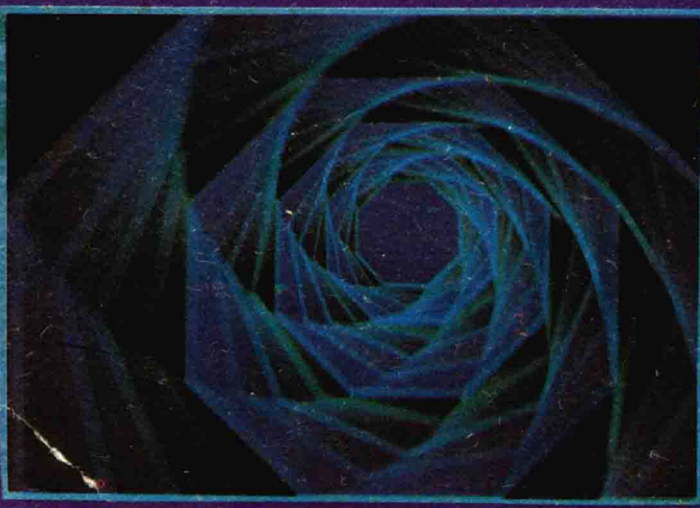
高中生会考精编全书

●立体几何分册



高中生会考精编全

立体几何分册

《高中生会考精编全书》编委会　编

南 海 出 版 公 司

1992・海口

琼新登字01号

高中生会考精编全书

立体几何分册

《高中生会考精编全书》编委会　编

责任编辑：李　琪

装帧设计：王爱中　张　迅

南海出版公司出版

新华书店北京发行所发行

吉林市印刷厂印刷

787×1092毫米 32开本　7.5印张　165千字

1992年8月第1版　1992年8月第1次印刷

印数：1—12 500

ISBN 7-80570-849-5/G·249

定价：3.75元

目　录

第一章　直线和平面

一、平　面

●基础知识

本单元的基础知识有平面及其表示法、平面的基本性质、平面图形的直观图的画法. 教学要求是:

1. 知道什么样的面是平面,会用不同形状的平面图形或不同的字母表示空间不同位置的平面,知道平面是无限延展的.

2. 准确并熟练地掌握平面的基本性质,会用平面的基本性质解决有关平面的问题.

3. 掌握水平放置的平面图形的直观图的画法,会用斜二测的画法画水平放置的平面图形(特别是正三角形、正四边形、正五边形、正六边形)的直观图.

〔**例 1**〕在空间,平面有大小吗? 为什么?

〔**分析**〕此题是考查对平面概念特别是它的无限延展性有无正确认识的题,应准确地掌握有关知识解答这一问题.

〔**答**〕没有大小,因为在空间,平面是向四周无限延展的.

注意:一定要找到相应的知识,用平面的无限延展性来说明平面无大小,把教材中的基础知识作为分析问题和解决问题的根据.

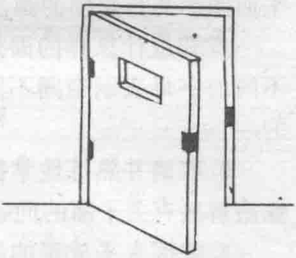
〔**例 2**〕一条直线经过平面外的一点，它和这个平面最多有几个公共点？为什么？

〔**分析**〕用公理 1 来说明这个问题.

〔**答**〕最多有一个公共点。因为假设直线与平面有两个或两个以上的公共点，根据公理 1，这条直线上的所有的点都在这平面内，这和已知条件所说的这直线经过这平面外的一点相矛盾。因此这直线与这平面最多有一个公共点.

注意：其可能情况有两种：一是直线与平面没有公共点，此时直线与平面平行（以后会学到），另一是直线与平面相交（有且只有一个公共点）.

〔**例 3**〕观察屋门，装上两个合页时，门可以转动。但是，如果在门口处插上插销，门就固定了. 这是为什么？



〔**分析**〕用公理 3 来说明转动及固定两种不同情况.

〔**答**〕因为两点不能确定平面，因此在门轴上装两个合页时，门的位置不能固定，可以绕门轴转动，但是在门口处插上插销，门所在的平面就要经过不共线三点，而不共线三点确定一个平面，也就是说只能有一种位置，所以门就固定了.

注意：一定要指明不共线三点确定一个平面，离开不共线这个条件虽有三点也不能确定平面. 这是个容易忽略的问题.

〔**例 4**〕已知四个点不共面，求证其中任何三点都不在同一条直线上

〔**分析**〕这是一个证明问题，要根据教材中所规定的定义、

定理、公理、性质等基础知识，利用合乎逻辑的推理过程加以证明，同时还要正确地写出已知、求证和证明.

〔答〕已知：四点 A、B、C、D 不共面.

求证：四点中任何三点都不在同一条直线上.

证明：假设四点中有三个点在同一条直线 l 上，另一点在直线 l 外，例如点 A，B，C 在 l 上，点 D 在 l 外，那么点 D 和直线 l 确定一个平面 α.

$\because$ A，B，C$\in$l，且 l$\subset\alpha$.

$\therefore$ A，B，C$\in\alpha$，又 D$\in\alpha$

$\therefore$ 点 A，B，C，D 共面，这与已知 A，B，C，D 四点不共面矛盾.

$\therefore$ A，B，C 三点在直线上，点 D 在直线 l 外是不可能的.

又假设 A，B，C，D 四点都在直线 l 上，因为经过直线 l 有无数个平面，所以 A，B，C，D 四点共面。这也与已知矛盾。所以 A，B，C，D 四点都在直线 l 上也是不可能的.

综上所述，A，B，C，D 四点中任何三点都不在同一直线上.

注意：本题的证明方法叫做反证法，其证明的一般步骤是：

（1） 假设所求证的命题的结论不成立(即结论的否定成立)；

（2） 由假设出发进行合乎逻辑的推理，推出与假设或与某定义、定理、公理相矛盾的结论；

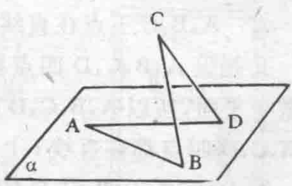
（3） 推翻假设，由假设不能成立推出所证命题的结论成立.

在直接论证有困难时，可以使用这种反证法.

〔**例 5**〕四条线段首尾相连，所得图形一定是平面图形吗？为什么？

〔**分析**〕本题主要考查平面图形的概念，同时也考查空间想象力和空间观念. 因为在平面，任意四条线段首尾相连，所得图形一定是平面图形，即图形上各点(顶点和边)都在同一个平面内；可是在空间，任意四条线段首尾相连，所得图形不一定是平面图形，即存在下面这样的情况：图形上的一些点在一个平面内，而另外一些点不在前面这些点所确定的平面内. 回答此题就应指出相应的反例、用存在反例来说明"不一定成立".

〔**答**〕不一定，若 A，B，C，D 四点共面，线段 AB. BC. CD. DA 所组成的四边形是平面图形；若 A. B. C. D 四点不共面(如图)，所得到的四边形 ABCD 就不是平面图形.



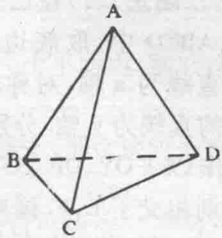
注意：在空间，四个顶点不共面的四边形叫做空间四边形.

〔**例 6**〕不共面的四点，可以确定几个平面？

〔**分析**〕首先应该知道不共线三点确定一个平面，再根据〔例 4〕的论证在不共面的四点中，任意三点不共线，即任意三点可以确定一个平面，因此解此题的关键是能找到多少个不共线三点，有多少个不共线三点，就能确定多少个平面. 根据上述分析，不共面四点可以确定四个平面. 例如在不共线四点 A，B，C，D 中，利用不共线三点所确定的平面有 ABC，ACD，ABD 和 BCD.

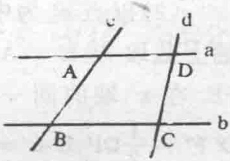
〔**答**〕4 个.

注意:可以画一个简单图形(例如画一个四面体)来分析可确定几个平面.



〔**例 7**〕已知:直线 c,d 和两平行线 a,b 分别相交于 A,B,C,D 四点(如图). 求证:a,b,c,d 在同一平面内.

〔**分析**〕如图,直接证明 a,b,c,d 在一个平面内有困难,可按如下步骤,即先利用其中的部分直线(例如两平行线 a,b)确定一个平面,然后证其它各直线(例如 c,d)都在这平面内. 利用这一科学手段就可以证明四条直线在同一平面内.



〔**证明**〕$\because$ $a \parallel b$. $\therefore$ a,b 确定一个平面 α. $\because$ $A \in a, B \in b$, $\therefore$ $A, B \in \alpha$, $\therefore$ $c \subset \alpha$. 同理 $d \subset \alpha$.

$\therefore$ a,b,c,d 在同一平面内.

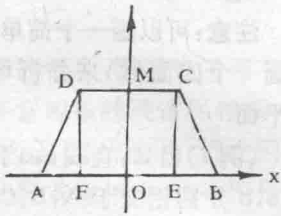
注意:此题只能用 a,b 确定平面,而不能用 c,d 确定平面,因为已知条件未说明 c,d 是什么样的直线,因为只有 c、d 是平行线或相交线才可以确定平面;另外此题也不能用 a,c 来确定平面,因为用 a,c 确定平面后,证 b,d 在这平面内将十分困难。这说明如何确定平面是证图形共面的重要技巧.

〔**例 8**〕画水平放置的等腰梯形的直观图.

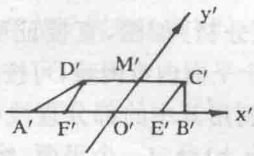
〔**分析**〕如图,先在已知的等腰梯形中画出 x 轴和 y 轴,再过点 C,D 分别作 y 轴的平行线,与 x 轴分别交于 E,F. 只要画出 x 轴上的线段 AB 以及与 y 轴平行的线段 DF,CE,就可以

画出等腰梯形 ABCD.

〔**画法**〕(1)在已知等腰梯形 ABCD 中，取底边 AB 所在的直线为 x 轴，对称轴 OM 所在的直线为 y 轴. 分别过点 C，D 作 CE ∥ OY，DF ∥ OY，与 x 轴分别相交于 E，F. 画对应的 x′ 轴和 y′ 轴，使 $\angle x'o'y' = 45°$.



(2)以点 o′ 为中点，在 x′ 轴上截取 $A'B' = AB$，$F'E' = FE$. 在 x′ 轴的同一侧画线段 $D'F' = \frac{1}{2}DF$，$E'C' = \frac{1}{2}EC$.



(3) 连结 A′D′，D′C′，C′B′. 所得的四边形 A′B′C′D′ 就是等腰梯形 ABCD 的直观图.

注意：此题还有另一种画法。即先画 x′ 轴、y′ 轴上的线段 A′B′、O′M′，再过 M′ 画以 M′ 为中点的并与 x′ 轴平行的线段 D′C′，同样可以得到 A′B′C′D′，并且比前一种画法更为简单。这说明在解题时，要注意多种方法的使用，并且力求简单.

■习题 A

1. 判断正误，正确的在题后面的括号内画“√”，错误的画“×”.

(1) 平面内的一条直线可以伸到平面外去；(×)

(2) 两个平面有时只相交于一个公共点；(×)

(3) 一条直线不能确定一个平面；(√)

(4) 有三个不同的公共点的两个平面是重合的平面；

(X)

2. 填空：

(1) 如果一条直线上的两个点在一个平面内，那么这条直线上的__所有点__在这个平面内；

(2) 空间四点中有三点在一条直线上，那么这四个点必然__共面__；

(3) 过空间一点引三条直线，最多可以确定__3__个平面；

(4) 空间两个平面最多可将空间分成__4__个部分，最少可以分成__3__个部分.

3. 选择题

(1) 下列各命题，正确的是(C)

(A) 两条直线确定一个平面；

(B) 平面 α 和平面 β 相交于不共线的三个点 A,B,C；

(C) n 条直线中的任意两条共面，这 n 条直线不一定共面；

(D) 各边长都相等的四边形是菱形.

(2) 在空间取四个点，它们可以确定的平面的个数是(D)

(A)1；(B)2 或 3；(C)4；(D)1 或 4.

(3) 三个平面两两相交，则下述论断中正确的是(BC

(A) 必交于一点； (B) 必交于一直线；

(C) 不可能只有两条交线；

(D) 至少有三条交线.

(4) 两两平行的三条直线，最多可确定(C)

(A) 一个平面； (B) 两个平面；

(C) 三个平面；　　(D) 四个平面.

4. 问答题

(1) “确定一个平面”与“有且只有一个平面”这两种说法是否表达同一个意思?在空间,具备哪些条件可以确定一个平面?

(2) 分别在两个相交平面内的两条直线如果相交,其交点是否在两个相交平面的交线上? 为什么?

(3) 独轮手推车后面的支架要有两个支点,而有的自行车后面的支架只需有一个支点,这是为什么?

(4) 怎样用两根细绳检验一张桌子的四条腿的下端是否在同一平面内?

(5) 两两相交于三点的三条直线是否共面? 为什么?

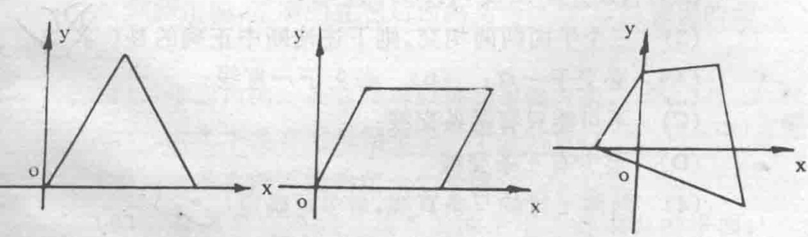
(6) 一条直线和两条平行线都相交,这三条直线是否共面? 为什么?

(7) 在空间,任意一个四边形不一定是平面图形,而梯形则一定是平面图形,这是为什么?

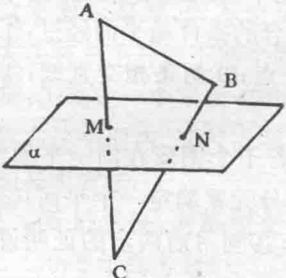
(8) 过一点的一组直线在什么情况下共面? 为什么?

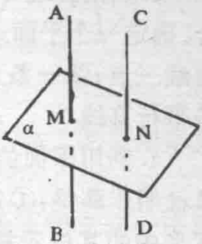
5. 画图题

(1) 画出图中各水平放置的平面图形的直观图.

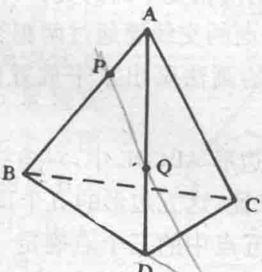


(2) △ABC 中,AC∩平面 α=M,BC∩平面 α=N,画出△ABC 与平面 α 的交线;又已知线段 AB∥线段 CD,AB,CD 与平面 α 分别相交于 M,N 两点,画出 AD 与平面 α 的交点.





(3) 如图,已知四面体 ABCD,点 P,Q 分别在线段 AB、线段 AC 上,找出直线 PQ 与底面 BCD 的交点.



●基本技能

本单元的基本技能有:

1. 利用公理 1 判断一条直线是否在某个平面内。关键是看这条直线上是否有两个点在一个平面内,若有两个点在一个平面内,那么这条直线就在这个平面内;

2. 利用公理 2 判断两平面是否相交，若相交，其交线是一条什么样的线. 关键是看两平面是否有公共点. 两平面若有一个公共点，那么这两个平面必相交，其交线是经过这公共点的一条直线；

3. 利用公理 3 及其推论来确定平面或判定两平面是否重合。确定一个平面或判定两平面重合的条件是平面经过：①不共线三点；②一条直线及直线外一点；③两条相交直线；④两条平行直线.

4. 利用平面的基本性质证明若干个图形在同一平面内. 其证明步骤是：①先用图形中的部分元素确定一个平面；②证图形中的其他元素都在这平面内；③利用前两步的证明说明所论述的各图形在同一平面内.

5. 利用平面的基本性质证明诸点共线或诸线共点，关键是利用公理 2 来证明两相交平面的交公共点者在两相交平面的线上，或两相交平面的交线要通过两相交平面的公共点.

6. 会用斜二测的画法画出水平放置的平面图形的直观图.

〔**例 1**〕已知：五边形 ABCDE 中，对角线 AC、BE 相交于 F，AD、BE 相交于 G、求证：这五边形的五个顶点在同一平面内.

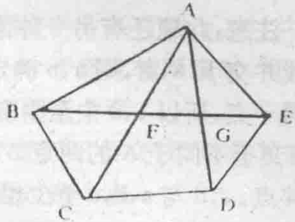
〔**分析**〕先利用五点中的三个点确定一个平面，然后证其余两点都在这平面内.

〔**证明**〕$\because$ A，C，D 是不共线三点，$\therefore$ A，C，D 确定一个平面 α. $\because F\in AC$，$AC\subset\alpha$，$\therefore F\in\alpha$，同理可证 $G\in\alpha$，$\therefore$ 直线 FG 上的两点 $B, E\in\alpha$.

$\therefore$ A、B、C、D、E 在同一平面内.

注意：此题有多种证法，如先用 A、F、G 确定平面，再证

B、C、D、E 在这平面内；或先用AC、AD 确定一个平面，再证B、E 在这平面内；或先用点 A 及直线 BE 确定平面，再证 C、D 在这平面内等等，但不论用哪种方法都离不开以下两个基本步骤：①确定一个平面；②证各元素在这平面内. 这种证明方法可叫做"归一法". 是证图形共面的基本方法.

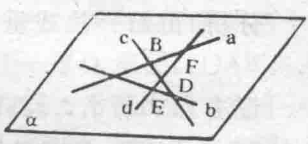


〔**例 2**〕求证：两两相交而不共点的四条直线在同一平面内。(1962 年高考题)

〔**分析**〕用归一法，但要分清两种情况：①两两相交于六个点(无三线共点)；②有三线共点，第四条直线不经过这一点.

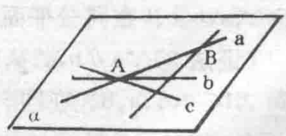
〔**证明**〕设这四条直线是 a，b，c，d，分两种情况来证明.

(1) 四条直线中任意三线不共点. ∵a，b 是相交直线，∴a，b 确定一个平面 α. 又∵直线 C 上的两点 B，D ∈α，∴C⊂α. 同理 d⊂α. ∴a，b，c，d 在同一平面内；



(2) 四条直线中有三条例如 a，b，c 过同一点 A，而 d 不通过点 A.

∵ A∉d，∴A，d 确定一个平面 β. ∵直线 a 上的两点 A，B∈β，∴a⊂β. 同理 b⊂β，c⊂β. ∴a，b，c，d 在同一平面内.



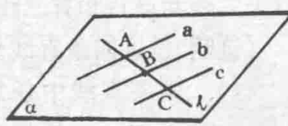
根据(1)、(2)证得 a,b,c,d 在同一平面内.

注意:此题还有另一种证明方法.即设 a,b 是其中的两条直线并交于 A 点,则 a,b 确定一个平面 α.因为四条直线不通过同一点,所以 c,d 中至少有一条不通过 A,设为 c,则 c 与 a,b 相交于不同于 A 的两点 B,C,而 B,C∈α,∴c⊂α.∵a,b,c,d 不共点。∴d 与 a,b,c 至少相交于两个不同的点,设它为 D,E.则 D,E∈α 得 d⊂α.∴a,b,c,d 在同一平面内。这个证明更加巧妙,但不论哪种方法都没有离开证图形共面的基本方法,只不过要注意到可能出现的各种情况.

〔**例 3**〕三条平行线与另一条直线都相交,求证:这四条直线在同一平面内.

已知:直线 a∥b∥c,直线 l 与 a、b、c 分别相交于 A、B、C.

求证:a、b、c、e 在同一平面内.



〔**分析**〕用归一法或重合法.

〔**证法 1**〕∵a∥b,∴a、b 确定一个平面 α,∵ 直线 l 上两点 A、B∈α,∴l⊂α,∴a、b、l 在同一平面内,即 b 在 a、l 所确定的平面内(这一转换很重要).同理可证 c 在 a、l 所确定的平面内.

∴a、b、c、l 在同一平面内

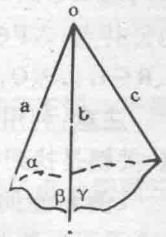
〔**证法 2**〕∵a∥b,∴a、b 确定一个平面 α,∵l 上两点 A、B ⊂α.∴l∈α,∴a、b、l 在同一平面 α 内。同理可证 a、c、l 在同一平面 β 内.∵α、β 都经过两相交直线 a、l,∴α、β 是同一平面,∴a、b、c、l 在同一平面内.

注意:证法 1 有一般性,用这种方法不仅可以证明四线共面,还可以证明与同一条直线相交的 n 条直线($n\geqslant3$)共面.证法 2 比较容易理解,在只确定一个平面比较困难时,可多确定几个平面,通过各平面重合来证图形共面.

〔**例 4**〕三个平面两两相交得到三条交线,如果其中有两条相交于一点,那么第三条也经过这个点.

已知:平面 $\alpha\cap\beta=a$,$\beta\cap\gamma=b$,$\gamma\cap\alpha=c$,且 $a\cap b=O$.

求证:$O\in c$.



〔**分析**〕利用公理 2.即把 c 看作两平面的交线,O 是这两平面的公共点.

〔**证明**〕$\because O\in a, a\subset\alpha$,$\therefore O\in\alpha$.同理 $O\in\gamma$.$\therefore O$ 是 α、γ 的公共点。又 $c=\alpha\cap\gamma$.$\therefore O\in c$.

注意:利用公理 2 可证线共点和点共线.关键是找到以点所在的直线为交线的两个平面.

〔**例 5**〕如图,$\triangle ABC$ 和 $\triangle A_1B_1C_1$ 所在的平面是两个相交平面,并且 AA_1、BB_1、CC_1 相交于一点 O.求证:(1)AB 和 A_1B_1、BC 和 B_1C_1、CA 和 C_1A_1、分别在同一平面内;(2)如果 AB 和 A_1B_1、BC 和 B_1C_1、CA 和 C_1A_1 分别相交,那么交点在同一直线上.

〔**分析**〕(1)利用 OA、OB、OC 相交来证明;(2)利用公理 2.先证 P、Q、R 都是两相交平面 α、β 的公共点,l 是 α、β 的交线,再证 P、Q、R 在 l 上,进而得三点共线.

〔**证明**〕(1) $\because AA_1$、BB_1 是相交直线,$\therefore AA_1$、BB_1 确定一个平面 AOB.又 直线 AB 上的两点$\in$平面 AOB,$\therefore$ 直线 $AB\subset$平面 AOB.同理 $A_1B_1\subset$平面 AOB.$\therefore AB$ 和 A_1B_1 在同一