



普通高等教育“十三五”规划教材
电气工程、自动化专业规划教材

现代控制理论基础

王春侠 编著



中国工信出版集团



电子工业出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
<http://www.phei.com.cn>

普通高等教育“十三五”规划教材
电气工程、自动化专业规划教材
陕西理工学院教材建设经费资助出版

现代控制理论基础

王春侠 编著



電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京·BEIJING

内 容 简 介

“现代控制理论”是自动化领域的一门重要的专业理论基础课程。本书适应工程与应用类高等学校自动化及相近专业的需要,以加强基础、突出处理问题的思维方法、培养学生分析问题和解决问题的能力为原则,力图结合系统的物理概念,深入浅出地阐述现代控制理论的最基本内容。全书共6章,主要包括:状态空间分析法,系统的状态空间模型和各种标准型的建立,系统的运动分析,能控性与能观测性,结构分解和实现问题,李雅普诺夫稳定性理论,极点配置、状态观测器设计等。在介绍系统分析和控制系统设计方法的同时,给出相应的MATLAB函数,便于读者利用MATLAB软件来有效求解控制系统的计算和仿真问题,以加深对概念和方法的理解。最后介绍两个工程实例,以归纳和总结状态空间分析法和具体应用。本书提供配套电子课件、MATLAB程序代码等。

本书可供高等院校自动化、电气工程及其自动化、电子信息、测控及其他相关专业作为教材使用,也可供相关工程技术人员学习参考。

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。
版权所有,侵权必究。

图书在版编目(CIP)数据

现代控制理论基础 / 王春侠编著. —北京: 电子工业出版社, 2016.4

电气工程、自动化专业规划教材

ISBN 978-7-121-28064-1

I. ①现… II. ①王… III. ①现代控制理论—高等学校—教材 IV. ①O231

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第009842号

策划编辑: 王晓庆

责任编辑: 王晓庆

印 刷: 北京天宇星印刷厂

装 订: 北京天宇星印刷厂

出版发行: 电子工业出版社

北京市海淀区万寿路173信箱 邮编: 100036

开 本: 787×1092 1/16 印张: 15 字数: 384千字

版 次: 2016年4月第1版

印 次: 2016年4月第1次印刷

印 数: 3000册 定价: 35.00元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题, 请向购买书店调换。若书店售缺, 请与本社发行部联系, 联系及邮购电话: (010)88254888, 88258888。

质量投诉请发邮件至 zltts@phei.com.cn, 盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

本书咨询联系方式: (010)88254113, wangxq@phei.com.cn。

前 言

随着科学技术的迅速发展,现代控制理论在经典控制理论的基础上得以建立和发展,在工业控制领域及其他领域,如航空航天、核技术、生物工程等新兴领域中发挥着越来越重要的作用。因此,自20世纪60年代以来,国内外的许多高等学校都把“现代控制理论(基础)”列为自动化或相关专业的专业理论基础课程。

现代控制理论是以状态空间理论为核心,对动态系统进行分析 and 研究的。它不但可以处理单变量线性定常系统,还可以处理多变量、时变、非线性系统。因此,涉及的数学知识多,公式推导繁杂,不易掌握。自然,不同层次或不同侧重面的院校和专业,对现代控制理论教学内容的要求是不尽相同的,目前已有的现代控制理论教材还无法满足各类不同要求。本书着重适应工程与应用类自动化专业或相近专业的教学及有关技术人员自学所需,作者根据多年的教学实践,力求尽量避免过多的数学推导和深奥的数学知识,并结合控制系统的物理含义和实例,深入浅出地讲述有关状态空间的理论和分析方法,使读者能在有限的学时内,掌握现代控制理论的最基本知识。

全书共分6章。内容安排如下:绪论部分介绍现代控制理论的发展及与经典控制理论的区别;第1章研究状态空间分析法、控制系统的状态空间模型和各种标准型,用机理方法建立对象的状态空间模型,阐述控制系统传递函数模型和状态空间模型之间的关系和相互转换;第2章基于状态空间模型分析系统的运动特性;第3章介绍系统的能控性和能观测性的概念和判断方法,以及系统结构分解和实现问题;第4章研究系统的稳定性,介绍李雅普诺夫稳定性方法;第5章研究控制系统的设计问题,介绍极点配置方法,提出状态反馈控制器和状态观测器设计方法;第6章介绍两个工程实例,以归纳和总结状态空间分析法和具体应用。

在介绍系统分析和控制系统设计方法的同时,给出了相应的MATLAB函数,通过例子给出MATLAB函数的应用,便于读者加深对控制系统分析和设计方法的理解。每章后面的习题旨在检验读者对内容的掌握,特别强调了对书中所介绍的基本概念、方法和主要结果的理解。

本书在编写过程中,参考和吸收了国内兄弟院校和近几年出版的国外教材的部分内容,选材上考虑了近几年国内外教材的变化趋势。并得到陕西理工学院教务处、电气工程学院等单位及有关同志的鼓励及支持。在此谨致衷心的感谢!

本书提供配套的电子课件、MATLAB程序代码等,请登录华信教育资源网(<http://www.hxedu.com.cn>)注册下载,也可联系本书编辑(wangxq@phei.com.cn)索取。

限于编者的水平,特别是编写时间仓促,书中可能存在错误和不妥之处,恳请广大读者和同行提出宝贵意见。

作 者

2016年3月

目 录

绪论	1
0.1 经典控制理论	1
0.2 现代控制理论	2
0.3 本书的内容和特点	3
第 1 章 线性系统的状态空间模型	4
1.1 状态空间分析法	4
1.1.1 例子	4
1.1.2 状态变量和状态向量	6
1.1.3 状态空间和状态空间模型	6
1.2 状态空间模型的建立	10
1.2.1 由系统机理建立状态空间模型	10
1.2.2 由系统框图求状态空间模型	13
1.3 由外部模型化为内部模型及其标准型	15
1.3.1 传递函数中没有零点时的标准 I 型和标准 II 型实现	16
1.3.2 传递函数有零点时的标准 I 型和标准 II 型实现	19
1.3.3 约当标准型	26
1.4 由状态空间方程求传递函数阵	31
1.4.1 传递函数阵的定义	32
1.4.2 由状态空间模型求传递函数阵	32
1.5 离散时间系统的状态空间模型	35
1.5.1 状态空间方程	35
1.5.2 状态结构图	37
1.6 状态向量的线性变换	38
1.6.1 状态向量的线性变换	38
1.6.2 系统特征值的不变性	39
1.6.3 化系统矩阵 A 为标准型	42
1.7 系统模型的 MATLAB 表示及其相互转换	54
1.7.1 系统模型间的转换	54
1.7.2 系统的非奇异线性变换与状态空间标准型	57
习题	60
第 2 章 线性系统的运动分析	62
2.1 状态方程的齐次解 (自由解)	62
2.2 状态转移矩阵	64
2.3 线性系统的运动分析	73
2.3.1 线性系统的运动规律	73

2.3.2	特定输入下线性系统的状态响应	75
2.4	连续系统的时间离散化	78
2.4.1	问题的提出	78
2.4.2	三点基本假设	78
2.4.3	线性定常连续系统状态空间方程的离散化	79
2.4.4	近似离散化	81
2.5	线性定常离散系统的运动分析	82
2.5.1	线性定常离散系统齐次状态方程的解	82
2.5.2	状态转移矩阵	82
2.5.3	线性定常离散系统状态方程的解	84
2.6	MATLAB 在线性系统的运动分析中的应用	88
2.6.1	计算系统的状态转移矩阵	88
2.6.2	求解状态方程	89
	习题	92
第 3 章	线性系统的能控性与能观测性	95
3.1	线性连续系统的能控性	95
3.1.1	状态能控性的含义	95
3.1.2	状态能控性的定义	97
3.1.3	状态能控性判据	97
3.1.4	线性定常连续系统的输出能控性	102
3.2	线性连续系统的能观测性	103
3.2.1	状态能观测性的含义	103
3.2.2	状态能观测性的定义	104
3.2.3	线性定常连续系统的状态能观测性判别	105
3.3	线性离散系统的能控性与能观测性	109
3.3.1	线性定常离散系统的状态能控性与能达性	109
3.3.2	线性定常离散系统的状态能观测性	112
3.3.3	离散化线性定常系统的状态能控性和能观测性	114
3.4	能控性与能观测性的对偶关系	115
3.5	能控标准型与能观测标准型	117
3.5.1	系统的能控标准型	117
3.5.2	单变量系统的能观测标准型	122
3.6	线性定常系统的结构分解	124
3.6.1	能控性结构分解	125
3.6.2	能观测性结构分解	128
3.6.3	系统状态的标准分解	129
3.7	传递函数矩阵的实现问题	133
3.7.1	SISO 系统的实现	133
3.7.2	MIMO 系统的实现	137

3.8	MATLAB 在线性系统的能控性与能观测性分析中的应用	143
	习题	150
第 4 章	控制系统的稳定性分析	153
4.1	李雅普诺夫稳定性的基本概念	153
4.1.1	平衡状态	153
4.1.2	李雅普诺夫稳定性定义	154
4.2	李雅普诺夫判定稳定性的方法	156
4.2.1	李雅普诺夫第一方法	156
4.2.2	李雅普诺夫第二方法	159
4.3	李雅普诺夫第二方法在线性系统分析中的应用	167
4.3.1	线性定常连续系统稳定性分析	167
4.3.2	线性定常离散系统的稳定性分析	170
4.4	线性定常系统的稳定性分析	173
4.5	MATLAB 在控制系统的稳定性分析中的应用	176
	习题	178
第 5 章	线性定常系统的综合	180
5.1	反馈控制结构	180
5.2	极点配置	182
5.2.1	采用状态反馈配置极点	182
5.2.2	具有输入变换器和串联补偿器的状态反馈极点配置	187
5.2.3	跟踪控制器设计	189
5.2.4	输出反馈极点配置	193
5.3	状态重构与状态观测器的设计	194
5.3.1	状态重构原理	194
5.3.2	全维状态观测器的设计	196
5.3.3	降维状态观测器的设计	198
5.4	带观测器状态反馈系统的综合	204
5.4.1	系统的结构与数学模型	204
5.4.2	闭环系统的基本特性	205
5.5	MATLAB 在线性系统的综合中的应用	208
	习题	209
第 6 章	状态空间分析法在工程中的应用	211
6.1	单倒立摆控制系统的状态空间设计	211
6.2	大型桥式吊车行车控制系统的状态空间设计	216
6.2.1	调节对象——桥式吊车(行车)状态空间方程的建立	216
6.2.2	行车系统的性能分析	220
6.2.3	利用极点配置法设计全状态反馈调节器	222
6.2.4	全维状态观测器设计	225
	参考文献	230

绪 论

在工程和科学技术的发展过程中,自动控制始终担负着重要的角色。在航空航天和国防工业中,自动控制在飞机的自动驾驶系统、宇宙飞船系统和导弹制导系统中发挥着特别重要的作用。在现代制造业和工业生产过程中,自动控制同样起着无法替代的作用,例如,对数控机床的控制,对工业过程中流量、压力、温度的控制等都离不开自动控制技术。此外,在机器人控制、城市交通控制、网络拥塞控制等方面,自动控制技术也都发挥着重要作用。自动控制技术的应用也已扩充到非工程系统,如生物系统、生物医学系统、社会经济系统等。随着自动控制技术在越来越多的领域中得到应用,自动控制不仅把人类从繁重的体力与部分脑力劳动中解放出来,而且可以完成只靠人类自身无法完成的许多精密、复杂的工作。在许多危险及特殊的环境中,更是少不了自动化装置。

自动控制理论经过长期的发展,已逐渐形成了一些完整的理论。根据其发展过程,自动控制理论可分为经典控制理论和现代控制理论两大部分。发展于 20 世纪 50 年代之前、以传递函数模型描述系统的自动控制理论,称为经典控制理论,而发展于 20 世纪 50 年代末 60 年代初、以状态空间模型描述系统的自动控制理论,称为现代控制理论。

0.1 经典控制理论

自动控制的某些思想可以追溯到久远的古代,但直到 18 世纪英国人瓦特(J. Watt)为控制蒸汽机速度而设计的离心调节器,才可以说是自动控制领域中的第一项重大成果,由此拉开了经典控制理论发展的序幕。不过,瓦特发明的这一装置容易振荡,直到 1868 年,英国人麦克斯韦(J. C. Maxwell)发表了《论调速器》,对蒸汽机调速系统的动态特性进行了分析,指出控制系统的品质可用微分方程来描述及系统的稳定性可用特征方程根的位置来判断,从而解决了蒸汽机调速系统中出现的剧烈振荡问题,并总结出了简单的系统稳定性代数判据。第一次世界大战爆发后,军事工业的需要促进了自动控制理论的发展。1922 年,美国的米罗斯基(N. Minorsky)研制出船舶操纵自动控制器,并给出了控制系统的稳定性分析。1932 年,美籍瑞典科学家奈奎斯特(H. Nyquist)提出了一种利用系统频率特性图确定系统稳定性的简便方法。到了第二次世界大战,由于设计和建造飞机自动驾驶仪、雷达跟踪系统、火炮瞄准系统等军事装备的需要,自动控制理论更是取得了长足的进步。1945 年,美国的伯德(H. W. Bode)发表了关于控制系统频域设计方法的经典著作《网络分析和反馈放大器设计》。1948 年,美国的伊万斯(W. R. Evans)提出了根轨迹法,进一步充实了经典控制理论。同年,美国的维纳(N. Wiener)发表了名著《控制论》,标志着经典控制理论的形成。

奈奎斯特图、伯德的频域法和伊万斯的根轨迹法使得不用求解微分方程,就能分析高阶系统的稳定性、动态品质和稳态性能,为分析和设计控制系统提供了工程上实用有力的工具,从而使得经典控制理论在反馈控制系统中的应用得到迅速增长。

面对经典控制理论所取得的迅猛发展,人们产生了一种更高的希望,以期这些原理和方法能用来处理更复杂的系统。特别是当时所掌握的反馈系统理论知识,可以在短期内促进对

诸如生物控制机理和神经系统那样高度复杂系统的理解，同时在工业社会中为复杂的经济和社会过程提供更有效的控制方法。然而，经典控制理论仍存在诸多的缺陷和局限性，妨碍它直接用于更为复杂系统的分析和控制。

第一，经典控制理论只限于研究线性时不变系统。尽管有大量的研究工作试图克服这种局限性，如对于某些典型的非线性及时变反馈系统已找到了奈奎斯特判据的广义形式，但经典控制理论仍难以处理一般的非线性或时变系统。

第二，经典控制理论限于所谓的“标量”或单回路反馈系统，即单输入单输出系统。然而，实际中的大量工程系统都是具有动态耦合的多输入多输出系统。尽管人们将经典控制理论中的传递函数推广到传递函数矩阵以处理多输入多输出系统，但由于这些方法都是基于系统的输入/输出描述，它们在本质上忽略了系统结构的内在性质。因此，用经典控制理论设计这类系统，难以取得令人满意的效果。

第三，经典控制理论采用试探法设计系统，根据经验选用合理的、简单的、工程上易于实现的控制器，然后检验系统的所有品质指标是否都能满足。若不满足，则给出如何来修正控制系统的建议以改善系统品质指标，直至找到满意的结果为止。虽然这种设计方法具有实用性强等优点，但往往依赖于设计人员的经验，而不能从理论上给出最佳的、系统化的设计方案。

0.2 现代控制理论

现代科学技术的迅速发展，特别是空间技术、导弹制导、数控技术、核能技术等的发展，使得这些系统的结构更加复杂，它们往往是动态耦合的多输入多输出、非线性及时变的系统。同时，对控制系统性能的要求也在不断提高，很多情况下要求系统的某种性能是最优的，而且对环境的变化要有一定的适应能力等。这些新的控制对象和控制要求是经典控制理论无法处理和满足的。

科学技术的发展不仅对控制理论提出了挑战，同时也为新理论的形成创造了条件。在 20 世纪 50 年代蓬勃兴起的航空航天技术的推动和飞速发展的计算机技术的支持下，控制理论在 1960 年前后有了重大的突破和创新。1956 年，美国的贝尔曼 (R. I. Bellman) 发表了《动态规划理论在控制过程中的应用》，提出了寻求最优控制的动态规划法。同年，前苏联的庞特里亚金 (L. S. Pontryagin) 发表了《最优过程的数学理论》，提出了极大值原理，使得最优控制理论得到极大的发展。1960 年，美籍匈牙利人卡尔曼 (R. E. Kalman) 系统地引入状态空间法分析系统，提出了能控性、能观测性的概念和新的滤波理论。而“现代控制理论”这一名称正是在 1960 年卡尔曼的文章发表后出现的。这些重要的进展和成果构成了现代控制理论的发展起点和基础。

这一时期中，在现代控制理论的推动下，世界上出现了许多惊人的科技成就：1957 年，前苏联相继成功发射洲际弹道火箭和世界上第一颗人造地球卫星；1962 年，美国研制出工业机器人产品，同年，前苏联连续发射两艘“东方”号飞船，首次在太空实现编队飞行；1966 年，前苏联发射“月球 9 号”探测器，首次在月球表面成功软着陆；1969 年，美国“阿波罗 11 号”把宇航员阿姆斯特朗 (N. A. Armstrong) 送上月球，中国中远程战略导弹发射成功等。

现代控制理论在系统分析与设计上利用了现代数学作为工具，由此而引起的许多分析与设计步骤涉及大量计算，同时代的数字计算机的发展为实现这些计算提供了可能。可以说，现代控制理论与控制技术是和计算机平行发展的。

现代控制理论在本质上是时域法, 基于状态空间模型在时域中对系统进行分析和设计。由于采用了状态方程描述系统, 因此原则上可以分析多输入多输出、非线性时变系统。基于状态空间模型来对系统进行分析, 主要借助于计算机解出状态方程, 根据状态解可以对系统性能做出评估。由于无须经过任何变换, 在时域中直接求解和分析, 控制的要求和性能指标就变得非常直观。在系统的设计方法上, 可以在严密的理论基础上, 推导出满足一定性能指标的最优控制系统。因此, 在经典控制理论中存在的困难和局限, 在现代控制理论中可以迎刃而解。

现代控制理论是在经典控制理论的基础上发展起来的, 虽然两者在数学工具、理论基础和研究方法上有着本质区别, 但在对动态系统进行分析时, 两种理论可以互相补充, 相辅相成, 而不是互相排斥。特别是在对线性系统的研究中, 越来越多的经典控制理论中行之有效的方法已渗透到现代控制理论中, 如零、极点对系统性能影响的分析和极点配置等, 从而大大丰富了现代控制理论的研究内容。

0.3 本书的内容和特点

本书介绍现代控制理论中的一些基本概念和方法, 主要涉及线性系统的状态空间模型和基于状态空间模型的系统分析与设计, 包括系统的运动分析、能控性、能观测性、稳定性、极点配置、观测器设计等基本内容。

本书具有以下特点。

1. 全书的叙述由浅入深, 注重理论联系实际。
2. 叙述过程中特别强调“为什么要研究这个问题”、“如何来解决这个问题”。同时在具体问题的解决过程中, 避免过多烦琐的数学公式和推导, 而是采用从简单到复杂, 从特殊到一般的处理思想, 从一些特殊的、简单的例子入手导出问题的解, 进而推广到一般情况。在传授知识的同时, 努力培养学生分析问题和解决问题的能力。
3. 在介绍系统分析和设计算法的同时, 给出了相关的 MATLAB 函数, 便于学生应用 MATLAB 软件解决控制系统的分析和设计问题, 通过仿真直观了解分析结果和设计效果, 有助于加深对现代控制理论中一些基本概念和方法的理解。
4. 每章后的习题旨在让读者加深了解所讨论的问题、基本概念、解决方法、相关性质等, 特别需要把握的是问题的提出和解决的思路, 以逐步提高分析问题和解决问题的能力。
5. 本书叙述详尽, 在文字上尽可能做到通俗易懂, 便于自学。

第1章 线性系统的状态空间模型

在经典控制理论中,是用高阶常微分方程或传递函数来描述一个线性定常系统的,它们反映系统输出响应与输入的关系,也称为外部模型。外部模型一般只能处理单输入单输出系统,并且不能反映存在于系统内部的中间变量。现代控制理论引入了状态和状态空间的概念,用由状态变量构成的一阶微分方程组来描述系统,揭示了系统的内部特征,也称为内部模型。内部模型可以处理多输入多输出系统,而且可以方便地处理初始条件。因此,作为现代控制理论对控制系统进行分析和综合的前提,必须首先建立控制系统在状态空间中的数学模型,即控制系统的状态空间模型。

1.1 状态空间分析法

1.1.1 例子

通过以下两个例子说明引入状态空间分析法建立数学模型的过程及状态空间的一些基本概念。

1. 机械系统举例

【例 1-1】 弹簧、质量块、阻尼器组成的系统如图 1-1 所示,质量块的质量为 m , 弹簧的弹性系数为 k , 它产生的弹性力与质量块的位移 $y(t)$ 成正比, 阻尼器的阻尼系数为 b , 它产生的阻尼力与质量块的速度成正比, 当外力 $u(t)$ 作用于质量块时, 质量块将产生运动。设 $u(t)$ 是输入变量, $y(t)$ 是输出变量, 试建立该系统的数学模型。

解: (1) 用经典法建立高阶微分方程

根据牛顿定理 (惯性力+阻尼力+弹性力=外力), 有

$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + b \frac{dy(t)}{dt} + ky(t) = u(t) \quad (1-1)$$

式 (1-1) 描述了弹簧-质量块-阻尼器系统的输入变量与输出变量之间的关系。

(2) 用现代法建立一阶微分方程组

设变量 $x_1(t) = y(t), \quad x_2(t) = \frac{dy}{dt}$

则式 (1-1) 改写为

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{m}u - \frac{b}{m}\dot{y} - \frac{k}{m}y = \frac{1}{m}u - \frac{b}{m}x_2 - \frac{k}{m}x_1$$

注意到

$$\dot{x}_1 = x_2$$

一阶微分方程组为

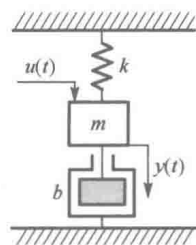


图 1-1 弹簧-质量块-阻尼器系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{m}u - \frac{b}{m}\dot{y} - \frac{k}{m}y = \frac{1}{m}u - \frac{b}{m}x_2 - \frac{k}{m}x_1 \end{cases}$$

同时

$$y = x_1$$

写成矩阵-向量形式

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u \\ y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

2. 电网络系统举例

【例 1-2】如图 1-2 所示的 RLC 电网络，输入电压为 $u(t)$ ，输出电压为 $y(t)$ ，回路电流为 $i(t)$ 。设 $u(t)$ 是输入变量， $y(t)$ 是输出变量，试建立该系统的数学模型。

解：(1) 用经典法建立高阶微分方程

根据电路基本定律，有

$$Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + y(t) = u(t) \quad (1-2)$$

$$i(t) = C \frac{dy(t)}{dt}$$

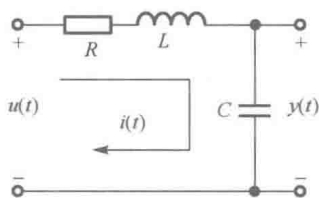


图 1-2 RLC 电路

消去变量 $i(t)$ ，可得该电路的微分方程：

$$LC \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + RC \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = u(t) \quad (1-3)$$

式 (1-3) 表达了 RLC 电路的输入量与输出量之间的关系。

(2) 用现代法建立一阶微分方程组

$$\text{设变量} \quad x_1(t) = i(t), \quad x_2(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt = y(t)$$

则式 (1-2) 改写为

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{L}u - \frac{R}{L}i - \frac{1}{L}y = \frac{1}{L}u - \frac{R}{L}x_1 - \frac{1}{L}x_2$$

注意到

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{C}x_1$$

一阶微分方程组为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{1}{L}u - \frac{R}{L}i - \frac{1}{L}y = \frac{1}{L}u - \frac{R}{L}x_1 - \frac{1}{L}x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{C}x_1 \end{cases}$$

同时

$$y = x_2$$

写成矩阵-向量形式

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

通过以上两个例子,可得如下几个概念:

- (1) 高阶微分方程通过选择合适的变量,可变为—阶微分方程组;
- (2) —阶微分方程组的个数等于变量的个数,即等于高阶微分方程的阶数;
- (3) 变量的选择不是唯一的,选择的变量不同,得到的一阶微分方程组也不同。

1.1.2 状态变量和状态向量

状态是指系统的运动状态。状态变量是完全表征系统运动状态的且个数最少的一组变量。一个用 n 阶微分方程描述的系统,就有 n 个独立变量,当这 n 个独立变量的时间响应都求得时,系统的运动状态也就被揭示无遗了。因此可以说, n 阶系统的状态变量就是该系统的 n 个独立变量。关于状态变量可以进一步说明如下。

(1) 同一个系统,状态变量的选取不是唯一的。

(2) 状态变量应该是相互独立的,且其个数应等于微分方程的阶数,即等于系统中独立储能元件的个数。

(3) 状态变量在初始时刻 t_0 的值,就是系统的初始状态,即系统的 n 个独立初始条件。

如果 n 个状态变量 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ 用向量的形式表示,则为

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad \text{或} \quad \mathbf{X}^T(t) = [x_1(t) \quad x_2(t) \quad \cdots \quad x_n(t)]$$

则 $\mathbf{X}(t)$ 被称为状态向量。

1.1.3 状态空间和状态空间模型

1. 状态空间

以状态变量 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ 为坐标轴构成的 n 维空间称为状态空间。状态空间中的每个点都代表了状态变量的唯一的、特定的一组值。换言之,在某一时刻 t_1 的状态向量 $\mathbf{X}(t_1)$ 在状态空间中是一个点,而初始时刻 t_0 的状态 $\mathbf{X}(t_0)$ 是状态空间的一个初始点。随着时间的推移, $t > t_0$, $\mathbf{X}(t)$ 将在状态空间中描绘出一条轨迹,称为状态轨迹。它表征系统运动的行为或形态。

2. 状态空间方程

描述系统状态变量和输入变量之间关系的一阶微分方程组称为状态方程。描述系统输出变量和状态变量之间变换关系的代数方程组称为输出方程。系统的状态方程和输出方程合称为状态空间方程、状态空间表达式或系统动态方程。

对于有 r 个输入、 m 个输出的 n 阶连续系统，可以用如下的 n 个一阶微分方程和 m 个代数方程来描述其动态特性。

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= f_i(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) & i=1, 2, \dots, n \\ y_j &= g_j(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) & j=1, 2, \dots, m\end{aligned}$$

用矩阵-向量形式表示为

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{f}(\mathbf{X}, \mathbf{U}, t) \quad (1-4)$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{U}, t) \quad (1-5)$$

式中， $\mathbf{f}$ 、 $\mathbf{g}$ 是向量函数； f_i 、 g_i 是 $\mathbf{f}$ 、 $\mathbf{g}$ 的元素。

$$\begin{aligned}\mathbf{X}(t) &= \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \text{——} n \text{ 维状态向量;} & \mathbf{U}(t) &= \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_r(t) \end{bmatrix} \text{——} r \text{ 维输入或控制向量;} \\ \mathbf{Y}(t) &= \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{bmatrix} \text{——} m \text{ 维输出向量。}\end{aligned}$$

如果系统是线性的，则 $\mathbf{f}$ 、 $\mathbf{g}$ 为线性函数。对于线性时变系统，其状态空间方程为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{U}(t) \\ \mathbf{Y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{U}(t) \end{cases} \quad (1-6)$$

$$(1-7)$$

式中

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(t) &= \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \text{——系统矩阵，为 } n \times n \text{ 方阵;} \\ \mathbf{B}(t) &= \begin{bmatrix} b_{11}(t) & b_{12}(t) & \cdots & b_{1r}(t) \\ b_{21}(t) & b_{22}(t) & \cdots & b_{2r}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1}(t) & b_{n2}(t) & \cdots & b_{nr}(t) \end{bmatrix} \text{——输入矩阵或控制矩阵，为 } n \times r \text{ 阵;} \\ \mathbf{C}(t) &= \begin{bmatrix} c_{11}(t) & c_{12}(t) & \cdots & c_{1n}(t) \\ c_{21}(t) & c_{22}(t) & \cdots & c_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1}(t) & c_{m2}(t) & \cdots & c_{mn}(t) \end{bmatrix} \text{——输出矩阵，为 } m \times n \text{ 阵;} \end{aligned}$$

$$D(t) = \begin{bmatrix} d_{11}(t) & d_{12}(t) & \cdots & d_{1r}(t) \\ d_{21}(t) & d_{22}(t) & \cdots & d_{2r}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{m1}(t) & d_{m2}(t) & \cdots & d_{mr}(t) \end{bmatrix} \quad \text{——直接传递矩阵, 为 } m \times r \text{ 阵。}$$

它们的元素有些或全部是时间 t 的函数。

对于线性定常系统, 其状态空间方程为

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + BU(t) \\ Y(t) = CX(t) + DU(t) \end{cases} \quad (1-8)$$

$$(1-9)$$

式中

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nr} \end{bmatrix};$$

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}; \quad D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1r} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \cdots & d_{mr} \end{bmatrix}。$$

它们的元素全部是常数。

对于如例 1-1 和例 1-2 所示的单输入单输出线性定常系统, 状态空间方程的一般形式为

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + bu \\ y = cX + du \end{cases} \quad (1-10)$$

$$(1-11)$$

式中

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad \text{——输入矩阵或控制矩阵为 } n \times 1 \text{ 列阵;}$$

$$c = [c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_n] \quad \text{——输出矩阵为 } 1 \times n \text{ 行阵;}$$

d ——直接传递系数。

在状态空间方程中, 上述的式 (1-4)、式 (1-6)、式 (1-8) 和式 (1-10) 为状态方程, 式 (1-5)、式 (1-7)、式 (1-9) 和式 (1-11) 为输出方程。

本书主要论述线性定常系统。

3. 状态结构图

线性系统的状态空间模型还可以用状态结构图的方式表达, 以形象地说明系统的输入、输出和状态之间的信息传递关系。在采用计算机仿真时, 它是一个强有力的工具。

状态结构图由积分器、比例器和比较器等三种基本元件组成。状态结构图可按如下步骤绘制。

(1) 在适当位置画出所有积分器。积分器的个数等于状态变量数, 每个积分器的输出表示相应的某个状态变量。

(2) 根据状态方程和输出方程, 画出相应的比较器和比例器。

(3) 用箭头将这些元件连接起来。

【例 1-3】画出一阶微分方程 $\dot{x} = ax + bu$ 的状态结构图, 如图 1-3 所示。

【例 1-4】已知三阶单变量系统的状态空间方程为

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\dot{x}_3 = -a_0x_1 - a_1x_2 - a_2x_3 + bu$$

$$y = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + du$$

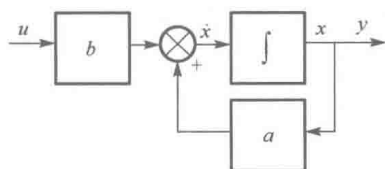


图 1-3 一阶微分方程的状态结构图

其状态结构图如图 1-4 所示。

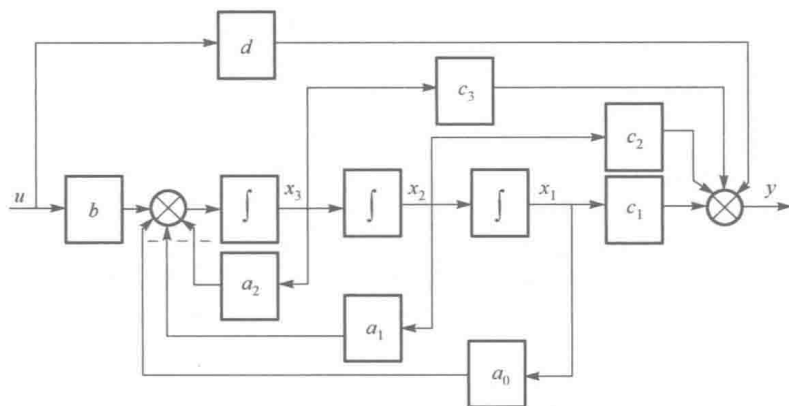


图 1-4 三阶单变量系统的状态结构图

【例 1-5】已知二输入二输出二阶系统

$$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_{11}u_1 + b_{12}u_2$$

$$\dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_{21}u_1 + b_{22}u_2$$

$$y_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2$$

$$y_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2$$

它的状态结构图如图 1-5 所示。

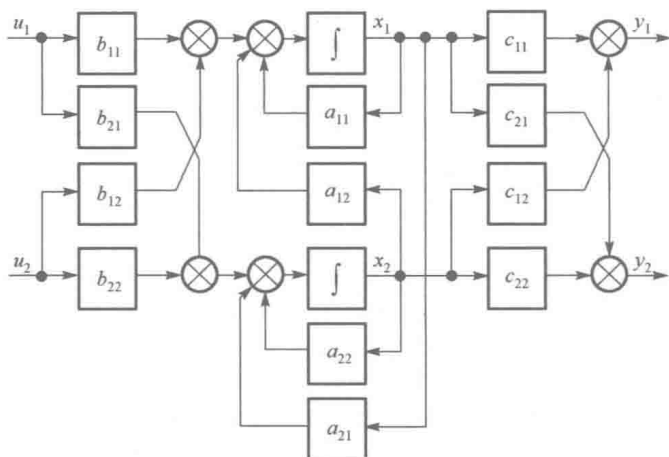


图 1-5 二输入二输出二阶系统的状态结构图

1.2 状态空间模型的建立

1.2.1 由系统机理建立状态空间模型

1.1 节讨论了由电感、电容两个储能元件和电阻构成的电网络系统，以及由弹簧、阻尼器两个储能元件和质量块组成的机械系统的状态空间模型的建立。实际工程中，许多物理、化学系统都具有存储和传递信息（或能量）的能力，都可视为动态系统，如化工热力学系统的物质中热量的存储与传递、化工反应系统中反应物质的物料传递和平衡等。

根据这些系统的物理和化学变化的机理，由描述这些变化的物理或化学的定理、定律和规律等，可得系统各物理量之间应满足的动静态关系式。因此，在选择合适的状态变量后，可建立系统的状态空间模型。下面通过实例讨论如何建立机电系统、流体力学系统、化工反应系统的热量和物料平衡系统的状态空间模型。

1. 机电系统的状态空间模型

【例 1-6】 图 1-6 所示为直流他励电动机的示意图。图中 R_a 、 L_a 分别为电枢回路的总电阻和总电感， J 为电机轴上的惯量，负载为摩擦系数为 f 的阻尼摩擦。设电动机励磁电流 i_f 为常数，铁芯工作在非饱和区。试建立以电枢输入电压 $u_a(t)$ 为输入变量，转轴角位移 $\theta(t)$ 为输出变量的状态空间模型。

解： 根据电枢回路电压平衡方程，有

$$R_a i_a(t) + L_a \frac{di_a(t)}{dt} + e_a(t) = u_a(t)$$

根据转轴力矩平衡方程，有

$$M(t) = J \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + f \frac{d\theta(t)}{dt}$$

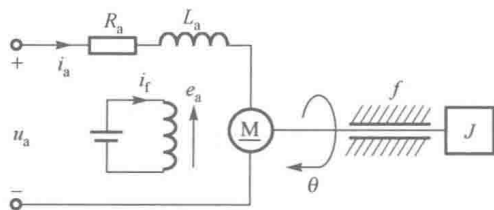


图 1-6 直流电动机示意图

式中， $i_a(t)$ 为电动机电枢回路电流， $e_a(t)$ 为电动机电枢反电动势， $M(t)$ 为电动机驱动转矩。且

$$e_a(t) = K_e \frac{d\theta(t)}{dt}$$

$$M(t) = K_m i_a(t)$$

式中， K_e 和 K_m 分别为电动机的电枢电势常数和转矩常数（含恒定的磁通量）。因此，电枢回路电压平衡方程和转轴力矩平衡方程可记为

$$\begin{cases} R_a i_a(t) + L_a \frac{di_a(t)}{dt} + K_e \frac{d\theta(t)}{dt} = u_a(t) \\ K_m i_a(t) = J \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + f \frac{d\theta(t)}{dt} \end{cases}$$

对于上述微分方程组，若已知电枢电流 $i_a(t)$ 、角位移 $\theta(t)$ 及其导数 $d\theta(t)/dt$ 在初始时刻 t_0 的值，以及电枢电压 $u_a(t)$ ，则方程组有唯一解。因此，可以选择状态变量为

$$x_1(t) = i_a(t), \quad x_2(t) = \theta(t), \quad x_3(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}$$