全国硕士研究生入学考试辅导丛书

2011

樊博头考研系列

全国硕士研究生入学考试

历年真题精解

数学三

全国硕士研究生入学考试命题研究组 编

- 原命题组成员、阅卷组组长亲自编写，融合北京大学、清华大学权威讯息
- 深度梳理命题轨迹，解析详尽、规避误区，培养最佳解题思路
- 以题型训练为核心，全面展现题型变换
- 凸显历年试题精华，明示命题原则与规律，把握命题脉搏
- 注重实战，讲求技巧，切实提升综合应试能力

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

全国硕士研究生入学考试辅导丛书

全国硕士研究生入学考试历年真题精解

数　学　三

全国硕士研究生入学考试命题研究组　编

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

全国硕士研究生入学考试历年真题精解. 数学. 3/全国硕士研究生入学考试命题研究组编. —2 版. —杭州：浙江大学出版社，2009.3 (2010.3 重印)
(全国硕士研究生入学考试辅导丛书)
ISBN 978-7-308-06679-2

Ⅰ. 全… Ⅱ. 全… Ⅲ. 高等数学—研究生—入学考试—解题 Ⅳ. G~~643~~-44 O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 043166 号

全国硕士研究生入学考试历年真题精解·数学三

全国硕士研究生入学考试命题研究组 编

丛书策划 樊晓燕 杨晓鸣
责任编辑 邹小宁
出版发行 浙江大学出版社
(杭州市天目山路 148 号 邮政编码 310007)
(网址：http://www.zjupress.com)
排　　版 杭州大漠照排印刷有限公司
印　　刷 富阳市育才印刷有限公司
开　　本 889mm×1194mm 1/16
印　　张 14.5
字　　数 381 千
版 印 次 2010 年 3 月第 2 版 2010 年 3 月第 2 次印刷
书　　号 ISBN 978-7-308-06679-2
定　　价 31.00 元

浙江大学出版社发行部邮购电话(0571)88925591

前　言

全国报考2010年硕士研究生入学考试人数达到了140万人，较2009年增加13%。参加人数的增多，录入率的有限，彰显了竞争的激烈程度。为了指导参加2011年全国硕士研究生入学统一考试的广大考生数学考试的复习，把握历年命题脉搏，了解出题动态，我们组织部分多年来参加考试大纲制定和修订工作及参加考前辅导的教授、专家，在第一版的基础上精心修订了这本《2011年全国硕士研究生入学考试历年真题精解　数学三》，以供广大考生复习使用。

为了准备新的研究生入学考试，我们应当认真分析研究历届试题，从中发现规律，归纳出每部分内容的重点、难点及常考的题型，进一步把握考题的特点以及命题的思路和规律。历年的考题是标准的复习题。自从实行研究生入学考试以来，也时有真题重现的现象发生，如2006年数学一的第一大题第(3)小题与1993年数学一第四大题，2003年数学一的第一大题第(3)小题与1993年数学一的第一大题第(3)小题，2003年数学一的第一大题第(5)小题与1996年数学三的第一大题第(5)小题，2003年数学一的第三大题与2001年数学三的第六大题，2003年数学四的第四大题与2001年数学一的第五大题，都是基本雷同的。英语与政治也有真题重复出现的情况，2003年英语第36题与1996年英语第43题，2003年英语第37题与1995年英语第34题，2003年英语第26题与1995年英语第21题，2003年英语第29题与1996年英语第42题，2003年英语第24题与1997年英语第42题，1996年英语第46题与1995年英语第6题，等等，都是非常相似的。2003年政治理论第21题与2000年文科政治第31题和1993年理科政治第6题，2003年政治理论第31题与1993年理科政治第32题，2003年政治理论第36题与1995年文科政治第28题和1994年文科政治第29题，等等，都是相同或非常相似的。所以，对往年真题的研究是最有帮助的。循着命题人的思路，我们就可以把握考试的脉搏，明确考试的重点和难点所在。

本书汇集了1990年至2010年历届全国硕士研究生入学统一考试数学试题，这些试题是考生了解、分析和研究全国硕士研究生入学考试最直接、最宝贵的第一手资料，其中每一道试题，既反映了考研数学考试大纲对考生数学知识、能力和水平的要求，又蕴涵着命题的指导思想、基本原则和趋势。因此，对照考试大纲分析、研究这些试题，考生不仅可以了解考研以来数学考试的全貌，而且可以方便地了解有关试题和信息，从中发现规律，归纳出各部分内容的重点、难点，以及常考的题型，进一步把握考试的特点及命题的思路和规律，从而从容应考，轻取高分。

本书在对历年考研数学试题逐题解析的基础上，每题都给出了注释，不仅对每题所考的知识点和难点进行了分析，而且对试题的类型、每一种类型试题的解法进行了归纳总结，使考生能够举一反三，触类旁通。

本书对客观题尤其给予了高度的重视，总结了客观题的解题方法和技巧，同时对很多客观题给出了多种巧妙的解法，目的是让读者在解决客观题这个问题上有新的突破。

本书是考研应试者的良师益友，也是各类院校的学生自学数学、提高数学水平以及教师进行教学辅导的一本极有价值的参考书。

由于时间仓促，书中疏漏之处在所难免，诚请专家和读者指正。

编者　于清华园

目　录

第一部分　高等数学

第二部分　线性代数

第三部分　概率论与数理统计

第一部分　高等数学

第一章　函数、极限、连续

考试要求

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示法，会建立应用问题的函数关系.

2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.

3. 理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念.

4. 掌握基本初等函数的性质及其图形，了解初等函数的概念.

5. 了解数列极限和函数极限(包括左极限与右极限)的概念.

6. 了解极限的性质与极限存在的两个准则，掌握极限的四则运算法则，掌握利用两个重要极限求极限的方法.

7. 理解无穷小量的概念和基本性质，掌握无穷小量的比较方法. 了解无穷大量的概念及其与无穷小量的关系.

8. 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续)，会判别函数间断点的类型.

9. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性，理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理)，并会应用这些性质.

考点 1.1　函数的概念及其特性

1. (1990 年试题) 设函数 $f(x)=x\cdot\tan x\cdot e^{\sin x}$，则 $f(x)$ 是　　(　　)

A. 偶函数　　B. 无界函数　　C. 周期函数　　D. 单调函数

【考点提示】 函数的有界性.

【解题分析】 令 $x_n=2n\pi+\frac{\pi}{4}(n=1,2,3,\cdots)$，则

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\left(2n\pi+\frac{\pi}{4}\right)e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\infty,$$

因此 $f(x)$ 是无界函数，故应选 B.

2. (2004 年试题) 函数 $f(x)=\frac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列哪个区间内有界?　　(　　)

A. $(-1,0)$　　B. $(0,1)$　　C. $(1,2)$　　D. $(2,3)$

【考点提示】 函数的极限、有界性.

【解题分析】 本题考查函数极限与有界性的关系：当 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$ 时，则 $f(x)$ 在 x_0 的邻域内无界. 由题设，

$$f(-1^+)=\lim_{x\to -1^+}\frac{-x\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=-\frac{\sin 3}{18}, \tag{1}$$

$$f(0^-)=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=-\frac{\sin 2}{4}, \tag{2}$$

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=\infty, \tag{3}$$

$$\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=\infty, \tag{4}$$

由(1)～(4)式可知，$(0,1)$，$(1,2)$，$(2,3)$ 内 $f(x)$ 都是无界的，所以选 A.

考点 1.2　极限概念与性质

1.（2000 年试题）设对任意的 x，总有 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$　　（　　）

A. 存在且等于零　　　　B. 存在但不一定为零

C. 一定不存在　　　　D. 不一定存在

【考点提示】 函数的极限.

【解题分析】 本题可采取举反例的方法一一排除干扰项.

令 $\varphi(x)=x-\dfrac{1}{x^2+1}$，$f(x)=x$，$g(x)=x+\dfrac{1}{x^2+1}$，则 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$，

$$\lim_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x^2+1}=0,$$

但 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 不存在，从而可排除 A，B；

又令

$$\varphi(x)=\arctan(|x|-1),\ f(x)=\arctan|x|,\ g(x)=\arctan(|x|+1),$$

则
$$\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x),\ \lim_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0,\ \lim_{x\to\infty}f(x)=\frac{\pi}{2},$$

因此 C 也可排除.

综上，$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 可能存在也可能不存在，所以选 D.

2.（2007 年试题）极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+x^2+1}{2^x+x^3}(\sin x+\cos x)=$ ________.

【考点提示】 求极限.

【解题分析】 因 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{2^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2}{2^x\ln 2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6}{2^x(\ln 2)^3}=0$，且 $\sin x$ 和 $\cos x$ 均为有界函数，故

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+x^2+1}{2^x+x^3}(\sin x+\cos x)=0.$$

考点 1.3　函数极限的计算

1. (1991 年试题) 下列各式中正确的是　　(　　)

A. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=1$　　B. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$

C. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x=-\mathrm{e}$　　D. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$

【考点提示】 未定式极限类型.

【解题分析】 因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to 0^+}\mathrm{e}^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)-\ln x}{\frac{1}{x}}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{1+x}-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}}=\mathrm{e}^0=1$.
故应选 A.

2. (1991 年试题) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$,其中 n 是给定的自然数.

【考点提示】 指数函数、洛必达法则.

【解题分析】 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx}}{n}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx})-\ln n}{x}}$,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx})-\ln n}{x}&=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x+2\mathrm{e}^{2x}+\cdots+n\mathrm{e}^{nx}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx}}\\&=\frac{1+2+\cdots+n}{n}\\&=\frac{n+1}{2}.\end{aligned}$$

于是原式 $=\mathrm{e}^{\frac{n+1}{2}}$.

3. (1993 年试题) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5}{5x+3}\sin\dfrac{2}{x}=$ ________.

【考点提示】 重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

【解题分析】 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5}{5x+3}\sin\dfrac{2}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5}{5x^2+3x}\cdot\dfrac{\sin\frac{2}{x}}{\frac{2}{x}}\cdot 2=\dfrac{3}{5}\cdot 2=\dfrac{6}{5}$.

故应填 $\dfrac{6}{5}$.

4. (2004 年试题)求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{\cos^2 x}{x^2}\right)$.

【考点提示】 洛必达法则、等价无穷小.

【解题分析】 由题设,

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-(\sin x\cos x)^2}{x^2\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\frac{1}{4}(\sin 2x)^2}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{2x-\sin 2x\cos 2x}{4x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x-\frac{1}{2}\sin 4x}{4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{2-\frac{4}{2}\cos 4x}{12x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{6x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2(\sin 2x)^2}{6x^2}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{4x^2}{x^2}=\frac{4}{3}.$$

5.（2005 年试题）极限 $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{2x}{x^2+1}=$ ________.

【考点提示】 求极限.

【解题分析】 令 $y=\dfrac{2x}{x^2+1}$，因为 $\lim\limits_{x\to\infty}y=0$，所以

$$\text{原式}=\lim_{x\to\infty}x\sin y=\lim_{x\to\infty}xy\lim_{x\to\infty}\frac{\sin y}{y}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x^2+1}\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=2\cdot 1=2.$$

6.（2005 年试题）求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x}{1-e^{-x}}-\dfrac{1}{x}\right)$.

【考点提示】 洛必达法则求极限.

【解题分析】 由洛必达法则有

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}}{1}=1,$$

从而

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{1-e^{-x}}=1,$$

所以

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{x(1+x)-1+e^{-x}}{x(1-e^{-x})}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x(1-e^{-x})}+\lim_{x\to 0}\frac{x-1+e^{-x}}{x(1-e^{-x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{1-e^{-x}}+\lim_{x\to 0}\frac{x-1+e^{-x}}{x^2}\lim_{x\to 0}\frac{x}{1-e^{-x}}=1+\lim_{x\to 0}\frac{x-1+e^{-x}}{x^2}$$

$$=1+\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{-x}}{2x}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}.$$

7.（2008 年试题）求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\ln\dfrac{\sin x}{x}$.

【考点提示】 求函数的极限.

【解题分析】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\ln\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\ln\left(1+\dfrac{\sin x-x}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x}{x^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=-\frac{1}{6}.$$

8.（2009 年试题）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e-e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=$ ________.

【考点提示】 函数的极限.

【解题分析】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e-e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=e\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{\cos x-1}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}$

$$= e\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\frac{1}{3}x^2} = e\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{3}x^2} = \frac{3}{2}e.$$

9.（2010 年试题）求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^{\frac{1}{x}}-1)^{\frac{1}{\ln x}}$.

【考点提示】 函数的极限.

【解题分析】 原式$=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)}{\ln x}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)}{\ln x}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x^{\frac{1}{x}}-1}\cdot x^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1-\ln x}{x^2}}{\frac{1}{x}}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-\ln x}{-x\left(x^{-\frac{1}{x}}-1\right)}}$

$$= e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-\ln x}{-x\left(e^{\frac{\ln x}{x}}-1\right)}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-\ln x}{-x\left(-\frac{\ln x}{x}\right)}}$$（利用 $x\to 0$ 时，$e^x-1\sim x$）

$$= e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-\ln x}{\ln x}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\ln x}-1\right)} = e^{-1}.$$

10.（2010 年试题）（Ⅰ）比较 $\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n dt$ 与 $\int_0^1|\ln t|t^n dt(n=1,2,\cdots)$ 的大小，说明理由；

（Ⅱ）设 $u_n=\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n dt(n=1,2,\cdots)$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$.

【考点提示】 函数的极限.

【解题分析】 （Ⅰ）因为当 $0<x<1$ 时，$0<\ln(1+x)<x<1$.

所以当 $0<t<1$ 时，$0<\ln(1+t)<t<1$，故 $[\ln(1+t)]^n<t^n$，进而 $|\ln t|[\ln(1+t)]^n<|\ln t|t^n$. 根据定积分的性质可知，$\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n dt<\int_0^1|\ln t|t^n dt$.

（Ⅱ）因为 $\int_0^1|\ln t|t^n dt=-\int_0^1\ln t\cdot t^n dt=-\frac{1}{n+1}\int_0^1\ln t d(t^{n+1})=\frac{1}{n+1}\int_0^1 t^n dt=\frac{1}{(n+1)^2}$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1|\ln t|t^n dt=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)^2}=0$.

由（Ⅰ）知，$0<u_n<\int_0^1|\ln t|t^n dt$，根据夹逼准则可得 $0\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}u_n\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1|\ln t|t^n dt=0$，由此可知，$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

考点 1.4　函数极限的逆问题

1.（2004 年试题）若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=5$，则 $a=$ ________，$b=$ ________.

【考点提示】 极限的逆问题.

【解题分析】 由题设，知 $\lim\limits_{x\to 0}(e^x-a)=0$，则 $a=1$，

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^x-1}(\cos x-b)=1-b=5,$$

则
$$b=-4.$$

2.（2010 年试题）若 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\left(\frac{1}{x}-a\right)e^x\right]=1$，则 a 等于　　（　　）

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

【考点提示】 极限的逆问题.

【解题分析】 因为$\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\left(\frac{1}{x}-a\right)e^x\right]=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1-e^x}{x}+ae^x\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-e^x}{x}+\lim\limits_{x\to 0}(ae^x)$

$$=\lim_{x\to 0}(-e^x)+a=a-1=1.$$

所以 $a=2$,即正确答案为C.

考点1.5　数列的极限

1. (1990年试题)极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}})=$ ________.

【考点提示】 先有理化再求极限.

【解题分析】
$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}})=\lim_{n\to\infty}\frac{n+3\sqrt{n}-(n-\sqrt{n})}{\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+3\sqrt{\frac{1}{n}}}+\sqrt{1-\sqrt{\frac{1}{n}}}}$$
$$=2.$$

故应填2.

2. (2002年试题)设常数 $a\neq\frac{1}{2}$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n=$ ________.

【考点提示】 数列的极限.

【解题分析】 由题设,

$$原式=\lim_{n\to\infty}n\ln\left[1+\frac{1}{n(1-2a)}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n(1-2a)}=\frac{1}{1-2a}.$$

3. (2006年试题)极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}=$ ________.

【考点提示】 数列的极限.

【解题分析】 令 $u_n=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}$,$n=1,2,3,\cdots$.

当 $n=2k(k\in\mathbf{N})$ 时,

$$u_n=\left(\frac{2k+1}{2k}\right)^1=1+\frac{1}{2k}=1+\frac{1}{n};$$

当 $n=2k-1(k\in\mathbf{N})$ 时,

$$u_n=\left(\frac{2k}{2k-1}\right)^{-1}=\frac{2k-1}{2k}=1-\frac{1}{2k}=1-\frac{1}{n+1}.$$

所以
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}=\lim_{n\to\infty}u_n=1.$$

考点 1.6　无穷小量、无穷大量的比较

1.（1992 年试题）当 $x\to 0$ 时，下列四个无穷小量中，哪一个是比其他三个更高阶的无穷小量？（　　）

A. x^2　　B. $1-\cos x$　　C. $\sqrt{1-x^2}-1$　　D. $x-\tan x$

【考点提示】 无穷小的比较.

【解题分析】 当 $x\to 0$ 时，$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$，$\sqrt{1-x^2}-1\sim-\frac{1}{2}x^2$. 即 $1-\cos x$，$\sqrt{1-x^2}-1$ 与 x^2 是同阶无穷小量，而
$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sec^2 x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sec x\cdot\tan x}{2}=0,$$
所以 $x-\tan x$ 是比 x^2 更高阶的无穷小量，故应选 D.

2.（2007 年试题）当 $x\to 0^+$ 时，与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是（　　）

A. $1-e^{\sqrt{x}}$　　B. $\ln(1+\sqrt{x})$　　C. $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$　　D. $1-\cos\sqrt{x}$

【考点提示】 等价无穷小.

【解题分析】 常用的等价无穷小（当 $x\to 0$ 时）有：$e^x-1\sim x$，$\ln(1+x)\sim x$，$\sqrt{1+x}\sim\frac{x}{2}$，$1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$，$\sin x\sim x$，…. A 选项 $1-e^{\sqrt{x}}\sim-\sqrt{x}$，B 选项 $\ln(1+\sqrt{x})\sim\sqrt{x}$，C 选项 $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1\sim\frac{\sqrt{x}}{2}$，D 选项 $1-\cos\sqrt{x}\sim\frac{x}{2}$，故应选 B.

3.（2009 年试题）当 $x\to 0$ 时，$f(x)=x-\sin ax$ 与 $g(x)=x^2\ln(1-bx)$ 等价无穷小，则（　　）

A. $a=1,b=-\frac{1}{6}$　　B. $a=1,b=\frac{1}{6}$

C. $a=-1,b=-\frac{1}{6}$　　D. $a=-1,b=\frac{1}{6}$

【考点提示】 等价无穷小的运用.

【解题分析】 $f(x)=x-\sin ax$ 与 $g(x)=x^2\ln(1-bx)$ 为等价无穷小，则有
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin ax}{x^2\ln(1-bx)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin ax}{x^2\cdot(-bx)}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to 0}\frac{1-a\cos ax}{-3bx^2}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to 0}\frac{a^2\sin ax}{-6bx}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{a^2\cdot ax}{-6bx}=\frac{a^3}{-6b}=1,$$
即有 $a^3=-6b$.

又 $\lim_{x\to 0}\frac{1-a\cos ax}{-3bx^2}$ 存在，则 $\lim_{x\to 0}(1-a\cos ax)=1-a=0$，即 $a=1$，代入上式可得 $b=-\frac{1}{6}$.

故正确答案为 A.

4.（2010 年试题）设 $f(x)=\ln^{10}x, g(x)=x, h(x)=e^{\frac{x}{10}}$，则当 x 充分大时有 （　　）

A. $g(x)<h(x)<f(x)$　　　　B. $h(x)<g(x)<f(x)$

C. $f(x)<g(x)<h(x)$　　　　D. $g(x)<f(x)<h(x)$

【考点提示】 无穷大的比较.

【解题分析】 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln^{10}x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{10\cdot\ln^{9}x\cdot\frac{1}{x}}{1}=10\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln^{9}x}{x}$

$$=10\cdot 9\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^{8}x}{x}=\cdots=10!\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0.$$

所以当 x 充分大时，$f(x)<g(x)$；

又
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{x}{10}}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{10}e^{\frac{x}{10}}}{1}=\frac{1}{10}\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{x}{10}}\to+\infty.$$

故当 x 充分大时，$h(x)>g(x)$.

综上可得，当 x 充分大时，$f(x)<g(x)<h(x)$，故正确答案为 C.

考点 1.7　函数的连续性及间断点的分类

1.（1990 年试题）设函数 $f(x)$ 有连续的导函数，$f(0)=0$ 且 $f'(0)=b$，若函数

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)+a\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ A, & x=0\end{cases}$$

在 $x=0$ 处连续，则常数 $A=$ ________.

【考点提示】 由函数连续的条件知，先求 $\lim\limits_{x\to0}F(x)$，然后令 $\lim\limits_{x\to0}F(x)=F(0)=A$ 即得.

【解题分析】 $F(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则有

$$\lim_{x\to0}F(x)=F(0),$$

从而
$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)+a\sin x}{x}=A,$$

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)+a\sin x}{x}\xlongequal{\text{“}\frac{0}{0}\text{”型}}\lim_{x\to0}[f'(x)+a\cos x]=f'(0)+a\cos0=b+a,$$

从而
$$A=a+b.$$

2.（1992 年试题）设函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\frac{\pi}{2}x}, & x\neq 1,\\ 1, & x=1,\end{cases}$$

问：函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处是否连续？若不连续，修改函数在 $x=1$ 处的定义使之连续.

【考点提示】 先求极限 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$，再由连续定义即可求解.

【解题分析】 因为

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\frac{\pi x}{2}}=\lim_{x\to1}\frac{-\frac{\sin(x-1)}{\cos(x-1)}}{-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{2}}$$

$$=\frac{2}{\pi}\lim_{x\to1}\frac{\tan(x-1)}{\cos\frac{\pi x}{2}}$$

$$=\frac{2}{\pi}\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{\cos^2(x-1)}}{-\sin\frac{\pi x}{2}\cdot\frac{\pi}{2}}=-\frac{4}{\pi^2}.$$

而 $f(1)=1$，故 $\lim\limits_{x\to1}f(x)\neq f(1)$，所以函数在 $x=1$ 处不连续.

若令 $f(1)=-\frac{4}{\pi^2}$，则函数在 $x=1$ 处连续 .

3. (1998 年试题)设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+x}{1+x^{2n}}$，讨论函数 $f(x)$ 的间断点，其结论为 (　　)

A. 不存在间断点　　B. 存在间断点 $x=1$

C. 存在间断点 $x=0$　　D. 存在间断点 $x=-1$

【考点提示】 极限、间断点.

【解题分析】 由已知 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+x}{1+x^{2n}}$，当 $x\leqslant-1$ 时，$f(x)=0$；

当 $-1<x<1$ 时，$f(x)=1+x$；当 $x=1$ 时，$f(x)=1$；当 $x>1$ 时，$f(x)=0$.

所以
$$f(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant-1,\\ 1+x, & -1<x<1,\\ 1, & x=1,\\ 0, & x>1,\end{cases}$$

不难确定在 $x=1$ 点处 $f(x)$ 间断，选 B.

4. (2003 年试题)设 $f(x)$ 为不恒等于零的奇函数，且 $f'(0)$ 存在，则函数 $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ (　　)

A. 在 $x=0$ 处左极限不存在　　B. 有跳跃间断点 $x=0$

C. 在 $x=0$ 处右极限不存在　　D. 有可去间断点 $x=0$

【考点提示】 极限、间断点.

【解题分析】 由题设，$f(-x)=-f(x)$，则有 $f(0)=0$，从而

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}g(x),$$

即 $g(x)$ 在 $x=0$ 处极限存在，但 $x=0$ 时 $g(x)$ 无定义，因此可补充定义 $g(0)=f'(0)$，则 $g(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

综上，$g(x)$ 有可去间断点 $x=0$，所以选 D.

5.（2003 年试题）设 $f(x)=\frac{1}{\pi x}+\frac{1}{\sin\pi x}-\frac{1}{\pi(1-x)}, x\in\left[\frac{1}{2},1\right)$，试补充定义 $f(1)$，使得 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上连续.

【考点提示】 函数的连续性、无穷小代换、洛必达法则.

【解题分析】 由题设，需补充 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的定义.

因为

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1^-}f(x)&=\frac{1}{\pi}+\lim_{x\to1^-}\left[\frac{1}{\sin\pi x}-\frac{1}{\pi(1-x)}\right]\\&=\frac{1}{\pi}+\lim_{x\to1^-}\frac{\pi(1-x)-\sin\pi x}{\pi(1-x)\sin\pi x},\end{aligned}$$

令 $y=1-x$，则当 $x\to1^-$ 时，$y\to0^+$，则

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1^-}f(x)&=\frac{1}{\pi}+\lim_{y\to0^+}\frac{\pi y-\sin\pi y}{\pi y\sin\pi y}=\frac{1}{\pi}+\lim_{y\to0^+}\frac{\pi y-\sin\pi y}{\pi^2y^2}\\&=\frac{1}{\pi}+\lim_{y\to0^+}\frac{\pi-\pi\cos\pi y}{2\pi^2y}=\frac{1}{\pi}+\lim_{y\to0^+}\frac{\pi^2\sin\pi y}{2\pi^2}\\&=\frac{1}{\pi}+0=\frac{1}{\pi},\end{aligned}$$

因此补充定义 $f(1)=\frac{1}{\pi}$，就使得 $f(x)=\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上连续.

6.（2004 年试题）设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，且

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=a,g(x)=\begin{cases}f\left(\frac{1}{x}\right), & x\neq0,\\0, & x=0,\end{cases}$$

则（　　）

A. $x=0$ 必是 $g(x)$ 的第一类间断点

B. $x=0$ 必是 $g(x)$ 的第二类间断点

C. $x=0$ 必是 $g(x)$ 的连续点

D. $g(x)$ 在点 $x=0$ 处的连续性与 a 的取值有关

【考点提示】 连续性、间断点.

【解题分析】 本题考查连续性及间断点的定义. 由题设，$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$，则 $\lim\limits_{x\to0}f\left(\frac{1}{x}\right)=a$. 如果 $a=0$，则 $g(x)$ 在 $x=0$ 连续；如果 $a\neq0$，则 $g(x)$ 在 $x=0$ 不连续且 $x=0$ 为第一类间断点. 所以选 D.

7.（2008 年试题）设函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上连续，则 $x=0$ 是函数 $g(x)=\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x}$ 的（　　）

A. 跳跃间断点　　B. 可去间断点　　C. 无穷间断点　　D. 振荡间断点

【考点提示】 函数的间断点.

【解题分析】 $\lim\limits_{x\to0}g(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x}=\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$，即函数 $g(x)$ 在 $x=0$ 处极