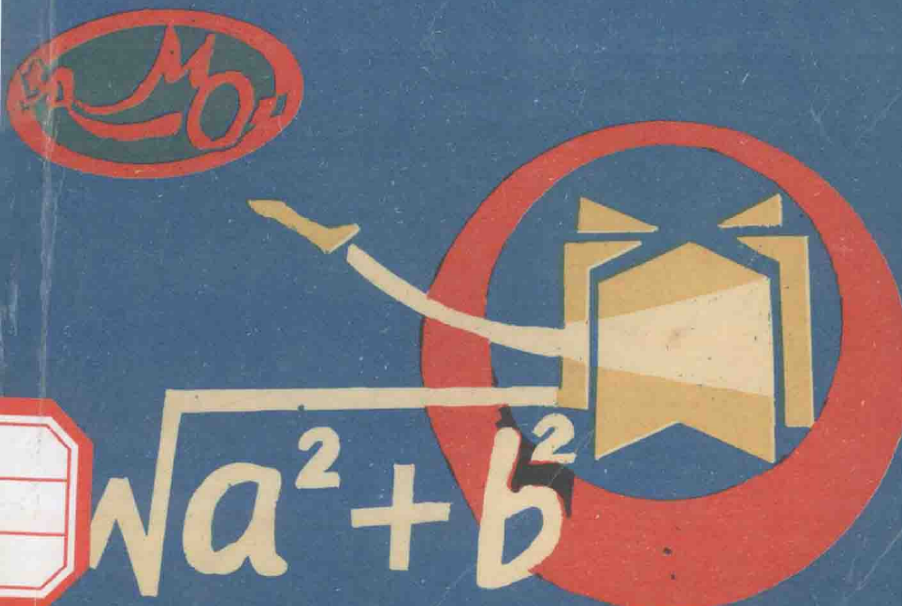
初中奥林匹克数学读本

（初二分册）

顾问　裘宗沪　　主编　魏有德



成都科技大学出版社

初中奥林匹克数学读本

初二分册

顾问　裘宗沪
主编　魏有德

成都科技大学出版社

（川）新登字015号

责任编辑：黄文龙
封面设计：刘智银

初中奥林匹克数学读本　初二分册
主编　魏有德

成都科技大学出版社出版发行
成都市盲哑学校印刷厂印刷
787×1092　1/32　10.625印张　240千字
1994年5月第一版　1994年5月第一次印刷
印数：1—8000册

ISBN7—5616—2190—6/O·138
定价：5.80元

初中奥林匹克数学读本

初二分册

顾问 裘宗沪　　　**主编** 魏有德

参加编写人员（以笔画为序）

文大珍　卢世国　田渊芸　伍庆舒　李开珂
李月培　李树山　李　强　向朝进　宋任民
沈方全　陈国民　陈守忠　陈朝文　杨国清
何良仆　张国庆　周先忱　郑国荣　赵来善
胡新仲　涂经佑　贾明铨　唐德全　唐玉林
梁晋旭　曾毓吉　黄填言　程长刚　萧钜波
萧殿城　鲁　宁　戴德昌　魏先和　魏文峰

修改　魏有德　李开珂　曾毓吉　宋任民
　　　陈守忠

校审　肖成勋

校对、制图　梁晋旭　向朝进　杜　斌

前　　言

为推动我省初中数学课外活动的开展，我曾先后组稿出版了两套初中数学奥林匹克辅导书，从返回的信息知还是比较受欢迎的。近几年我省数学普及工作蓬勃发展，我省的中学生在国内“冬令营”和国际数学奥林匹克中取得的突出成绩从一个侧面也说明了它所起的作用。

国家教委初中义务教学大纲的颁布、实施，中国数学会初中数学竞赛大纲的修改（简称“双纲”），为开展初中数学课外活动提出了新精神和新要求，因此有必要重新为初中学生提供一套适应新形势的教材，以便更好地推动我省初中数学课外活动的开展。我们编写这套书遵循了如下原则：

1. 不超“双纲”

这套教材严格控制在“双纲”的知识范围内，并以巩固、提高和补充课内所学知识为主，辅以竞赛知识的讲解。读者只要把课内所学的内容学好，就可以顺利地学习这本教材，不需补充其他知识。

2. 与课内严格同步

数学课外活动的开展必须与课内教学密切配合，才能既促进初中数学教学质量的提高，又使学生开阔视野，数学思想、方法得到培养。因此，我们这套教材严格与课内教学次序同步，无需超前补充其他知识和方法就可阅读。

3. 大众化、普及型、少而精

“以普及为主，在普及基础上提高”、“减少内容、降低难度”是我们中国数学会和省数学会搞初中数学普及工作的基本原则。这套教材删去了过去“辅导讲座”中许多竞赛大纲

不要求的内容，适当地降低难度和要求，真正体现教材的大众化、普及型。在我主持的省数学会初中数学奥林匹克班的试用中，反映是：老师好辅导，学生易于接受。

4. *多练悟要领*

做练习是学习的一个重要环节。它既能达到巩固所学知识，又能从中学到新知识、新方法和技巧，培养学生的独立思维能力。我们这套书几乎在每讲的后面都配有适量的 A、B 两组练习。在一般情况下，A 组以巩固、提高课内知识多些，是基本要求；B 组涉及竞赛题多些，属于较高要求，老师和学生可根据实际情况选用。书末配有较详解答供参考。

根据省数学会数学奥林匹克班试用此教材的实践经验，我建议：(1) 各数学奥林匹克学校（班）、课外活动小组在使用这套教材时，要先用点时间复习一下相关讲的课内基础知识，借以达到承前启后的作用，收到更好的效果；(2) 各分册所安排讲的次序不一定是“教学”次序，根据实际情况可先后调整，并只选讲其中一部分（包括一讲内的某些例子），其余留给学有余力的学生自学。

在编写这套教材过程中，曾多次得到我的同事好友中国数学会普及工作委员会主任裘宗沪、副主任杜锡录、副主任刘玉翘的赐教，在此我代表全体编者表示衷心地感谢！

感谢曾支持、帮助过我们的同仁们、朋友们！由于你们的无私奉献和通力合作才有今日四川普及工作的大好局面。在此致以崇高的敬意！

水平所限，编审中难免出现错误，恳请读者批评斧正！

魏有德

四川大学数学系（邮：610064） 一九九四年五月

目　录

二年级上期

第一讲　因式分解(一)

把一个整式化为几个整式的乘积形式，叫做因式分解，其过程叫做**分解因式**．其中，积中每一个整式叫做积的**因式**．由此可知，整式的因式分解过程实质上是整式乘法过程的逆过程．

本讲重点是复习和加深因式分解的四个基本方法：**提取公因式法、运用公式法、分组分解法**和**十字相乘法**，并侧重于它们的综合运用．因此，适当的分组、拆项、配方、添置辅助项就显得特别重要，其灵活性也就要求较高

例1　分解 $3x^3+5x^2-4x-4$ 为一次因式之积．

分析　三次多项式的分解方法很多，其中一个主要方法就是拆项、添置辅助项用分组分解法．拆配项的形式不同，就出现不同的解法．．

法1　原式 $=(3x^3-3x^2)+(8x^2-8x)+(4x-4)=\cdots=$

$=(x-1)(3x^2+8x+4)$

$=(x-1)(x+2)(3x+2)$.

法2　原式 $=(3x^3-3x)+(5x^2-5)-(x-1)=\cdots$

$=(x-1)[3x(x+1)+5(x+1)-1]=\cdots$

$=(x-1)(x+2)(3x+2)$.

法3　原式 $=(3x^3-3)+(5x^2-5)-(4x-4)=\cdots$

$=(x-1)[3(x^2+x+1)+5(x+1)-4]=\cdots$

$=(x-1)(x+2)(3x+2)$.

说明　分解三次多项式还有一个常用的方法叫做因式定

理法(又叫求根法). 我们将在下讲中介绍.

折项、添项、分组在其他高次多项式分解中也常用. 例如:

例 2 分解因式:(1) x^4-6x^2-7x-6

(2) x^5+x^4+1.

解 (1)原式 $=(x^4-x)+(-6x^2-6x-6)$

$=x(x-1)(x^2+x+1)-6(x^2+x+1)=\cdots$

$=(x^2+x+1)(x+2)(x-3)$.

(2)原式 $=x^5+x^4+x^3-x^3+x^2-x^2+x-x+1$

$=(x^5+x^4+x^3)-(x^3+x^2+x)+(x^2+x+1)$

$=x^3(x^2+x+1)-x(x^2+x+1)+(x^2+x+1)$

$=(x^2+x+1)(x^3-x+1)$.

折项、配方是因式分解常用的办法. 下面举两个例子.

例 3 分解因式:(1) $x^4+x^2y^2+y^4$;(2) x^4-23x^2+1.

解 (1)原式 $=(x^2+y^2)^2-(xy)^2$

$=(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$.

(2)原式 $=(x^4+2x^2+1)-25x^2=(x^2+1)^2-(5x)^2$

$=(x^2+5x+1)(x^2-5x+1)$.

例 4 分解因式 $x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2y^2z^2-2x^2z^2$.

分析 原式与 $(x^2-y^2-z^2)^2$ 的展开式仅差一项,故可将 $-2y^2z^2$ 拆为 $2y^2z^2$ 与 $(-4y^2z^2)$ 两项,然后配方再分解.

解 原式 $=(x^4+y^4+z^4-2x^2y^2+2y^2z^2-2x^2z^2)-4y^2z^2$

$=(x^2-y^2-z^2)^2-(2yz)^2$

$=(x^2-y^2-z^2+2yz)(x^2-y^2-z^2-2yz)$

$=[x^2-(y-z)^2][x^2-(y+z)^2]$

$=(x+y-z)(x-y+z)(x+y+z)(x-y-z)$

灵活地运用公式是解决因式分解的重要方法，特别是在用其他方法的分解过程中，公式的灵活运用更显作用重要．

例 5 分解因式 $x^2+9y^2+4z^2-6xy+4xz-12yz$.

解法 1 直接利用公式

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca.$$

$$\begin{aligned}原式&=x^2+(-3y)^2+(2z)^2+2\cdot x(-3y)+2\cdot x\cdot 2z\\&\quad+2(-3y)(2z)\\&=(x-3y+2z)^2.\end{aligned}$$

用此公式时，首先判断出 x、z 必同号，且 y 与 x、z 异号，进而知应有 $a=x,b=-3y,c=2z$.

解法 2 把原式视为 x(或 y 或 z)的二次三项式(其他字母当常数)来分解因式，有

$$\begin{aligned}原式&=x^2-2(3y-2z)x+(3y-2z)^2\\&=[x-(3y-2z)]^2=(x-3y+2z)^2.\end{aligned}$$

或
$$\begin{aligned}原式&=9y^2-6y(x+2z)+(x+2z)^2\\&=[3y-(x+2z)]^2=(x-3y+2z)^2.\end{aligned}$$

同理，对 z 一样，略．

例 6 分解因式 $(1+ab)^2-(a+b)^2+2(b+1)(a^2-1)$.

解法 1 先用平方差公式，然后再分解．

$$\begin{aligned}原式&=(1+ab+a+b)(1+ab-a-b)+2(b+1)(a^2-1)\\&=[b(a+1)+(a+1)][b(a-1)-(a-1)]+\\&\quad 2(b+1)(a^2-1)\\&=(a+1)(b+1)\cdot(a-1)(b-1)+2(b+1)(a-1)\\&\quad\cdot(a+1)\\&=(a+1)(a-1)(b+1)[(b-1)+2]\\&=(a+1)(a-1)(b+1)^2.\end{aligned}$$

解法 2 先展开头两项、合并后再分解．

$$\text{原式}=1+a^2b^2-a^2-b^2+2(b+1)(a^2-1)$$
$$=b^2(a^2-1)-(a^2-1)+2(b+1)(a^2-1)$$
$$=(a^2-1)(b^2+2b+1)$$
$$=(a+1)(a-1)(b+1)^2$$

例 7 分解因式 $(x^2+y^2)^3+(z^2-x^2)^3-(y^2+z^2)^3$.

分析 原式中 (x^2+y^2) 与 (z^2-x^2) 的和等于 (y^2+z^2)，可考虑用立方和（变形）公式 $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$ 变形后再分解．

解
$$\text{原式}=(x^2+y^2+z^2-x^2)^3-3(x^2+y^2)(z^2-x^2)\cdot(x^2+y^2+z^2-x^2)-(y^2+z^2)^3$$
$$=-3(x^2+y^2)(z^2-x^2)(y^2+z^2)$$
$$=-3(x^2+y^2)(z+x)(z-x)(y^2+z^2).$$

十字相乘法在数学中应用十分广泛．对它稍加推广可解决二元二次多项式的因式分解．

例 8 分解因式 $x^2-2xy-3y^2+2x+10y-8$.

解 $\because x^2-2xy-3y^2=(x-3y)(x+y)$，$-8=4\times(-2)$.

所以，
$$\text{原式}=(x-3y)(x+y)+2x+10y-8$$
$$=(x-3y+4)(x+y-2).$$

$$\begin{array}{ccc} x-3y & & 4 \\ & \times & \\ x+y & & -2 \end{array}$$

最后，我们举两个因式分解的简单应用，借以说明因式分解在解实际问题中作用．

例 9 三个质数之积恰好等于它们的和的 5 倍，求这三个质数．

解 设这三个质数为 a、b、c，则有 $abc=5(a+b+c)$. 由整除和质数的性质知，a、b、c 中至少有一个等于 5. 由对称性，

不妨令 $a=5$，于是 $bc=5+b+c$，即 $bc-b-c=5$，$bc-b-c+1=6$，$\therefore (b-1)(c-1)=6$.

$\because 6=1\times6$，2×3，则有（由对称关系，不妨设 $b>c$）

$\begin{cases}b-1=6\\c-1=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}b-1=3\\c-1=2\end{cases}$，解得 $\begin{cases}b=7\\c=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}b=4\\c=3\end{cases}$（舍去）

$\therefore$ 所求的三个质数为 2、5、7.

例 10 直角三角形有一条直角边的长是 11，另两条边的长也是正整数，求其周长.

解 设另一条直角边长为 x，斜边长为 y，则有 $11^2+x^2=y^2$，即 $y^2-x^2=11^2$，$(y+x)(y-x)=121$.

$\because 121=1\times121$，11×11，而 $0<x<y$，故有 $y+x=121$，$y-x=1$. 联立解得 $y=61$，$x=60$. 故所求的周长等于 132.

在结束本讲之前，我们还要指出一点：进行因式分解，要有下棋中“下一步看三步”的精神，特别是在运用拆项、添项、分组时，不能只图第一步能做局部分解，而必须预见下一步，乃至再下一步直至最后分解的可能性．要达到这样的高水平，只有在掌握了四种基本方法的基础上，多观察、多思考、多实践、多练．

练习一

（A 组）

1. 把下列各式分解因式：

(1) $(ax+by)^2+(ay-bx)^2+c^2x^2+c^2y^2$；

(2) $(ab+1)(a+1)(b+1)+ab$；

(3) $x^2(a+b)^2-2xy(a^2-b^2)+y^2(a-b)^2$；

(4) $(a^2-3a+2)x^2+(2a^2-4a+1)xy+(a^2-a)y^2$；　(5) x^6-y^6；

(6) $a^2b^3-abc^2d+ab^2cd-c^3d^2$；　(7) $3xy+y^2+3x-4y-5$；

(8) $(a+b)^2+(a+c)^2-(c+d)^2-(b+d)^2$;

(9) $x^2-y^2+2x+6y-8$; (10) x^8+x^4+1.

2. 设 $a=123456783, b=123456785, c=123456789$,试计算 $A=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$ 的值.

3. a 为正整数,问 a^4-3a^2+9 是质数还是合数?为什么?

4. 求方程 $x^2-y^2=13$ 的整数解.

(B 组)

1. 把下列各式因式分解:

(1) $a^2-3b^2-3c^2+10bc-2ca-2ab$;

(2) $(a-b)x^2+2ax+a+b$;

(3) $(2x^2-3x+1)^2-22x^2+33x-1$;

(4) $(x^2+xy+y^2)(x^2+xy+2y^2)-12y^4$;

(5) $(ay+bx)^3+(ax+by)^3-(a^3+b^3)(x^3+y^3)$.

2. 求方程 $x^3+7y=y^3+7x$ 的正整数解组 (x,y),其中,$x\neq y$.

3. a 为自然数,且 $a^3+2a^2-12a+15$ 表示质数,求这个质数.

4. 已知多项式 x^3+bx^2+cx+d 的系数都是整数,若 $bd+cd$ 是奇数,则这个多项式不能分解为两个整系数多项式的乘积.

5. $n(n>1)$ 个乒乓球员参加单打循环赛,每两人之间都只进行一场比赛,设在循环赛过程中,第一人胜 a_1 场,负 b_1 场;第二人胜 a_2 场,负 b_2 场;…;第 n 人胜 a_n 场,负 b_n 场.

求证:$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=b_1^2+b_2^2+\cdots b_n^2$.

第二讲 因式分解(二)

上一讲我们重点复习了因式分解四个基本方法的综合应用．这一讲我们再补充介绍其他常用方法．

一、 换元分解法

在做上一讲的 B 组练习题 1(3) 中，我们是这样解的：$(2x^2-3x+1)^2-22x^2+33x-1=(2x^2-3x+1)^2-11(2x^2-3x+1)+10=[(2x^2-3x+1)-10][(2x^2-3x+1)-1]=(2x^2-3x-9)(2x^2-3x)$，最后再把这两个二次式分解，得出最终结果 $x(x-3)(2x-3)(2x+3)$．这个解法中，我们把“$2x^2-3x+1$”看成一个整体，然后用十字相乘法得到因式分解．

把式中某些部份看成一个整体，并用一个新字母(称作新变元)代替，使式子简代后再(对新变元的整式)因式分解，最后还原为原字母的式子．这种方法叫做**换元分解法**．

例如，令 $y=2x^2-3x+1$，则 $(2x^2-3x+1)^2-22x^2+33x-1=y^2-11y+10=(y-10)(y-1)=(2x^2-3x-9)(2x^2-3x)=x(x-3)(2x-3)(2x+3)$.

例 1 因式分解 $(x^2+3x-3)(x^2+3x+4)-8$.

分析 原式为 x 的四次多项式，若将其展开再分解，一定较繁．从该式的特征(两括号内 x 的一、二次项相同，成比例也可以)，可令 $x^2+3x=y$，将其换元后变为 y 的二次多项式，就易分解(化难为易!).

解 令 $x^2+3x=y$，则

原式$=(y-3)(y+4)-8=y^2+y-20$

$=(y-4)(y+5)=(x^2+3x-4)(x^2+3x+5)$

$=(x-1)(x+4)(x^2+3x+5)$.

说明 还可令 $x^2+3x-3=z$ 或 $x^2+3x+4=t$ 等等，只要换元中把“x^2+3x”包含进去都可以．

例 2 分解因式：$(x^2+x+1)(x^2-6x+1)+12x^2$.

解 令 $x^2+1=y$，则

原式$=(y+x)(y-6x)+12x^2$

$=y^2-5xy+6x^2=(y-2x)(y-3x)$

$=(x^2+1-2x)(x^2+1-3x)=(x-1)^2(x^2-3x+1)$

例 3 分解因式$(2x-7)(2x+5)(x^2-9)-91$.

分析 可将此式第一项的三个因式分解为四个一次因式的乘积，然后将这四个因式重新组合成两个一、二次项系数相同(或成比例)的二次三项式，转化为例 1 的情形再分解，

解 原式$=[(2x-7)(x+3)][(2x+5)(x-3)]-91$

$=(2x^2-x-21)(2x^2-x-15)-91$.

令 $2x^2-x=y$，则

原式$=(y-21)(y-15)-91=y^2-36y+224$

$=(y-8)(y-28)=(2x^2-x-8)(2x^2-x-28)$

$=(2x^2-x-8)(x-4)(2x+7)$.

例 4 分解因式：$(x+1)^4+(x+3)^4-272$.

分析 为了使展开括号之后可以消项，应设 $x+1=y-a$，$x+3=y+a$，将两式两边分别相减得 $a=1$，代入上面两式中的任何一个得：$x=y-2$，于是可令 $x+2=y$.

解 令 $x+2=y$，得

原式$=(y-1)^4+(y+1)^4-272=2(y^4+6y^2+1)-272$

$=2(y^4+6y^2-135)=2(y^2-9)(y^2+15)$
$=2(y+3)(y-3)(y^2+15)$
$=2(x+5)(x-1)(x^2+4x+19).$

二、 求根分解法

我们知道，多项式 $f(x)$除以 $x-a$ 的余数为零，那么，$f(x)$就能被 $x-a$ 整除，即 $x-a$ 就是 $f(x)$的一个因式，反之，亦成立，因此，由余数定理易得如下著名定理．

因式定理 如果 $f(a)=0$，那么，$(x-a)$是 $f(x)$的一个因式，反之，如果$(x-a)$是 $f(x)$的一个因式，那么，$f(a)=0$. 这里 $f(a)$表 $x=a$ 时，$f(x)$的值

这个定理给出了求多项式的一次因式的一个办法——**求根分解法**，即只要 a 是 $f(x)$的一个根①，则$(x-a)$就是 $f(x)$的一个因式．如何求 $f(x)=0$ 的根呢？当 $f(x)$的次数大于 2 时，求 $f(x)=0$ 的根也不是一件容易的事(中学教材里只讲求一元一次、二次方程的根)．下面介绍一个定理可帮助我们部分解决这个问题．

定理 如果整系数多项式

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

有因式 $px-q$，即有有理数根$\frac{q}{p}$(p、q 是互质整数)，那么 p 一定是首项系数 a_n 的约数，q 一定是常数项 a_0 的约数．

这个定理不但为我们找这类方程的根提供了理论依据，而且大大缩小了找根的范围．例如，要求 $f(x)=x^4+2x^3-$

---

① [注]$f(x)$的根即指方程 $f(x)=0$ 的根．