



文登教育集团课堂用书
聚骄公司全心专业设计



FOCUS
聚焦图书

考研数学 复习指南

陈文灯 黄先开 曹显兵
编 著

陈文灯讲数学的七个强调：

强调基础 强调系统
强调题型 强调训练
强调速度 强调方法
强调技巧

2008版
(理工类)

世界图书出版公司



FOCUS
聚焦图书

聚骄公司全心
文灯教育集团

考研数学

复习指南 (理工类)

陈文灯 黄先开 曹显兵 编著

2008版

世界图书出版公司

图书在版编目(CIP)数据

数学复习指南. 理工类 / 陈文灯等编著. —13 版. —北京:世界图书出版公司北京公司,2004. 1
ISBN 978-7-5062-5211-9

I. 数... II. 陈... III. 高等数学-研究生-入学考试-解题 IV. 013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 014886 号

数学复习指南(理工类) (2008 版)

主 编: 陈文灯 黄先开 曹显兵

副 主 编: 施明存 殷先军

责任编辑: 高玉兵

封面设计: 耕者工作室

出 版: 世界图书出版公司北京公司

发 行: 世界图书出版公司北京公司

(北京朝内大街 137 号 电话: 8861708 邮编: 100089)

销 售: 各地新华书店

印 刷: 北京忠信诚胶印厂印刷

开 本: 787 × 1092 毫米 1/16

印 张: 38

字 数: 608 千字

版 次: 2007 年 2 月第 13 版 2007 年 2 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5062-5211-9/O · 332

定价: 49.80 元

服务热线: 010 - 88861708

前言

数学统考从1987年至今经历了21个年头。其间“数学考试大纲”虽然变化不大，但每年的试题均有所创新，不过仔细分析还是万变不离其宗。只要把本书归纳总结的题型、方法和技巧掌握住，研读我们精心设置的典型例题，即可达到触类旁通、融会贯通的境界。

我们要提醒读者的是，数学想要考高分，一定要了解考研数学究竟要考什么？综观一二十年试题可知，主要考查如下四方面：

- (1) 基础（基本概念、基本理论、基本方法）；
- (2) 解综合题的能力；
- (3) 分析问题和解决问题的能力，即解应用题的能力；
- (4) 解题的熟练程度（通过大题量、大计算量进行考核）。

真正了解了要考查的东西，复习时才能有的放矢。关于数学基础、数学题型与考试目标之间的逻辑关系，我写了四句话，供大家参考、体会：**数学基础树的根，技巧演练靠题型；勤学苦练强磨砺，功到高分自然成。**

本书特点：

(1) 对大纲要求的重要概念、公式、定理进行剖析，增强读者对这些内容的理解和记忆，避免犯概念性错误、错用公式和定理的错误。

(2) 归纳、总结了二十多个思维定式，无疑这对读者解题会有所帮助，但我们的目的是引导读者去归纳总结，养成习惯。这样应试的时候就能很快找到解题突破口。

(3) 用“举题型讲方法”的格式代替传统的“讲方法套题型”的做法，使读者应试时，思路畅通、有的放矢，许多书的跟进也说明这种做法的确很有效。

(4) 广泛采用表格法，使读者便于对照、比较，对要点一目了然。

(5) 介绍许多新的快速解题方法和技巧。例如，中值定理证明中的辅助函数的做法、不定积分中的凑微分法、不等式证明尤其是定积分不等式的证明方法等，都是我们教学研究的成果，对读者应试能起到“事半功倍”的效果。

(6) 创新设计出很多好的例题，以期提高读者识别题型变异的能力。

历经十二载的再版和修订，本书已成为广大考研读者的良师诤友，同时也有很多教师同行用该书做教学参考。为了精益求精，恳请朋友们拨冗指正。



2007年元月

目 录

第一篇 高等数学

篇要 高数的四种思维定势

..... 1

第一章 函数·极限·连续..... 7

第1节 函数..... 7

知识点精讲..... 7

题型归纳及思路提示..... 10

第2节 极限及连续性..... 15

知识点精讲..... 15

题型归纳及思路提示..... 20

精选习题一..... 36

参考答案..... 37

第二章 导数与微分..... 39

第1节 导数与微分..... 39

知识点精讲..... 39

题型归纳及思路提示..... 42

第2节 高阶导数..... 49

知识点精讲..... 49

题型归纳及思路提示..... 50

精选习题二..... 52

参考答案..... 53

第三章 一元函数积分学..... 54

第1节 不定积分..... 54

知识点精讲..... 54

题型归纳及思路提示..... 65

精选习题三(1)..... 74

参考答案..... 75

第2节 定积分..... 77

知识点精讲..... 77

题型归纳及思路提示..... 83

精选习题三(2)..... 106

参考答案..... 106

第3节 反常积分..... 108

知识点精讲..... 108

题型归纳及思路提示..... 109

精选习题三(3)..... 110

参考答案..... 111

第四章 微分中值定理与泰勒公式

..... 112

第1节 中值定理..... 112

知识点精讲..... 112

题型归纳及思路提示..... 112

第2节 泰勒公式..... 122

知识点精讲..... 122

题型归纳及思路提示..... 123

精选习题四..... 125

参考答案..... 125

第五章 常微分方程..... 127

第1节 常微分方程的基本概念..... 127

知识点精讲..... 127

第2节 一阶微分方程..... 128

知识点精讲..... 128

题型归纳及思路提示..... 129

第3节 可降阶的高阶微分方程..... 137

知识点精讲..... 137

题型归纳及思路提示..... 137

第4节 高阶线性微分方程..... 138

知识点精讲..... 138

题型归纳及思路提示..... 142

第5节 欧拉方程*..... 146

知识点精讲..... 146

题型归纳及思路提示..... 146

第6节 微分方程的应用..... 147

题型归纳及思路提示..... 147

精选习题五..... 150

参考答案..... 151

第六章 一元微积分的应用	152	第2节 直线与平面	219
第1节 函数的单调性	152	知识点精讲	219
知识点精讲	152	题型归纳及思路提示	220
题型归纳及思路提示	152	第3节 投影方程	224
第2节 极值与最值	153	知识点精讲	224
知识点精讲	153	题型归纳及思路提示	224
题型归纳及思路提示	154	第4节 曲面方程	226
第3节 方程的根	160	知识点精讲	226
题型归纳及思路提示	160	题型归纳及思路提示	228
第4节 函数的图形性质	165	精选习题八	230
知识点精讲	165	参考答案	230
题型归纳及思路提示	166	第九章 多元函数微分学及应用 ..	231
第5节 弧微分	169	第1节 二元函数	231
知识点精讲	169	知识点精讲	231
题型归纳及思路提示	169	题型归纳及思路提示	231
第6节 微元法	170	第2节 二元函数的极限及连续性	232
知识点精讲	170	知识点精讲	232
题型归纳及思路提示	171	题型归纳及思路提示	233
精选习题六	180	第3节 二元函数的偏导数、全导数及	
参考答案	181	全微分	234
第七章 无穷级数*	182	知识点精讲	234
第1节 常数项级数	182	题型归纳及思路提示	235
知识点精讲	182	第4节 多元函数微分学在几何上的应用	
题型归纳及思路提示	184		248
第2节 函数项级数与幂级数	191	知识点精讲	248
知识点精讲	191	题型归纳及思路提示	249
题型归纳及思路提示	194	第5节 多元函数的极值及应用	250
第3节 无穷级数的求和	199	知识点精讲	250
题型归纳及思路提示	199	题型归纳及思路提示	252
第4节 傅里叶级数	206	精选习题九	257
知识点精讲	206	参考答案	257
题型归纳及思路提示	209	第十章 重积分	259
精选习题七	211	第1节 二重积分	259
参考答案	213	知识点精讲	259
第八章 向量代数与空间解析几何*		题型归纳及思路提示	262
.....	214	第2节 三重积分*	276
第1节 向量	214	知识点精讲	276
知识点精讲	214	题型归纳及思路提示	279
题型归纳及思路提示	216	精选习题十	281
		参考答案	283

第十一章 曲线、曲面积分及场论

初步* 284

第1节 曲线积分 284

知识点精讲 284

题型归纳及思路提示 286

第2节 曲面积分 292

知识点精讲 292

题型归纳及思路提示 294

第3节 场论初步 300

知识点精讲 300

题型归纳及思路提示 302

精选习题十一 305

参考答案 306

第十二章 函数方程与不等式证明

..... 307

精选习题十二 324

参考答案 325

第二篇 线性代数

篇要 线代的八种思维定势

..... 327

第一章 行列式 333

第1节 排列与逆序 333

知识点精讲 333

题型归纳及思路提示 333

第2节 行列式 334

知识点精讲 334

题型归纳及思路提示 337

精选习题一 347

参考答案 348

第二章 矩阵 349

第1节 矩阵 349

知识点精讲 349

题型归纳及思路提示 351

第2节 逆矩阵 356

知识点精讲 356

题型归纳及思路提示 359

精选习题二 371

参考答案 373

第三章 向量 375

第1节 向量 375

知识点精讲 375

第2节 向量的线性组合、线性表示及线

性相关性 376

知识点精讲 376

题型归纳及思路提示 377

第3节 向量组的秩和矩阵的秩 387

知识点精讲 387

题型归纳及思路提示 389

第4节 向量空间 396

知识点精讲 396

题型归纳及思路提示 398

精选习题三 400

参考答案 401

第四章 线性方程组 402

知识点精讲 402

题型归纳及思路提示 406

精选习题四 425

参考答案 427

第五章 特征值和特征向量 429

第1节 矩阵的特征值和特征向量 429

知识点精讲 429

题型归纳及思路提示 431

第2节 相似矩阵、对称矩阵及矩阵的

对角化 437

知识点精讲 437

题型归纳及思路提示 439

精选习题五 449

参考答案 451

第六章 二次型 452

第1节 二次型 452

知识点精讲 452

题型归纳及思路提示 454

第2节 二次型的正定性及正定矩阵 ... 461

知识点精讲 461

题型归纳及思路提示 462

精选习题六 466

参考答案	466
------------	-----

第三篇 概率论与数理统计*

篇要 概率统计的九种思维定势

.....	469
第一章 随机事件和概率	477
第1节 随机试验和随机事件	477
知识点精讲	477
题型归纳及思路提示	479
第2节 条件概率与事件的独立性	486
知识点精讲	486
题型归纳及思路提示	488
精选习题一	493
参考答案	494
第二章 随机变量及其分布	496
第1节 一维随机变量与分布函数	496
知识点精讲	496
题型归纳及思路提示	499
第2节 多维随机变量与分布函数	509
知识点精讲	509
题型归纳及思路提示	513
精选习题二	527
参考答案	530
第三章 随机变量的数字特征	533
第1节 一维随机变量的数字特征	533
知识点精讲	533
题型归纳及思路提示	535
第2节 二维随机变量的数字特征	542
知识点精讲	542
题型归纳及思路提示	544
精选习题三	559
参考答案	561

第四章 大数定律和中心极限定理

.....	562
第1节 切比雪夫不等式与大数定律 ...	562
知识点精讲	562
题型归纳及思路提示	563
第2节 中心极限定理	565
知识点精讲	565
题型归纳及思路提示	566
精选习题四	569
参考答案	569
第五章 数理统计的基本概念	570
第1节 总体、样本和统计量	570
知识点精讲	570
题型归纳及思路提示	571
第2节 抽样分布	573
知识点精讲	573
题型归纳及思路提示	575
精选习题五	577
参考答案	577
第六章 参数估计	579
第1节 点估计	579
知识点精讲	579
题型归纳及思路提示	580
第2节 区间估计	587
知识点精讲	587
题型归纳及思路提示	589
精选习题六	591
参考答案	592
第七章 假设检验	593
知识点精讲	593
题型归纳及思路提示	595
精选习题七	597
参考答案	598

带“*”号内容数二考生不作要求

第一篇 高等数学

篇要 高数的四种思维定势

思维定势一:在题设条件中若函数 $f(x)$ 二阶或二阶以上可导,“不管三七二十一”,把 $f(x)$ 在指定点展成泰勒公式再说.

【例1】设 C 为实数,函数 $f(x)$ 满足下列两个等式:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = C, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f''(x) = 0.$$

求证: $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} f''(x) = 0.$

【证】由泰勒公式有

$$f(x+1) = f(x) + f'(x) + \frac{1}{2!}f''(x) + \frac{1}{6}f'''(\xi_1), \quad x < \xi_1 < x+1, \quad ①$$

$$f(x-1) = f(x) - f'(x) + \frac{1}{2!}f''(x) - \frac{1}{6}f'''(\xi_2), \quad x-1 < \xi_2 < x. \quad ②$$

$$\text{由 } ① + ② \text{ 得, } f''(x) = f(x+1) + f(x-1) - 2f(x) + \frac{1}{6}f'''(\xi_2) - \frac{1}{6}f'''(\xi_1). \quad ③$$

$$\text{由 } ① - ② \text{ 得, } 2f'(x) = f(x+1) - f(x-1) - \frac{1}{6}f'''(\xi_1) - \frac{1}{6}f'''(\xi_2). \quad ④$$

当 $x \rightarrow \infty$ 时, $\xi_1 \rightarrow \infty, \xi_2 \rightarrow \infty$, 于是有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f''(x) = 2C - 2C + \frac{1}{6} \times 0 - \frac{1}{6} \times 0 = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 2f'(x) = C - C - \frac{1}{6} \times 0 - \frac{1}{6} \times 0 = 0.$$

因此 $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} f''(x) = 0.$

【例2】设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶导数连续, $f(0) = f(1) = 0$, 并且当 $x \in (0,1)$ 时, $|f''(x)| \leq$

A . 求证: $|f'(x)| \leq \frac{A}{2}, x \in [0,1].$

【证】由于 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶连续导数, 则 $f(x)$ 可展成一阶泰勒公式, 即

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(\xi)(x - x_0)^2, \quad \xi \text{ 在 } x \text{ 与 } x_0 \text{ 之间.}$$

取 $x = 0, x_0 = x$, 则

$$f(0) = f(x) + f'(x)(0 - x) + f''(\xi_1) \frac{(0 - x)^2}{2!}, \quad 0 < \xi_1 < x \leq 1; \quad ①$$

取 $x = 1, x_0 = x$, 则



$$f(1) = f(x) + f'(x)(1-x) + f''(\xi_2) \frac{(1-x)^2}{2!}, \quad 0 \leq x < \xi_2 < 1. \quad (2)$$

② - ① 得

$$f'(x) = f(1) - f(0) + \frac{1}{2!}[f''(\xi_1)x^2 - f''(\xi_2)(1-x)^2]$$

$$\frac{f(0) = f(1) = 0}{2!}[f''(\xi_1)x^2 - f''(\xi_2)(1-x)^2].$$

又 $|f''(x)| \leq A, x \in (0, 1)$, 则

$$|f'(x)| \leq \frac{A}{2}[x^2 + (1-x)^2] = \frac{A}{2}(2x^2 - 2x + 1).$$

当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $2x^2 - 2x + 1 \leq 1$. 故 $|f'(x)| \leq \frac{A}{2}$.

【例3】试证:若偶函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某邻域内具有连续的二阶导数, 且 $f(0)=1$, 则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[f\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \right] \text{ 绝对收敛.}$$

【证】因 $f(x)$ 为偶函数, 故 $f'(x)$ 为奇函数, $f'(0)=0$. 又

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2),$$

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{f''(0)}{2} \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$\text{故 } u_n = f\left(\frac{1}{n}\right) - 1 = \frac{f''(0)}{2} \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

$$\text{从而 } |u_n| = \left| f\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \right| \sim \frac{|f''(0)|}{2n^2}.$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f''(0)|}{2n^2}$ 收敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛.

【例4】设函数 $f(x)$ 二阶可导, 且 $f''(x) \geq 0, x \in (-\infty, +\infty)$, 函数 u 在区间 $[0, a] (a > 0)$ 上连续. 证明:

$$\frac{1}{a} \int_0^a f[u(t)] dt \geq f\left[\frac{1}{a} \int_0^a u(t) dt\right].$$

【证】令 $x_0 = \frac{1}{a} \int_0^a u(t) dt$, 将 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处展成一阶泰勒公式:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(\xi)(x - x_0)^2.$$

由于 $f''(x) \geq 0$, 则 $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

令 $x = u(t)$, 则 $f[u(t)] \geq f(x_0) + f'(x_0)[u(t) - x_0]$.

上式两边在 $[0, a]$ 上对 t 积分, 得

$$\begin{aligned} \int_0^a f[u(t)] dt &\geq \int_0^a f(x_0) dt + \int_0^a f'(x_0)[u(t) - x_0] dt \\ &= af(x_0) + f'(x_0) \left[\int_0^a u(t) dt - ax_0 \right] = af(x_0). \end{aligned}$$

$$\text{故 } \frac{1}{a} \int_0^a f[u(t)] dt \geq f\left[\frac{1}{a} \int_0^a u(t) dt\right].$$



$$f(x) = f(x) + f'(x)(y-x)$$

【另证】因 $f''(x) \geq 0$, 所以 $f(x)$ 为凸函数. 因此, 具有性质:

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) \quad (\text{其中 } \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1).$$

由 u 在 $[0, a]$ 上连续, 从而可积. 将 $[0, a]$ n 等分, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{u(\xi_i)}{a} \frac{a}{n} = \frac{1}{a} \int_0^a u(t) dt.$$

由 f 的凸性及连续性, 有

$$f\left(\sum_{i=1}^n \frac{u(\xi_i)}{a} \frac{a}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f[u(\xi_i)] = \sum_{i=1}^n \frac{f(u(\xi_i))}{a} \frac{a}{n}.$$

对上式两边令 $n \rightarrow \infty$ 取极限, 由可积性可得

$$f\left(\frac{1}{a} \int_0^a u(t) dt\right) \leq \frac{1}{a} \int_0^a f(u(t)) dt.$$

思维定势二:在题设条件或欲证结论中有定积分表达式时, 则“不管三七二十一”先用积分中值定理对该积分式处理一下再说.

【例5】设 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上连续, 在 $(0, 2)$ 内二阶可导, 且 $f(0) = f(\frac{1}{2})$, $2 \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx = f(2)$.

证明: 存在一个 $\xi \in (0, 2)$, 使 $f''(\xi) = 0$.

【证】 $f(2) = 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx \xrightarrow{\text{积分中值定理}} 2(1 - \frac{1}{2})f(\eta) = f(\eta)$, $\frac{1}{2} \leq \eta \leq 1$.

于是 $f(x)$ 在 $[\eta, 2]$ 上满足洛尔定理, 即存在一个 $\xi_1 \in (\eta, 2)$, 使

$$f'(\xi_1) = 0. \quad ①$$

又 $f(x)$ 在 $[0, \frac{1}{2}]$ 上满足洛尔定理, 于是存在一个 $\xi_2 \in (0, \frac{1}{2})$, 使

$$f'(\xi_2) = 0. \quad ②$$

由 ①, ② 可知 $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$.

再对 $f'(x)$ 在 $[\xi_2, \xi_1]$ 上使用洛尔定理, 于是 $\exists \xi \in (\xi_2, \xi_1) \subset (0, 2)$, 使 $f''(\xi) = 0$.

【例6】设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上是非负、单调递减的连续函数, 且 $0 < a < b < 1$. 证明:

$$\int_0^a f(x) dx \geq \frac{a}{b} \int_a^b f(x) dx.$$

【证】由积分中值定理

$$\int_0^a f(x) dx = af(\xi_1) \geq af(a), \quad \xi_1 \in [0, a],$$

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)f(\xi_2) \leq (b-a)f(a), \quad \xi_2 \in [a, b].$$

$$\text{于是 } \frac{1}{a} \int_0^a f(x) dx \geq f(a) \geq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \geq \frac{1}{b} \int_a^b f(x) dx.$$

$$\text{故 } \int_0^a f(x) dx \geq \frac{a}{b} \int_a^b f(x) dx.$$

【另证】 $\int_0^a f(x) dx \geq \frac{a}{b} \int_a^b f(x) dx \Leftrightarrow b \int_0^a f(x) dx \geq a \int_a^b f(x) dx.$



令 $F(x) = b \int_0^x f(t) dt - x \int_x^b f(t) dt$, 则

$$\begin{aligned} f'(x) &= bf(x) - \int_x^b f(t) dt + xf(x) = \int_x^b f(x) dt - \int_x^b f(t) dt + 2xf(x) \\ &= \int_x^b [f(x) - f(t)] dt + 2xf(x) \geq 0, \text{ (由于 } f(x) \geq f(t) \geq 0 \text{)}. \end{aligned}$$

所以 $F(x)$ 单调递增. 又 $F(0) = 0$, 故

$$F(a) > F(0) = 0, \text{ 即 } b \int_0^a f(x) dx - a \int_a^b f(x) dx > 0,$$

亦即 $\int_0^a f(x) dx \geq \frac{a}{b} \int_a^b f(x) dx.$

思维定势三:在题设条件中函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $f(a) = 0$ 或 $f(b) = 0$ 或 $f(a) = f(b) = 0$, 则“不管三七二十一”先用拉格朗日中值定理处理一下再说.

$$f(x) \stackrel{f(a)=0}{=} f(x) - f(a) = f'(\xi)(x-a), \quad a < \xi < x.$$

或 $f(x) \stackrel{f(b)=0}{=} f(x) - f(b) = f'(\xi)(x-b), \quad x < \xi < b.$

若 $f(a) = f(b) = 0$, 则 $\begin{cases} f(x) = f(x) - f(a) = f'(\xi_1)(x-a), & a < \xi_1 < x, \\ f(x) = f(x) - f(b) = f'(\xi_2)(x-b), & x < \xi_2 < b. \end{cases}$

【例7】 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有连续的导数, 且 $f(a) = f(b) = 0, M = \max_{x \in [a, b]} |f'(x)|$, 试证:

$$\frac{4}{(b-a)^2} \int_a^b f(x) dx \leq M.$$

【证】 $f(x) \stackrel{f(a)=0}{=} f(x) - f(a) = (x-a)f'(\xi_1), a < \xi_1 < x$, 则
 $|f(x)| = (x-a)|f'(\xi_1)| \leq (x-a)M.$

同理 $|f(x)| \leq (b-x)M.$

$$\begin{aligned} \text{于是 } \int_a^b |f(x)| dx &= \int_a^{\frac{a+b}{2}} |f(x)| dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b |f(x)| dx \\ &\leq \int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a)M dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b (b-x)M dx = \frac{(b-a)^2}{4} M. \end{aligned}$$

故 $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx \leq \frac{(b-a)^2}{4} M.$

即 $\frac{4}{(b-a)^2} \int_a^b f(x) dx \leq M.$

【例8】 已知在 $[0, a]$ 上 $|f''(x)| \leq M$, 且 $f(x)$ 在 $(0, a)$ 内取最大值, 试证:

$$|f'(0)| + |f'(a)| \leq Ma.$$

【证】 设 $f(c) = \max_{x \in (0, a)} \{f(x)\}$, 则 $f'(c) = 0$. (费尔马定理)

对 $f'(x)$ 在 $[0, c]$ 与 $[c, a]$ 内分别用拉格朗日中值定理, 有

$$f'(c) - f'(0) = f''(\xi_1)c, \quad 0 < \xi_1 < c,$$

$$f'(a) - f'(c) = f''(\xi_2)(a-c), \quad c < \xi_2 < a.$$



于是 $|f'(0)| = |f'(\xi_1)c| \leq Mc$,

$|f'(a)| = |f'(\xi_2)(a-c)| \leq M(a-c)$.

故 $|f'(0)| + |f'(a)| \leq Mc + M(a-c) = Ma$.

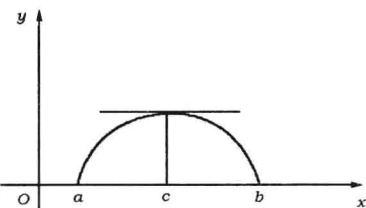
【例9】 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有连续的 $f''(x)$, 且 $f''(x) < 0, f(a) = f(b) = 0$,

则在 (a, b) 上 $f(x) > 0$, 且

$$\int_a^b \left| \frac{f''(x)}{f(x)} \right| dx > \frac{4}{b-a}.$$

【证】 由 $f''(x) < 0$ 可知, $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是凹函数(图形上凸);

由凹函数性质知, $f(x)$ 大于连接 $(a, f(a)), (b, f(b))$ 线段上点的纵坐标. 而此线段所在直线即为 $y = 0$ (x 轴), 所以在 (a, b) 上 $f(x) > 0$. 再由 $f''(x) < 0$ 知, $f'(x)$ 是严格单调减少的, 从而知 $f(x)$ 在 (a, b) 内有惟一的极大值点, 记为 $x = c$. 此时 $f'(c) = 0$, 如右图所示, 而在 (a, c) 上, $f'(x) > 0$, 在 (c, b) 上 $f'(x) < 0$.



由拉格朗日中值定理, 当 $x \in [a, c]$ 时,

$$f(x) = f'(\xi_1)(x-a) + f(a), \quad \xi_1 \in (a, x).$$

由 $f'(x)$ 严格递减, $f'(\xi_1) < f'_+(a)$, 注意到 $f(a) = 0$, 有

$$f(x) < f'_+(a)(c-a), \quad x \in [a, c].$$

当 $x \in [c, b]$ 时, 同理可得

$$f(x) < [-f'_-(b)](b-x), \quad x \in [c, b].$$

于是 $\frac{1}{f(x)} > \frac{1}{(c-a)f'_+(a)}, x \in [a, c], \quad \frac{1}{f(x)} > \frac{1}{(b-x)(-f'_-(b))}, x \in [c, b].$

$$\text{则 } \int_a^b \left| \frac{f''(x)}{f(x)} \right| dx = - \int_a^b \frac{f''(x)}{f(x)} dx = \int_a^c \frac{-f''(x)}{f(x)} dx + \int_c^b \frac{-f''(x)}{f(x)} dx$$

$$> \int_a^c \frac{-f''(x)}{(c-a)f'_+(a)} dx + \int_c^b \frac{-f''(x)}{(b-x)(-f'_-(b))} dx$$

$$= \frac{1}{(c-a)f'_+(a)} [f'_+(a) - f'(c)] + \frac{1}{(b-c)(-f'_-(b))} [f'(c) - f'_-(b)]$$

$$= \frac{1}{c-a} + \frac{1}{b-c} = \frac{b-a}{(c-a)(b-c)} > (b-a) \frac{1}{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2} = \frac{4}{b-a}.$$

思维定势四: 对定限或变限积分, 若被积函数或其主要部分为复合函数, 则“不管三七二十一”先做变量替换使之成为简单形式 $f(u)$ 再说.

【例10】 求下列函数的导数(设 $f(u)$ 是 u 的连续函数):

(1) $F(y) = \int_0^y f(x-y) dx$, 求 $F'(y)$; (2) $F(x) = \int_0^{x^2} t f(x-t) dt$, 求 $F'(x)$;

(3) $F(x) = \int_0^1 f(te^x) dt$, 求 $F'(x)$; (4) $F(x) = \int_0^{x^2} x f(x+t) dt$, 求 $F'(x)$.

【解】 (1) $F(y) \xrightarrow{\text{令 } u = x-y} \int_{-y}^0 f(u) du$, 则 $F'(y) = -f(-y) \cdot (-1) = f(-y)$.



$$(2) \quad F(x) \stackrel{\text{令 } u = x-t}{=} \int_x^{x-x^2} (x-u)f(u)(-du) = -x \int_x^{x-x^2} f(u)du + \int_x^{x-x^2} uf(u)du,$$

$$\begin{aligned} \text{则} \quad F'(x) &= - \int_x^{x-x^2} f(u)du - x[f(x-x^2) \cdot (1-2x) - f(x)] \\ &\quad + (1-2x)(x-x^2)f(x-x^2) - xf(x) \\ &= \int_{x-x^2}^x f(u)du + x^2(2x-1)f(x-x^2). \end{aligned}$$

$$(3) \quad F(x) \stackrel{\text{令 } u = te^x}{=} \int_0^{e^x} f(u) \frac{1}{e^x} du = \frac{1}{e^x} \int_0^{e^x} f(u)du = e^{-x} \int_0^{e^x} f(u)du,$$

$$\text{则} \quad F'(x) = -e^{-x} \int_0^{e^x} f(u)du + e^{-x} f(e^x) \cdot e^x = f(e^x) - e^{-x} \int_0^{e^x} f(u)du.$$

$$(4) \quad \int_0^{x^2} f(x+t)dt \stackrel{\text{令 } u = x+t}{=} \int_x^{x+x^2} f(u)du, \text{ 于是有 } F(x) = x \int_x^{x+x^2} f(u)du,$$

$$\text{则} \quad F'(x) = \int_x^{x+x^2} f(u)du + x[f(x+x^2)(1+2x) - f(x)].$$

【例11】设 $f(x)$ 可微, 且满足 $x = \int_0^x f(t)dt + \int_0^x tf(t-x)dt$, 求 $f(x)$.

$$\text{【解】} \quad \int_0^x tf(t-x)dt \stackrel{\text{令 } u = t-x}{=} \int_{-x}^0 (u+x)f(u)du = - \int_0^{-x} uf(u)du + x \int_{-x}^0 f(u)du.$$

$$\text{于是原方程变为} \quad x = \int_0^x f(t)dt - \int_0^{-x} uf(u)du - x \int_0^{-x} f(u)du.$$

$$\text{两边对 } x \text{ 求导, 得} \quad 1 = f(x) - (-x)f(-x)(-1) - \int_0^{-x} f(u)du - xf(-x)(-1).$$

$$\text{整理, 得} \quad 1 = f(x) - \int_0^{-x} f(u)du,$$

$$\text{两边再对 } x \text{ 求导, 得} \quad 0 = f'(x) - f(-x)(-1),$$

$$\text{即} \quad f'(x) = -f(-x), \quad \text{①}$$

$$\text{上式两边对 } x \text{ 求导, 得} \quad f''(x) = f'(-x), \quad \text{②}$$

$$\text{由 ①, ② 得} \quad f''(x) = -f(x),$$

$$\text{即} \quad f''(x) + f(x) = 0,$$

$$\text{解此方程得} \quad f(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

$$\text{注意到 } f(0) = 1, f'(0) = -1, \text{ 故 } f(x) = \cos x - \sin x.$$

【注】思维定势四可推广为: 若给定的函数为抽象的复合函数, 则运算之前应先做变量替换, 使之成为简单的形式.

$$\text{例如: } f[\varphi(x)] \stackrel{\text{令 } u = \varphi(x)}{=} f(u).$$

【例12】设 $f(x^2 - 1) = \ln \frac{x^2}{x^2 - 2}$, $f[\varphi(x)] = \ln x$, 计算 $\int \varphi(x)dx$.

$$\text{【解】} \quad \text{令 } x^2 - 1 = t, \quad \text{则 } f(t) = \ln \frac{t+1}{t-1}, \quad f[\varphi(x)] = \ln \frac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1} = \ln x,$$

$$\Rightarrow \frac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1} = x \Rightarrow \varphi(x) = \frac{x+1}{x-1},$$

$$\text{故} \quad \int \varphi(x)dx = \int \frac{x+1}{x-1}dx = x + 2\ln|x-1| + C.$$

第一章 函数·极限·连续

第 1 节 函 数



知识点精讲

一、基本概念

1. 函数

设有两个变量 x 和 y , 变量 x 的变域为 D , 如果对于 D 中的每一个 x 值, 按照一定的法则, 变量 y 有一个确定的值与之对应, 则称变量 y 为变量 x 的函数, 记作: $y = f(x)$.

其中 x ——自变量, y ——因变量, 变域 D 为定义域, 记为 D_f , 变量 y 的取值的集合称为函数的值域, 记作 Z_f .

函数概念的两要素:

① 定义域 $\triangleq$ 自变量 x 的变化范围 (若函数是解析式子表示的, 则使运算有意义的实自变量值的集合即为定义域).

② 对应关系 $\triangleq$ 给定 x 值, 求 y 值的方法.

记住下列简单函数的定义域:

$$y = \frac{1}{x}, \quad D_f: x \neq 0, \quad (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

$$y = \sqrt[n]{x}, \quad D_f: x \geq 0, \quad [0, +\infty)$$

$$y = \log_a x, \quad D_f: x > 0, \quad (0, +\infty)$$

$$y = \tan x, \quad D_f: x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad k \in Z$$

$$y = \cot x, \quad D_f: x \neq k\pi, \quad k \in Z$$

$$y = \arcsin x \text{ (或 } \arccos x), \quad D_f: |x| \leq 1, \quad [-1, 1]$$

2. 反函数

设函数 $y = f(x)$ 的值域为 Z_f , 如果对于 Z_f 中任一 y 值, 从关系式 $y = f(x)$ 中可确定惟一的一个 x 值, 则称变量 x 为变量 y 的函数, 记为: $x = \varphi(y)$, 其中 $\varphi(y)$ 称为函数 $y = f(x)$ 的反函数, 习惯上 $y = f(x)$ 的反函数记为: $y = f^{-1}(x)$.



- 注** ① $y = f(x)$ 的图形与其反函数 $x = \varphi(y)$ 的图形重合; $y = f(x)$ 的图形与其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y = x$ 对称.
- ② 只有一一对应的函数才有反函数.

3. 复合函数

设函数 $y = f(u)$ 的定义域为 D_f , 而函数 $u = \varphi(x)$ 的值域为 Z_φ , 若 $D_f \cap Z_\varphi \neq \emptyset$, 则称函数 $y = f[\varphi(x)]$ 为 x 的复合函数.

其中 x ——自变量, u ——中间变量, y ——因变量.

4. 初等函数

由常数 C 及基本初等函数通过有限次的四则运算或复合而成的只能用一个式子表示的函数, 称为初等函数. 基本初等函数包括五类函数: 幂函数: $y = x^\mu (\mu \in R)$; 指数函数 $y = a^x (a > 0$ 且 $a \neq 1)$; 对数函数: $y = \log_a x (a > 0$ 且 $a \neq 1)$; 三角函数: 如 $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x$ 等; 反三角函数: 如 $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \arctan x$ 等.

5. 分段函数

如果一个函数在其定义域内, 对应于不同的区间段有着不同的表达形式, 则该函数称为分段函数. 常见的分段函数:

- ① 符号函数 $y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{当 } x > 0, \\ 0 & \text{当 } x = 0, \\ -1 & \text{当 } x < 0. \end{cases}$
- ② y 是 x 的最大整数部分, 记为 $y = [x]$.
- ③ 狄利克莱 (Dirichlet) 函数 $y = f(x) = \begin{cases} 1 & \text{当 } x \text{ 为有理数时,} \\ 0 & \text{当 } x \text{ 为无理数时.} \end{cases}$

注 一般而言, 分段函数不是初等函数.

二、基本性质

1. 奇偶性

设函数 $f(x)$ 在对称区间 X 上有定义, 如果对于 $\forall x \in X$ 恒有

$$f(x) = f(-x) \quad (\text{或 } f(x) = -f(-x))$$

则称 $f(x)$ 为偶函数 (或 $f(x)$ 为奇函数).

图形特征: 偶函数 $f(x)$ 的图形关于 y 轴对称, 奇函数 $f(x)$ 的图形关于坐标原点对称.

奇偶函数的运算性质:

- ① 奇函数的代数和仍为奇函数; 偶函数的代数和仍为偶函数.
- ② 偶数个奇 (或偶) 函数之积为偶函数; 奇数个奇函数的积为奇函数.
- ③ 一奇一偶函数的乘积为奇函数.

常见的偶函数: $|x|$, $\cos x$, $x^{2n} (n \text{ 为正整数})$, $e^{|x|}$, e^{x^2} , ...



常见的奇函数: $\sin x$, $\tan x$, $\frac{1}{x}$, x^{2n+1} , $\arcsin x$, $\arctan x$, ...

2. 周期性

设函数 $f(x)$ 在区间 X 上有定义, 若存在一个与 x 无关的正数 T , 使对于任一 $x \in X$, 恒有

$$f(x+T) = f(x)$$

则称 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数, 把满足上式的最小正数 T 称为函数 $f(x)$ 的周期.

周期函数的运算性质:

① 若 T 为 $f(x)$ 的周期, 则 $f(ax+b)$ 的周期为 $\frac{T}{|a|}$.

② 若 $f(x), g(x)$ 均是以 T 为周期的函数, 则 $f(x) \pm g(x)$ 也是以 T 为周期的函数.

③ 若 $f(x), g(x)$ 分别是以 $T_1, T_2, T_1 \neq T_2$ 为周期的函数, 则 $f(x) \pm g(x)$ 是以 T_1, T_2 的最小公倍数为周期的函数.

常见函数的周期: $\sin x, \cos x$, 其周期 $T = 2\pi$;

$\tan x, \cot x, |\sin x|, |\cos x|$, 其周期 $T = \pi$.

3. 有界性

设函数 $y = f(x)$ 在区间 X 上有定义, 如果 $\exists M > 0$, 使得对于一切 $x \in X$, 恒有: $|f(x)| \leq M$, 则称 $f(x)$ 在区间 X 上有界; 若不存在这样的 $M > 0$, 则称 $f(x)$ 在区间 X 上无界.

注 函数 $f(x)$ 有无界是相对于某个区间而言的.

六个常见的有界函数: $|\sin x| \leq 1$, $|\cos x| \leq 1$, $(-\infty, +\infty)$

$|\arcsin x| \leq \frac{\pi}{2}$, $|\arccos x| \leq \pi$, $[-1, 1]$

$|\arctan x| < \frac{\pi}{2}$, $|\operatorname{arccot} x| < \pi$, $(-\infty, +\infty)$

4. 单调性

设函数 $y = f(x)$ 在区间 X 上有定义, 如果对 $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2$, 恒有:

$$f(x_1) < f(x_2) \quad (\text{或 } f(x_1) > f(x_2)),$$

则称 $f(x)$ 在区间 X 上是严格单调增加(或严格单调减少)的; 如果对于 $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2$, 恒有:

$$f(x_1) \leq f(x_2) \quad (\text{或 } f(x_1) \geq f(x_2))$$

则称 $f(x)$ 在区间 X 上是单调增加(或单调减少)的.