大学数学

李松林　贾克裕　主编

下册

科学出版社

大学数学(下册)

主　编　李松林　贾克裕
副主编　李　应　阮杰昌

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书是编者在多年教学经验的基础上，结合当前大学生的特点及工科专业人才培养目标编写而成的. 全书分为上、下册，本书是下册，内容包括向量、矩阵及线性方程组，矩阵，向量空间，矩阵问题的进一步讨论，随机事件及其概率，随机变量及其分布，随机变量的数字特征，样本及抽样分布. 本书体系新颖，结构严谨，内容丰富，叙述清晰，重点突出，难点分散，例题典型，重视对学生分析、推理、计算和应用数学能力的培养.

本书适合普通高等学校工科和经管类各专业的学生学习使用，也可作为相关人员的参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

大学数学(下)/李松林，贾克裕主编. —北京：科学出版社，2011
ISBN 978-7-03-032132-9

Ⅰ. ①大… Ⅱ. ①李…②贾… Ⅲ. ①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 170481 号

责任编辑：胡云志 任俊红 唐保军/责任校对：李 影
责任印制：张克忠/封面设计：华路天然工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
骏杰印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2011 年 8 月第 一 版 开本：720×1000 1/16
2011 年 8 月第一次印刷 印张：15 3/4
印数：1—3 500 字数：373 000

定价：29.00 元

前　　言

数学是生活、学习和工作中不可或缺的重要工具，是一门重要的基础科学，是通向科学大门的金钥匙，同时也是锻炼思维的体操，学习数学可以使人们思考问题时更合乎逻辑、更有条理、更严密精确、更深入简洁、更善于创新. 大学数学内容多、进度快、与专业知识结合紧密，教师在教学时不仅需要引导学生现在的学习，而且要对以后的学习也有所启迪.

本书依照教育部最新制定的高等数学课程的教学基本要求，结合编者多年的教学实践经验编写而成，遵循"以应用为目的，以必需、够用为度"的原则，力求教材内容"涵盖大纲、易学、实用". 本书具有以下特点：

(1) 教材的编写紧扣大学数学课程教学基本要求，以适当的深度和广度精心选取教材内容及习题，既考虑到数学学科体系的科学性，又能针对学生的接受能力和理解程度. 教材文字简练，内容深入浅出，在注重基础数学知识的同时，淡化了繁杂的定理证明，辅之以说明或几何解释，既便于教师教，又便于学生学.

(2) 注重理论联系实际，突出数学的应用思想. 教材中引入大量案例，注重联系实际，适度渗透数学建模的思想和方法，尽可能地以实际背景引入概念，让学生体会到数学来源于生活和生产实际，以拓宽学生的数学应用基础，培养学生分析和解决问题的能力，提高学生理论联系实际的能力，让学生体会数学的本质以及数学的价值.

(3) 内容安排重点突出，层次分明，既能夯实学生的数学基础，又充分考虑到学生的个性化发展.

本书下册共 8 章，主要内容包括：向量、矩阵及线性方程组，矩阵，向量空间，矩阵问题的进一步讨论，随机事件及其概率，随机变量及其分布，随机变量的数字特征，样本及抽样分布等. 各专业可根据专业培养目标和要求，选学相应的教学内容. 本书下册由李松林、贾克裕任主编，李应、阮杰昌任副主编，兰华龙、邵文凯、孙文涛、蒋鹏忠、陶佳、贾裕玟、李丹参加编写，李松林、贾克裕统稿完成.

在全书的编辑出版过程中，科学出版社给予了大力帮助与支持，成都信息工程学院银杏酒店管理学院和宜宾职业技术学院的全体数学老师做了大量工作，成都信息工程学院银杏酒店管理学院黄方正教授和西南民族大学雷开彬教授审阅了本书下册，并对全书的章节安排、框架设计和内容组织提出了许多宝贵的意见和建议，在此一并致谢.

鉴于编者水平有限，书中难免存在一些缺点和不足，敬请读者与同行批评指正.

编　者

2011 年 6 月

目　录

第 8 章　向量、矩阵及线性方程组

8.1　向量及其运算性质

在平面几何中，坐标平面上每个点的位置都可以用它的坐标来描述，点的坐标是一个有序数对 (x,y). 一个 n 元方程 $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b$ 可以用一个 $n+1$ 元有序数组 $(a_1,a_2,\cdots,a_n,b)$ 来表示. 一个企业一年中从 1 月到 12 月每月的产值也可用一个有序数组 $(a_1,a_2,\cdots,a_{12})$ 来表示. 有序数组的应用非常广泛，有必要对它们进行深入的讨论.

8.1.1　n 维向量的概念

定义 8.1.1　n 个数组成的有序数组

$$(a_1,a_2,\cdots,a_n) \tag{8-1}$$

或

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \tag{8-2}$$

称为一个 n 维向量，简称向量.

一般地，我们用小写的黑斜体字母，如 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\cdots$ 等来表示向量，式(8-1)称为一个行向量，式(8-2)称为一个列向量. 数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 称为这个向量的分量. a_i 称为这个向量的第 i 个分量或坐标. 所有分量均为 0 的向量，称为零向量，记作 $\mathbf{0}$ 或 $\boldsymbol{o}$.

分量都是实数的向量称为实向量；分量是复数的向量称为复向量. 如不作特别说明，本书中向量均指实向量.

8.1.2　向量的线性运算

对于两个 n 维行向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，若存在 n 维行向量 $\boldsymbol{\gamma}=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)$，则称向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的和，记作 $\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$. 类似地，可以定义两个 n 维列向量的和，但要注意，一个行向量和一个列向量是不能直接相加的.

对于 n 维行向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 和实数 k，若存在 n 维行向量 $\boldsymbol{\gamma}=(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n)$，则称向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和实数 k 的数乘结果，记为 $\boldsymbol{\gamma}=k\boldsymbol{\alpha}$.

类似地，可以定义 n 维列向量的数乘. 向量的和运算与数乘运算统称为线性运算，

且对任意两个 n 维行(列)向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 和任意实数 k,l，向量的线性运算满足下列运算律(请自行证明)：

(1) $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$；(加法交换律)

(2) $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$；(加法结合律)

(3) $\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0}=\boldsymbol{\alpha}$；

(4) $\boldsymbol{\alpha}+(-1)\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$；

(5) $1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$；

(6) $k(l\boldsymbol{\alpha})=(kl)\boldsymbol{\alpha}$；(数乘结合律)

(7) $(k+l)\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\alpha}$；(分配律)

(8) $k(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta}$.(分配律)

例 1 某公司销售四种商品 A、B、C、D，本年度第 1、2、3 月的销量(单位：件)如表 8-1所示.

表 8-1

商品/月份	A	B	C	D
1 月	58	55	79	47
2 月	44	46	62	45
3 月	32	56	66	49

(1) 该公司本年度第一季度四种商品的销量各是多少？

(2) 若已知销售商品 B 的利润为 300 元/件，问该公司本年度前三个月商品 B 的获利分别是多少？

解 (1) 第 $i(i=1,2,3)$ 月四种商品的销量可用 4 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 表示，即有

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(58,55,79,47)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_2=(44,46,62,45)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_3=(32,56,66,49)$$

则该公司本年度第一季度四种商品的销量可表示为

$$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=(134,157,207,141)$$

即四种商品第一季度销量分别为 134 件、157 件、207 件、141 件.

(2) 前三个月商品 B 的获利可以表示为 $300\begin{pmatrix}55\\46\\56\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16500\\13800\\16800\end{pmatrix}$，即商品 1 月获利为 16500 元，2 月获利为 13800 元，3 月获利为 16800 元.

8.1.3 向量的内积及其性质

在例 1 中，如果我们知道四种商品的价格分别为 100 元/件，150 元/件，300 元/件，200 元/件，那么可以计算出每个月的总利润，比如第 1 个月利润总和可以表示成 58 ×

$100+55\times150+79\times300+47\times200=47150$(元). 这个式子可以看成由四种商品价格构成的 4 维向量 $(100,150,300,200)$ 与 1 月份四种商品销量构成的 4 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(58,55,79,47)$ 的各对应分量乘积之和.

定义 8.1.2　设有 n 维向量

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$$

称 $[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的内积,内积也可以用 $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}$ 表示.

根据上述定义,我们应该明确两个向量的内积结果不再是向量而是实数了,因此内积也可称为数量积.

由定义可以直接得出内积的性质. 对向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 和实数 k 有

(1) $[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]=[\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}]$;

(2) $[k\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]=k[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]$;

(3) $[\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}]=[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}]+[\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}]$.

例 2　计算下列向量的内积:

(1) $\boldsymbol{\alpha}=(1,0),\boldsymbol{\beta}=(0,1)$;

(2) $\boldsymbol{\alpha}=(1,3,2),\boldsymbol{\beta}=(1,1,1)$;

(3) $\boldsymbol{\alpha}=(0,1,5,-2),\boldsymbol{\beta}=(-2,0,-1,3)$.

解　(1) $[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]=1\times0+0\times1=0$.

(2) $[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]=1\times1+3\times1+2\times1=6$.

(3) $[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]=0\times(-2)+1\times0+5\times(-1)+(-2)\times3=-11$.

定义 8.1.3　称 $\|\boldsymbol{\alpha}\|=\sqrt{[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}]}=\sqrt{\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\alpha}}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$ 为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的长度(或范数). 当 $\|\boldsymbol{\alpha}\|=1$ 时,称 $\boldsymbol{\alpha}$ 为单位向量.

从向量长度的定义可推得以下基本性质:

(1) 非负性:当 $\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$ 时, $\|\boldsymbol{\alpha}\|>0$, 当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$ 时, $\|\boldsymbol{\alpha}\|=0$.

(2) 齐次性: $\|k\boldsymbol{\alpha}\|=|k|\,\|\boldsymbol{\alpha}\|$.

(3) 三角不等式: $\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\|\leqslant\|\boldsymbol{\alpha}\|+\|\boldsymbol{\beta}\|$.

(4) 柯西-施瓦茨(Cauchy-Schwarz)不等式: $[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]^2\leqslant\|\boldsymbol{\alpha}\|^2\,\|\boldsymbol{\beta}\|^2$.

(1)、(2)请自行验证. 先对(4)进行证明:

对任意实数 t, 作向量 $\boldsymbol{\alpha}+t\boldsymbol{\beta}$, 则有

$$\begin{aligned}0\leqslant\|\boldsymbol{\alpha}+t\boldsymbol{\beta}\|^2&=[\boldsymbol{\alpha}+t\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}+t\boldsymbol{\beta}]=[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}+t\boldsymbol{\beta}]+t[\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}+t\boldsymbol{\beta}]\\&=[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}]+t[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]+t[\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}]+t^2[\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}]\\&=\|\boldsymbol{\alpha}\|^2+2[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]t+\|\boldsymbol{\beta}\|^2t^2\end{aligned}$$

将其视为关于 t 的一元二次式,其判别式 $\Delta=4[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]^2-4\|\boldsymbol{\alpha}\|^2\,\|\boldsymbol{\beta}\|^2\leqslant0$, 即

$$[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]^2\leqslant\|\boldsymbol{\alpha}\|^2\,\|\boldsymbol{\beta}\|^2$$

利用(4)的结论可以证明性质(3),留作课后习题.

由柯西-施瓦茨不等式可得

$$\left|\frac{[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]}{\|\boldsymbol{\alpha}\| \cdot \|\boldsymbol{\beta}\|}\right| \leqslant 1, \quad \|\boldsymbol{\alpha}\| \cdot \|\boldsymbol{\beta}\| \neq 0$$

于是我们有

定义 8.1.4 当 $\|\boldsymbol{\alpha}\| \cdot \|\boldsymbol{\beta}\| \neq 0$ 时,称

$$\theta = \arccos \frac{[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]}{\|\boldsymbol{\alpha}\| \cdot \|\boldsymbol{\beta}\|}$$

为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的夹角. 当 $[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]=0$ 时,称 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 正交.

显然,n 维零向量与任意 n 维向量正交. 借助向量夹角的定义,还可以得出向量内积的另一种表达形式 $[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]= \|\boldsymbol{\alpha}\| \cdot \|\boldsymbol{\beta}\| \cdot \cos\theta$,这里 θ 是向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的夹角. 由此可见 2 维向量内积的几何意义是以向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 为相邻边的平行四边形的面积,高维向量的几何意义可以类似理解.

例 3 计算下列向量的长度:

(1) n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}=(1,1,\cdots,1)$;

(2) $\boldsymbol{\alpha}=(1,2,3,4)$;

(3) $\boldsymbol{\alpha}=(\cos\theta,\sin\theta)$.

解 (1) $\|\boldsymbol{\alpha}\| = \sqrt{1^2+1^2+\cdots+1^2}=\sqrt{n}$.

(2) $\|\boldsymbol{\alpha}\| = \sqrt{1^2+2^2+3^2+4^2}=\sqrt{30}$.

(3) $\|\boldsymbol{\alpha}\| = \sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=1$.

例 4 判断下列各组向量是否正交:

(1) $\boldsymbol{\alpha}=(1,0,1)$;$\boldsymbol{\beta}=(-1,0,-1)$;

(2) $\boldsymbol{\alpha}=(\cos\theta,\sin\theta)$;$\boldsymbol{\beta}=(-\sin\theta,\cos\theta)$.

解 (1)因为 $[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]=1\times(-1)+0\times0+1\times(-1)=-2\neq0$,所以 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 不正交;

(2) 因为 $[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]=\cos\theta\times(-\sin\theta)+\sin\theta\times\cos\theta=0$,所以 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 正交.

习 题 8.1

1. 已知向量 $\boldsymbol{\alpha}=(2,1,3,2)$,$\boldsymbol{\beta}=(1,2,-2,1)$ 求:

(1) $\boldsymbol{\alpha}+4\boldsymbol{\beta}$; (2) $[3\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]$; (3) $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的夹角.

2. 已知 2 维向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 夹角为 $\frac{\pi}{3}$,$\|\boldsymbol{\alpha}\|=3$,$\|\boldsymbol{\beta}\|=6$,求以向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 为相邻边的平行四边形的面积.

3. 已知向量 $\boldsymbol{\alpha}=(1,0)$,$\boldsymbol{\beta}=(u,v)$,且 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 正交,$\|\boldsymbol{\beta}\|=1$,求实数 u,v.

4. 证明:$\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\|^2=\|\boldsymbol{\alpha}\|^2+2[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]+\|\boldsymbol{\beta}\|^2$.

5. 由柯西-施瓦茨不等式:$[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]^2 \leqslant \|\boldsymbol{\alpha}\|^2\ \|\boldsymbol{\beta}\|^2$,证明三角不等式:$\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\| \leqslant \|\boldsymbol{\alpha}\|+\|\boldsymbol{\beta}\|$.

6. 用向量知识证明平面上在相邻边长固定的平行四边形中,矩形面积最大.

8.2　线性方程组的概念及形式

8.2.1　线性方程组的概念

定义 8.2.1　由 m 个关于 n 个未知量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的一次方程组成的方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \quad\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \tag{8-3}$$

称为 n 元线性方程组，其中 $a_{ij}\,(i=1,2,3,\cdots,m;j=1,2,3,\cdots,n)$ 和 $b_i\,(i=1,2,3,\cdots,m)$ 为已知数，使得(8-3)中每个方程均成立的未知数 $x_j\,(j=1,2,3,\cdots,n)$ 的取值叫做方程组(8-3)的解.

线性方程组是线性代数研究的主要对象之一，在许多实际问题中有着广泛的应用. 本课程中诸多内容都是围绕如何求解 n 元线性方程组来展开的.

例如，$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=3, \\ x_1-x_2=0 \end{cases}$ 就是一个 3 元线性方程组，而 $\begin{cases} x_1=1, \\ x_2=1, \\ x_3=1 \end{cases}$ 就是该方程组的一个解，但要注意这并不是唯一解.

8.2.2　线性方程组的向量形式

若记 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n=\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$，按照向量的线性运算性质，方程组(8-3)也可以写成

$$\boldsymbol{\alpha}_1x_1+\boldsymbol{\alpha}_2x_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_nx_n=\boldsymbol{\beta} \tag{8-4}$$

我们将其称为 n 元线性方程组的向量形式.

例如，方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=3, \\ x_1-x_2=0 \end{cases}$ 也可以写成 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}x_1+\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}x_2+\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}x_3=\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

8.2.3　线性方程组的"表格"形式

事实上，将方程组(8-3)中的 $x_j\,(j=1,2,3,\cdots,n)$ 替换成 $y_j\,(j=1,2,3,\cdots,n)$ 对方程组解的情况不会产生任何实质上的影响，因此方程组的解仅依赖于那些已知数以及这些数的排列顺序，也就是说已知数以及其排列顺序决定了方程组. 因此也可以将方程组(8-3)以这样的形式来表现，如表 8-2 所示.

表 8-2

x_1	x_2	$\cdots$	x_n	等号右端常数
a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	b_1
a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	b_2
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	b_m

当然表格的第一行是可以去掉的.

例如,方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$ 也可以表示成

1	1	1	3
1	−1	0	0

习　题　8.2

1. 将下列线性方程组分别表示为向量形式和"表格"形式:

(1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 7, \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_3 - x_4 = -1, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 2; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 4, \\ x_1 - x_2 - x_3 = -1, \\ 2x_1 - 4x_2 - 5x_3 = 1. \end{cases}$

2. 某城市交通管理部门为了制订四条单行道交通流量控制方案,给出如图 8-1 所示的每天交通高峰时路段交通流量图.

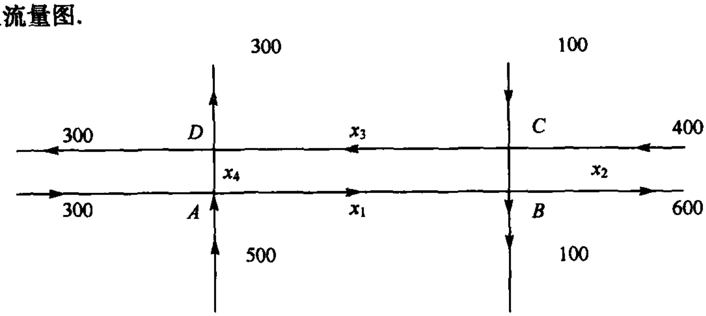

图 8-1

其中每一路段的车流量数(单位:辆/小时)及其方向分别用一个数及箭头表示, x_1, x_2, x_3, x_4 表示所考虑的四个路段的待定车流量数, A,B,C,D 表示四个十字路口. 为了使四个路口不发生车辆拥堵现象,必须保持每个路口进出的车辆数平衡. 请给出车流控制方案.

8.3　矩阵的线性运算及初等变换

已经知道方程组(8-3)可以用表 8-1 的形式来体现，如果将这个表进一步简化，仅保留原有数值大小和数之间结构，就会得到一个没有表头和表格线的矩形“数表”：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

这个矩形“数表”就唯一地确定了一个线性方程组.

再如，设在某一地区，某一物资(如钢铁)有 s 个产地 $A_1, A_2, \cdots, A_s$ 和 n 个销地 $B_1, B_2, \cdots, B_n$，那么一个调运方案就可用一个矩形“数表”

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & \cdots & B_n \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_s \end{array} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s1} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix} \end{array}$$

来表示，其中 a_{ij} 表示由产地 A_i 运到销地 B_j 的数量.

像这样既与数值大小有关又与数之间结构有关的问题在现实世界中广泛存在，而其对应矩形“数表”就是这些问题的实质，因此，要解决这些问题就需要对矩形“数表”进行进一步的研究.

8.3.1　矩阵的概念及特殊矩阵

定义 8.3.1　给出 $m \times n$ 个数，排成按一定顺序的 m 行 n 列矩形数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

此数表叫做 m 行 n 列矩阵，简称 $m \times n$ 矩阵. 矩阵一般用大写字母 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \cdots$ 表示，有时亦记为 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$，或 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$，或 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$.

在 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中，如果 $m = n$，就称 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵.

如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素 $\boldsymbol{A}_{ij}$ 全为实(复)数，就称 $\boldsymbol{A}$ 为实(复)矩阵. 如无特殊说明，本书中的矩阵都指实矩阵.

只有一行的矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n)$ 叫做行矩阵，为避免元素间的混淆，行矩阵也记作 $\boldsymbol{A} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$.

只有一列的矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

叫做列矩阵. 行(列)矩阵实质就是行(列)向量.

当两个矩阵的行数相等、列数也相等时,称它们是同型矩阵.

元素都是零的矩阵称为零矩阵,记作 $\boldsymbol{O}$, 注意不同型的零矩阵是不同的.

方阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

叫做 n 阶单位矩阵,简记作 $\boldsymbol{E}_n$. $\boldsymbol{E}_n$ 的特点是:从左上角到右下角的直线(主对角线)上的元素都是 1,其他元素都是 0.

在许多实际问题中,会遇到一组变量由另一组变量线性表示的问题,如变量 y_1, $y_2,\cdots,y_m$ 可由变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 线性表示,即

$$\begin{cases} y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n, \\ y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n, \\ \qquad\qquad\cdots\cdots \\ y_m=a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n \end{cases}$$

称这种由变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 到变量 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 的变换为线性变换,它的系数构成一矩阵 $(a_{ij})_{m\times n}$ (称为系数矩阵)是确定的. 反之,如果给出了一个矩阵是线性变换的系数矩阵,则线性变换也就确定了. 从这个意义上讲,线性变换与矩阵之间存在着一一对应的关系,因此可以利用矩阵来研究线性变换.

例 1　线性变换

$$\begin{cases} y_1=\lambda_1x_1, \\ y_2=\lambda_2x_2, \\ \quad\cdots\cdots \\ y_n=\lambda_nx_n \end{cases}$$

对应 n 阶方阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

这个方阵的特点是：不在对角线上的元素全为 0，这种方阵称为对角矩阵. 当 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = \lambda$ 时，$\boldsymbol{A}$ 称为数量矩阵.

8.3.2　矩阵的线性运算

例 2　如果三个门市部销售四种计算机(单位：台)，在某两个月内的销售情况矩阵分别为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 150 & 200 & 100 & 0 \\ 170 & 300 & 50 & 210 \\ 320 & 160 & 10 & 230 \end{pmatrix}$$

及

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 100 & 300 & 90 & 10 \\ 130 & 200 & 250 & 200 \\ 280 & 150 & 100 & 170 \end{pmatrix}$$

那么，在这两个月内三个门市部销售四种计算机的销售情况可以由矩阵

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 250 & 500 & 190 & 10 \\ 300 & 500 & 300 & 410 \\ 600 & 310 & 110 & 400 \end{pmatrix}$$

表示，其中矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的第 i 行第 j 列元素恰好是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的第 i 行第 j 列元素之和.

定义 8.3.2　设有两个 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$，$\boldsymbol{B} = (b_{ij})$，那么 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和记为 $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$，规定

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

注意，只有当两个矩阵同型时，才能进行加法运算.

由于矩阵的加法归结为他们的元素的加法，也就是数的加法，所以，不难验证加法满足运算规律：

(1) $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}$；(交换律)

(2) $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C})$. (结合律)

例 3　如果三个门市部销售四种计算机(单位：台)，在第一月内的销售情况矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 150 & 200 & 100 & 0 \\ 170 & 300 & 50 & 210 \\ 320 & 160 & 10 & 230 \end{pmatrix}$$

并且第二个月计算机的销售量全部比第一个月增加 10%，那么在第二个月内三个门市部销售四种计算机的销售情况可以由矩阵

$$D=\begin{pmatrix}165 & 220 & 110 & 0\\187 & 330 & 55 & 231\\352 & 176 & 11 & 253\end{pmatrix}$$

表示,其中 $\boldsymbol{D}$ 的所有元素恰好是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的对应元素的 1.1 倍.

定义 8.3.3　数 λ 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的乘积记作 $\lambda\boldsymbol{A}$,规定

$$\lambda\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n}\\\lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n}\\\vdots & \vdots & & \vdots\\\lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn}\end{pmatrix}$$

数乘矩阵满足下列运算规律:

(1) $(\lambda\mu)\boldsymbol{A}=\lambda(\mu\boldsymbol{A})$;

(2) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{A}$;

(3) $\lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\lambda\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}$.

设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$,记 $-\boldsymbol{A}=(-1)\cdot\boldsymbol{A}=(-1\cdot a_{ij})=(-a_{ij})$,$-\boldsymbol{A}$ 称为的 $\boldsymbol{A}$ 负矩阵,显然有 $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$,其中 $\boldsymbol{O}$ 为各元素均为 0 的同型矩阵.由此规定 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$.

矩阵的加法及矩阵与数的乘法统称为矩阵的线性运算.

容易证明,矩阵的线性运算满足下列八条运算规律(设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 为同型矩阵;λ,μ 为数):

(1) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$;

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$;

(3) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}$;

(4) $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$;

(5) $1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$;

(6) $\lambda(\mu\boldsymbol{A})=(\lambda\mu)\boldsymbol{A}$;

(7) $\lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\lambda\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}$;

(8) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{A}$.

例 4　已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\-1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\0 & -3 & 1\end{pmatrix}$,求 $2\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{B}$ 及 $2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{B}$.

解

$$\begin{aligned}2\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{B}&=2\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\-1 & 0 & 1\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\0 & -3 & 1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}2 & 4 & 0\\-2 & 0 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 3 & 3\\0 & -9 & 3\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}5 & 7 & 3\\-2 & -9 & 5\end{pmatrix}\end{aligned}$$

同理

$$2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & -3\\ -2 & 9 & -1\end{pmatrix}$$

8.3.3　消元法与矩阵的初等变换

在实际问题中，我们经常要研究一个线性方程组的解，解线性方程组最常用的方法就是消元法，其步骤是逐步消除变元的系数，把原方程组化为等价的三角形方程组，再用回代过程解此等价的方程组，从而得出原方程组的解.

例 5　解线性方程组

$$\begin{cases}2x_1+2x_2+3x_3=3,\\ -2x_1+4x_2+5x_3=-7,\\ 4x_1+7x_2+7x_3=1\end{cases}$$

解　将第一个方程加到第二个方程，再将第一个方程乘以(−2)加到第三个方程得

$$\begin{cases}2x_1+2x_2+3x_3=3,\\ \qquad 6x_2+8x_3=-4,\\ \qquad 3x_2+x_3=-5\end{cases}$$

在上式中交换第二个和第三个方程，然后把第二个方程乘以−2 加到第三个方程得

$$\begin{cases}2x_1+2x_2+3x_3=3,\\ \qquad 3x_2+x_3=-5,\\ \qquad\qquad 6x_3=6\end{cases}$$

再回代，得 $x_3=1, x_2=-2, x_1=2$.

分析上述例子，可以得出两个结论：

(1) 我们对方程施行了三种变换：①交换两个方程的位置；②用一个不等于 0 的数乘某个方程；③用一个数乘某一个方程加到另一个方程上.

这三种变换叫做线性方程组的初等变换.

由初等代数可知，以下定理成立.

定理 8.3.1　初等变换把一个线性方程组变为一个与它同解的线性方程组.

(2) 线性方程组有没有解，以及有些什么样的解完全取决于它的系数和常数项，因此在讨论线性方程组时，主要是研究它的系数和常数项.

定义 8.3.4　线性方程组(8-3)的系数所组成的矩阵叫做线性方程组的系数矩阵，把系数及常数所组成的矩阵叫做增广矩阵.

设线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \qquad\cdots\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}$$