普通高等教育“十二五”规划教材
21世纪高等学校创新教材

# 工程数学·复变函数与积分变换教程

罗　进　刘任河　彭章艳　主编

科学出版社

## 内容简介

本书包括复变函数与积分变换两部分内容.复变函数内容有:复数与平面区域、复变函数、解析函数、复变函数的积分、级数、留数理论、共形映射;积分变换内容有:傅里叶变换、拉普拉斯变换.每章末附有部分著名数学家简介.书后附有傅里叶变换简表和拉普拉斯变换简表,可供学习时查用.各章习题均配有答案.

本书例题丰富,论证严谨,讲述清晰,易教易学.

本书可作为理工科大学有关专业的本科教材,也可供科技、工程技术人员参考.

**图书在版编目(CIP)数据**

工程数学：复变函数与积分变换教程/罗进，刘任河，彭章艳主编.—北京：科学出版社，2011.11

普通高等教育“十二五”规划教材　21世纪高等学校创新教材

ISBN 978-7-03-032733-8

Ⅰ.①工…　Ⅱ.①罗…②刘…③彭…　Ⅲ.①工程数学-高等学校-教材②复变函数-高等学校-教材③积分变换-高等学校-教材　Ⅳ.①TB11②O174.5③O177.6

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第229694号

责任编辑：王雨舸／责任校对：董艳辉

责任印制：彭　超／封面设计：苏　波

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

武汉市新华印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

开本：B5(720×1000)

2011年11月第一版　　印张：12 1/4

2011年11月第一次印刷　　字数：232 000

**定价：22.00元**

(如有印装质量问题，我社负责调换)

# 前　　言

尽管长期从事《复变函数与积分变换》课程教学，但编写一本适合理工科相关专业使用的课程优秀教材，并不是一件容易的事.

为使教材能更好地适应后续理工科专业课程的教学，我们重新仔细研读了国家教育部制定的关于《复变函数与积分变换》课程的教学基本要求，并多次请教有关专业的老师，了解课程应用背景，在此基础上制定了教材编写计划，并经多次修改成稿. 几年来，本书的几位作者在此过程中付出了大量劳动，经常在一起备课，修改讲义，做了许多卓有成效的工作，这本教材的出版是对多年付出最好的回报.

编写本书的目的是为理工科相关专业的学生提供一本比较系统完整的《复变函数与积分变换》教材，"易教易学"是贯穿整个编写过程的宗旨. 编写本书时，我们注意把握以下几个方面：

(1) 吸取国内外同类教材的优点，保持本课程传统的知识体系.

(2) 注重教学内容在后续专业课程中的应用，在不破坏理论严谨性的前提下，更多关注方法的讲授，有目的地培养学生应用所学知识解决相关专业理论与实际问题的能力.

(3) 讲述清晰，推证简洁，可读性强.

(4) 习题量大，既有基础题，也有难度较大的提高题，可以满足不同层次学生的需要.

(5) 每章末附有一位世界著名数学家简介，希望可以激发读者学习的热情和兴趣.

这里对初学者特别值得一提的是，《复变函数与积分变换》是《实变函数》、《微积分》的推广与发展，因此，它不仅在内容上与《实变函数》、《微积分》有许多类似之处，而且在研究问题的方法和逻辑结构上也很类似. 当然，《复变函数与积分变换》也有自身的特点，它有自己的体系和研究方法，因此，在学习过程中，应注意与《实变函数》、《微积分》理论进行比较，同时必须特别注意分清异同，融会贯通，掌握其自身所固有的理论和方法.

全书共分九章，复变函数部分七章，需讲授约 30 学时；积分变换部分两章，需讲授约 20 学时.

# 目 录

# 第一章　复数与平面区域

本章主要讨论复数的基本概念、复数的四则运算、常见的几种复数的表示，平面点集的一般概念及无穷远点与复球面，为以后各章内容的学习奠定基础.

## 第一节　复数及其四则运算

### 一、复数的基本概念

用任意实数 $x$，$y$ 及虚数单位 i 表示为 $x+\mathrm{i}y$ 的这种形式称为复数，并称 $x$，$y$ 分别为 $z$ 的实部与虚部. 记为

$$x = \mathrm{Re}(z), \quad y = \mathrm{Im}(z)$$

通常规定：

(1) $\mathrm{i}^2 = \mathrm{i} \cdot \mathrm{i} = -1$ 或 $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$.

(2) $0 + \mathrm{i}y = \mathrm{i}y$，即实部为零且虚部不为零的复数称为纯虚数.

(3) 任意两个复数不能比较大小.

由此易知

$$z_0 = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z_0) = 0, \quad \mathrm{Im}(z_0) = 0$$

我们常说的 $z_1$ 与 $z_2$ 相等，是设 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$，$z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$ 是两个复数，如果 $x_1 = x_2$，$y_1 = y_2$ 则称 $z_1$ 与 $z_2$ 相等.

### 二、复数的共轭及其性质

设 $z = x + \mathrm{i}y$，$\bar{z} = x - \mathrm{i}y$，称复数 $x + \mathrm{i}y$ 和 $x - \mathrm{i}y$ 为共轭复数，即复数 $z$ 的共轭复数常记为 $\bar{z}$.

共轭变换的基本性质：

$$x = \mathrm{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}, \quad y = \mathrm{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}}$$

$$\bar{\bar{z}} = z, \qquad z\bar{z} = [\mathrm{Re}(z)] + [\mathrm{Im}(z)]^2 = x^2 + y^2 \geqslant 0$$

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2, \qquad \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1\,\bar{z}_2, \qquad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \quad (z_2 \neq 0)$$

## 三、复数的四则运算

设复数 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1 \quad z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$,现在给出复数的运算定义:

(1) 加法. 复数

$$z = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + \mathrm{i}(y_1 + y_2)$$

从定义可以看出,复数的加法遵守交换律与结合律.

**交换律** $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

**结合律** $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$

(2) 减法. 复数的加法有逆运算,即减法

$$z = z_2 - z_1 = (x_2 - x_1) + \mathrm{i}(y_2 - y_1)$$

(3) 乘法. 两个复数 $z_1$, $z_2$ 相乘,可按多项式乘法法则进行,只需将结果中的 $\mathrm{i}^2$ 换成$-1$,即

$$z = z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + \mathrm{i}(x_1y_2 + y_1x_2)$$

也易验证,复数的乘法遵守交换律与结合律,且遵守乘法对于加法的分配律.

整次乘幂:是指 $n$ 个相等的数 $z$ 的乘积,称为复数 $z$ 的 $n$ 次乘幂. 即

$$z^n = \underbrace{z\cdots z}_{n个}$$

(4) 除法. 复数的除法是乘法的逆运算,

$$当\ z_2 \neq 0\ 时, \quad 即有 \quad z = \frac{z_1}{z_2}$$

这就是说,当 $x_2 + \mathrm{i}y_2 \neq 0$ (相当于 $x_2^2 + y_2^2 \neq 0$) 时

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + \mathrm{i}y_1}{x_2 + \mathrm{i}y_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \mathrm{i}\,\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

**例 1.1** 设 $z_1 = 1 + \mathrm{i} \quad z_2 = \sqrt{3} + \mathrm{i}$,求 $z_1z_2$

**解** 直接计算

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= (1+\mathrm{i})(\sqrt{3}+\mathrm{i}) = \sqrt{3} + \mathrm{i} + \sqrt{3}\mathrm{i} - 1 \\ &= (\sqrt{3} - 1) + \mathrm{i}(1 + \sqrt{3}) \end{aligned}$$

**例 1.2** 证明 $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{1}{2}(\bar{z} + z)$, $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{1}{2\mathrm{i}}(z - \bar{z})$

**证** 设 $z = x + \mathrm{i}y$ 则 $\bar{z} = x - \mathrm{i}y$,从而

$$\frac{1}{2}(z+\bar{z})=\frac{1}{2}(x+\mathrm{i}y+x-\mathrm{i}y)=x=\mathrm{Re}(z)$$

$$\frac{1}{2\mathrm{i}}(z-\bar{z})=\frac{1}{2\mathrm{i}}(x+\mathrm{i}y-x+\mathrm{i}y)=\frac{1}{2\mathrm{i}}(2\mathrm{i}y)=y=\mathrm{Im}(z)$$

故结论得证.

## 第二节　复数的几何表示

### 一、复数的复平面表示

在平面上取直角坐标，平面上的任一点可由一对实数唯一确定. 一个复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 与坐标平面上的点 $(x, y)$ 构成一一对应关系，此时直角坐标系称为复平面或 $z$ 平面. $x$ 轴称为实轴，$y$ 轴称为虚轴，点 $z(x, y)$ 即复数 $z$，如图 1 - 1 所示.

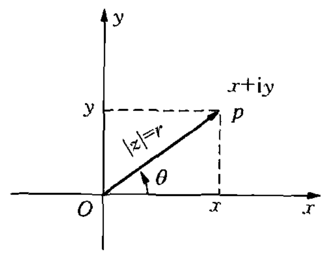


图 1 - 1

### 二、复数的向量表示

$z$ 可以用向量 $\overrightarrow{Op}$ 表示，如图 1 - 1 所示，向量的长度称为 $z$ 的模，以 $x$ 轴正向为始边，以 $\overrightarrow{Op}$ 为终边的角(弧度)称为 $z$ 的辐角.

以符号 $|z|$ 或 $r$ 表示复数 $z$ 的模或绝对值，则有

$$|z|=r=\sqrt{x^2+y^2}$$

用记号 $\arg z$ 表示 $z$ 的所有辐角中介于 $-\pi$ 与 $\pi$(包括 $\pi$)的那一个角并称它为 $z$ 的主辐角，即

$$-\pi<\arg z\leqslant\pi$$

从而辐角

$$\mathrm{Arg}\, z=\arg z+2k\pi\quad(k\in\mathbf{Z})$$

可见辐角有无穷多个.

这样有关平面向量的问题就有可能利用复变函数来研究. 从而复变函数论就逐渐被广泛地应用于理论物理、弹性力学、流体力学等学科，并成为重要的数学工具.

**例 1.3**　求复数 $z=\dfrac{(3+4\mathrm{i})(2-5\mathrm{i})}{2\mathrm{i}}$ 的实部、虚部、共轭复数、模与辐角.

**解**　首先将复数 $z$ 进行化简

$$\frac{(3+4\mathrm{i})(2-5\mathrm{i})}{2\mathrm{i}}=\frac{26-7\mathrm{i}}{2\mathrm{i}}=-\frac{7}{2}-13\mathrm{i}$$

于是有

$$实部\ \mathrm{Re}(z)=-\frac{7}{2},\quad 虚部\ \mathrm{Im}(z)=-13$$

共轭复数 $\bar{z}=-\dfrac{7}{2}+13\mathrm{i}$

模 $|z|=\sqrt{\left(-\dfrac{7}{2}\right)^2+13^2}=\dfrac{5}{2}\sqrt{29}$

主辐角 $\arg z=\arctan\dfrac{26}{7}-\pi$

辐角 $\mathrm{Arg}\, z=\arctan\dfrac{26}{7}-\pi+2k\pi\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

**注** 在此例中辐角的表示式稍微复杂些，要看 $z$ 在哪个象限而定. 对任意的实数 $\alpha$，用 $\arctan\alpha$ 表示 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内其正切为 $\alpha$ 的一个角，则有

$$\arg z=\begin{cases}\arctan\dfrac{y}{x}, & x>0,\ y\ 为任意实数\\ \dfrac{\pi}{2}, & x=0,\ y>0\\ \arctan\dfrac{y}{x}+\pi, & x<0,\ y\geqslant 0\\ \arctan\dfrac{y}{x}-\pi, & x<0,\ y<0\\ -\dfrac{\pi}{2}, & x=0,\ y<0\end{cases}$$

## 三、复数的三角表示及指数表示

设 $z$ 是一个不为 0 的复数，$r$ 是 $z$ 的模，$\theta$ 是 $z$ 的任意一个辐角，则

$$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$$

这个式子称为 $z$ 的三角表示式，一个复数的三角表示不是唯一的，因为其中的辐角有无穷多种选择.

应用欧拉公式，复数 $z$ 表示为 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，即为复数 $z$ 的指数形式.

**注意** 对于复数的代数形式、三角形式及指数形式可以相互转换，复数在不同

的运算中可选择不同的表示式以便进行简便运算.

**例 1.4**　设 $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$,试将复数 $z=1+\sin\varphi+\mathrm{i}\cos\varphi$ 化为三角表示式与指数表示式.

**解**　因为

$$|z|=\sqrt{(1+\sin\varphi)^2+\cos^2\varphi}=\sqrt{2(1+\sin\varphi)}$$

依题意 $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$,故

$$|z|=\sqrt{2}\left(\sin\frac{\varphi}{2}+\cos\frac{\varphi}{2}\right)=2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)=2\cos\frac{\pi-2\varphi}{4}$$

又

$$\arg z=\arctan\frac{\cos\varphi}{1+\sin\varphi}=\arctan\frac{\cos^2\frac{\varphi}{2}-\sin^2\frac{\varphi}{2}}{\left(\cos\frac{\varphi}{2}+\sin\frac{\varphi}{2}\right)^2}$$

$$\arg z=\arctan\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)}=\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}=\frac{\pi-2\varphi}{4}$$

故原式的三角表示式为

$$2\cos\frac{\pi-2\varphi}{4}\left(\cos\frac{\pi-2\varphi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi-2\varphi}{4}\right)$$

指数表示式为

$$2\cos\frac{\pi-2\varphi}{4}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi-2\varphi}{4}}$$

## 四、复数的乘方与开方

**1. 乘方**

记 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$, $z^n$($n$ 是一个正整数),即是 $n$ 个 $z$ 相乘的积,则

$$z^n=[r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)]^n=r^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta)$$

特殊情形:$r=1$ 时,上式为

$$(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n=\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta$$

称为棣摩弗(De Moivre)公式.

**2. 开方**

称满足方程 $w^n = z\ (w \neq 0,\ n \geqslant 2)$ 的复数 $w$ 为 $z$ 的 $n$ 次方根,记为 $w = z^{\frac{1}{n}}$. 若设

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta), \quad w = \rho(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$$

于是有

$$[\rho(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)]^n = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$$

即有 $\begin{cases}\rho^n = r, \\ n\varphi = \theta + 2k\pi \quad (R\text{ 为任意整数}).\end{cases}$ 故有

$$w = r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(\frac{1}{n}(\theta + 2k\pi)\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{1}{n}(\theta + 2k\pi)\right)\right] \quad (k = 0, 1, \cdots, n-1)$$

其几何意义:任意一个不为零的复数开 $n$ 次方,所得的结果是多值的,开 $n$ 次方就有 $n$ 个值(根),且在复平面上这 $n$ 个点形成一个以原点为中心的正 $n$ 边形的顶点,它们同原点的距离是 $|z|^{\frac{1}{n}}$,其中一个点的辐角是 $\frac{1}{n}\arg z$.

**例 1.5** 已知 $z_1 = \sqrt{3} - \mathrm{i}$, $z_2 = -\sqrt{3} + \mathrm{i}$,求 $\dfrac{z_1^8}{z_2^4}$.

**解** 因为

$$z_1 = \sqrt{3} - \mathrm{i} = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$z_2 = -\sqrt{3} + \mathrm{i} = 2\left[\cos\frac{5\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{6}\right]$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{z_1^8}{z_2^4} &= \frac{2^8\left[\cos\left(-\frac{8\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{8\pi}{6}\right)\right]}{2^4\left[\cos\left(\frac{20}{6}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{20}{6}\pi\right)\right]} \\ &= 2^4\left[\cos\left(-\frac{28}{6}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{28}{6}\pi\right)\right] \\ &= -8(1 + \sqrt{3}\mathrm{i})\end{aligned}$$

**例 1.6** 计算 $\sqrt[4]{1+\mathrm{i}}$.

**解** 因为

$$1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

所以

$$\sqrt[4]{1+\mathrm{i}}=\sqrt[8]{2}\left[\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}\right]\quad(k=0,1,2,3)$$

其 4 个根为

$$w_1=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{16}\right)$$

$$w_2=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{16}+\mathrm{i}\sin\frac{9\pi}{16}\right)$$

$$w_3=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{17}{16}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{17}{16}\pi\right)$$

$$w_4=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{25}{16}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{25}{16}\pi\right)$$

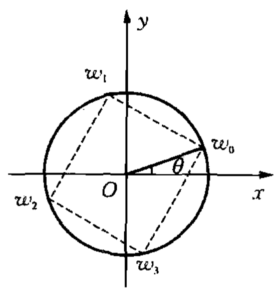

图 1-2

这 4 个根是以原点为中心，半径为 $\sqrt[8]{2}$ 的圆内接正四边形的 4 个顶点，$w_0$ 的辐角为 $\theta=\frac{\pi}{16}$，如图 1-2 所示.

## 第三节 平面点集

在前面，我们已经说过，对于坐标平面 $xOy$，都可以用坐标$(x,y)$的点来表示复数 $z=x+\mathrm{i}y$，这样，全部复数与平面上一切点之间就是一一对应关系，而对于一些特殊的平面点集，我们将采用复数所满足的等式或不等式来表示.

### 一、平面点集

**1. 邻域**

在平面上以 $z_0$ 为中心，$\delta\,(>0)$为半径的圆 $|z-z_0|<\delta$ 内部点的聚合称为 $z_0$ 的 $\delta$ 邻域. 记为 $U(z_0,\delta)$，简称为 $z_0$ 的邻域.

集合 $0<|z-z_0|<\delta$ 称为 $z_0$ 的去心邻域.

**2. 聚点**

如果点 $z_0$ 的任何邻域中都含有平面点集 $E$ 中无穷多个点，那么称 $z_0$ 为 $E$ 的聚点.

**3. 内点**

若 $z_0$ 属于 $E$，且存在 $z_0$ 的某一邻域完全含于 $E$，则称 $z_0$ 为 $E$ 的内点.

**4. 开集**

若集合 $E$ 中每一点均为 $E$ 的内点，则称 $E$ 为开集.

**5. 连通集**

若 $E$ 中任意两点都可以用完全属于 $E$ 的折线把它们连接起来，则称 $E$ 为连通集.

区域(或开区域)：就是连通的开集称为区域或开区域.

界点：若 $z_0$ 的任一邻域内既有属于区域 $E$ 的点，又有不属于 $E$ 的点，则称 $z_0$ 为区域 $E$ 的界点.

边界：区域 $E$ 的全体界点，称为 $E$ 的边界.

闭区域：区域 $E$ 及其边界所组成的点集，称为闭区域.

有界区域：若区域 $E$ 的所有点都包含在一个以原点为中心，某个充分大的正数 $M$ 为半径的圆内，则称区域 $E$ 为有界区域.

无界区域：当 $M$ 不存在时，则称 $E$ 为无界区域.

**例 1.7** 复平面 $C$ 及实轴、虚轴都是无界集，复平面 $C$ 是无界开集.

**例 1.8** 证明：由圆 $|z-1|<1$ 与 $|z+1|<1$ 的内部所成的集合 $E$ 是开集，但不是区域.

**证** 如图 1-3 所示，因为 $E$ 全部由内点组成，所以 $E$ 是开集，但是 $E$ 不是连通的. 对于 $|z-1|<1$ 内任一点 $z_1$ 和 $|z+1|<1$ 内任一点 $z_2$ 无法用一条完全属于 $E$ 的折线连接起来，所以 $E$ 不是一个区域.

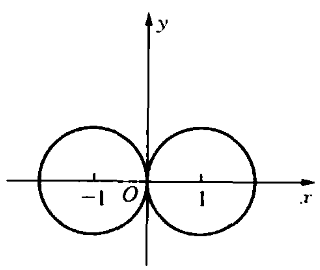

图 1-3

## 二、平面曲线

设曲线

$$C: z = z(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t) \quad (a \leqslant t \leqslant b)$$

在这里 $\mathrm{Re}z(t)$ 及 $\mathrm{Im}z(t)$ 都在闭区间$[a, b]$上连续，集$\{z(t) \mid t \in [a, b]\}$称为一条连续曲线.

**1. 简单闭曲线**

当 $C$ 为连续曲线，对 $a<t_1<b$，$a\leqslant t_2\leqslant b$，当 $t_1\neq t_2$，而有 $z(t_1)=z(t_2)$ 时，点 $z(t_1)$ 称为曲线 $C$ 的重点. 没有重点的连续曲线 $C$，称为简单(或若尔当(Jardan))曲线，如果简单曲线 $C$ 的两个端点重合，则 $C$ 称为简单闭曲线.

由以上定义知，简单曲线自身不相交，简单闭曲线只有起点与终点重合.

在几何直观上，简单曲线是平面上没有“打结”情形的连续曲线，即简单曲线自身是不会相交的.

如图 1-4 所示为简单曲线，其中 $C_1$ 为简单曲线，$C_2$ 为简单、闭曲线.

如图 1-5 所示都不是简单曲线，$C_3$ 不简单、闭曲线，$C_4$ 不简单、不闭曲线.

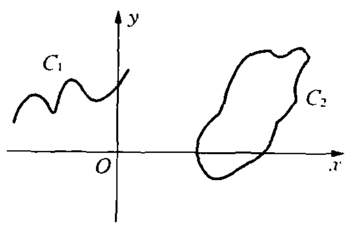


图 1-4

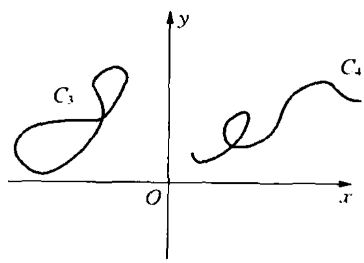


图 1-5

**2. 光滑曲线**

$$C:\ z=z(t)=x(t)+\mathrm{i}y(t),\quad a\leqslant t\leqslant b$$

当 $x'(t)$ 与 $y'(t)$ 连续且 $[x'(t)]^2+[y'(t)]^2\neq 0$ 时 $C$ 称为光滑曲线，由若干段光滑曲线衔接而成的曲线称为分段光滑曲线.

**若尔当曲线定理**　任一简单闭曲线将平面分成两个区域，它们都以该曲线为边界，其中一个为有界区域，称为该简单闭曲线的内部；另一个为无界区域，称为外部.

**3. 单连通域**

若属于区域 $G$ 的任何简单闭曲线 $C$ 的内部也属于 $G$，则称 $G$ 为单连通域，否则称为多连通域(或复连通区域).

如图 1-6 所示，$C_5$ 为单连通域；如图 1-7 所示，$C_6$ 为多连通域.

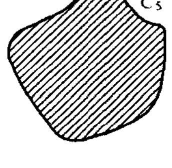


图 1-6

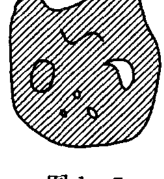


图 1-7

在几何直观上，单连通区域是一个没有“空洞”(点洞)和“缝隙”的区域，而多连通域是有“洞”或“缝隙”的区域，它可以是由曲线 $C$ 所围成的区域中挖掉几个洞，除去几个点或一条线段而形成的区域.

**例 1.9** 集 $\{z \mid 4 < \arg(z-\mathrm{i}) < 5\}$ 为一角形，它是一个单连通无界区域，其边界为半射线

$$\arg(z-\mathrm{i}) = 4 \quad \arg(z-\mathrm{i}) = 5$$

**例 1.10** 对于不等式 $2\bar{z}-(2+\mathrm{i})z-(2-\mathrm{i})\bar{z} \leqslant 4$，描述它所确定的区域或闭区域，并指明它是有界的还是无界的?单连通的还是多连通的?

**解** $2\bar{z}-(2+\mathrm{i})z-(2-\mathrm{i})\bar{z} \leqslant 4$

可写成

$$x^2+y^2-(2+\mathrm{i})(x+\mathrm{i}y)-(2-\mathrm{i})(x-\mathrm{i}y) \leqslant 4$$

化简，得

$$x^2+y^2+2y-4x \leqslant 4 \quad 或 \quad (x-2)^2+(y+1)^2 \leqslant 9$$

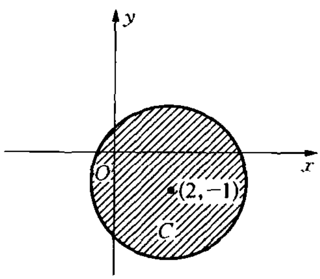


图 1-8

则该不等式是以(2，−1)为圆心，3 为半径的圆周及其内部，这是一个有界单连通闭区域，如图 1-8 所示.

## 第四节 无穷远点及复球面

### 一、无穷远点

无穷大及无穷远点同为同义语，正常的复数与复平面上的点往往称为有限复数及有限点，对于特殊的复数——无穷大，记为∞，复数∞，实部和虚部以及辐角的概念都没有意义，它是由 $\infty = \dfrac{1}{0}$ 来定义的.

至于它的模，则约定为 $+\infty$ $(|\infty| = +\infty)$.

为了以后需要，设 $\alpha$ 为有限复数，引进下列运算的意义：

$$\alpha \pm \infty = \infty \pm \alpha = \infty$$

$$\alpha \cdot \infty = \infty \cdot \alpha = \infty \quad (\alpha \neq 0)$$

$$\frac{\alpha}{0} = \infty \quad (\alpha \neq 0)$$

$$\frac{\alpha}{\infty} = 0 \quad (\alpha \neq \infty)$$

对于运算 $\infty \pm \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{0}{0}$ 及 $\frac{\infty}{\infty}$ 都没有意义.

在复平面上设有一点与 $\infty$ 相对应,但我们可设想复平面上有一个点为无穷远点. 复平面加上无穷远点称为扩充复平面,扩充复平面上的每一条直线都通过无穷远点.

## 二、复球面

一个球与复平面相切于原点 $S$,过原点作垂直于平面的直线交球于 $N$ 点,则 $S$, $N$ 分别称为球的南极与北极. 由于这样的球与扩充的复平面存在特别的一一对应,常称此球面为复球面. 如图 1-9 所示.

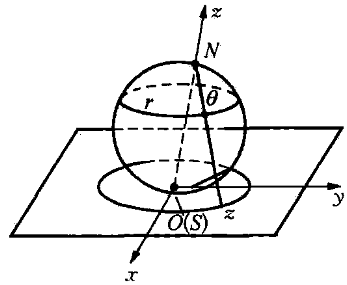


图 1-9

对于构造的这一几何模型,在这个模型上;扩充复平面上的每一个点都有具体的表示. 为此,考察三维空间 $R^3$ 中的单位球面

$$S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

用 $N = (0, 0, 1)$ 表示 $S^2$ 的北极,任取点

$$\theta = (x_1, x_2, x_3) \in R^3, \quad \theta \in S^2 - \{N\}$$

连接 $N$ 与 $\theta$ 的直线交平面 $xOy$ 于一点 $z$. 设

$$z = x + \mathrm{i}y \to P = (x, y, 0)$$

这个对应 $\theta \to P$ 是以 $N$ 为中心的中心投影,称其为球极平面投影.

这就建立起球面上的点(不包括 $N$ 点)与平面上的点(有限点)之间的一一对应关系,其中 $N$ 可看成是平面上无穷远点在球面上的图形. 这样,球面上的点与扩充平面上的点之间就完全一一对应了.

应该注意: 在实变数的情况下, $+\infty$ 与 $-\infty$ 是有区别的,它们分别是表示"点列"无穷增大与无穷减小的记号,而在复变数的情形下, $\infty$ 是没有符号的.

# 数学家简介

高斯,德国著名数学家、物理学家、天文学家、大地测量学家. 高斯被认为是历史上最重要的数学家,并有"数学王子"的美誉.

高斯幼时家境贫困,但聪敏异常. 1792 年,在当地公爵的资助下,不满 15 岁的高斯进入了卡罗琳学院学习. 在那里,高斯开始对高等数学作研究. 独立发现了二项式定理的一般形式、数论上的"二次互反律"(law of quadratic reciprocity)、"质数

高斯(Johann Carl Friedrich Gauss, 1777 年 4 月 30 日～1855 年 2 月 23 日,德国)

分布定理"(prime numer theorem)、及"算术几何平均"(arithmetic-geometric mean). 1795 年,高斯进入哥廷根大学. 1796 年,19 岁的高斯得到了一个数学史上极重要的结果,就是《正十七边形尺规作图之理论与方法》. 1798 年转入黑尔姆施泰特大学,翌年因证明代数基本定理获博士学位. 1801 年,高斯又证明了形如"Fermat 素数"边数的正多边形可以由尺规作出.

高斯的成就遍及数学的各个领域,在数论、非欧几何、微分几何、超几何级数、复变函数论以及椭圆函数论等方面均有开创性贡献. 他十分注重数学的应用,并且在对天文学、大地测量学和磁学的研究中也偏重于用数学方法进行研究.

高斯一生共发表 155 篇论文,他对待学问十分严谨,只是把他自己认为是十分成熟的作品发表出来. 批评者说他这样是因为极爱出风头. 实际上高斯"只是一部疯狂的打字机,将他的结果都记录起来". 在他死后,有 20 部这样的笔记被发现,才证明高斯的宣称是事实. 一般认为,即使这 20 部笔记,也不是高斯全部的笔记.

1855 年 2 月 23 日清晨,高斯在哥廷根于睡梦中去世.

高斯的一生是不平凡的一生,几乎在数学的每个领域都有他的足迹,无怪后人常用他的事迹和格言鞭策自己. 多年来,不少有才华的青年在高斯的影响下成长为杰出的数学家,并为人类的文化做出了巨大的贡献. 高斯的墓碑朴实无华,仅镌刻"高斯"二字. 为纪念高斯,其故乡布伦瑞克改名为高斯堡. 哥廷根大学立了一个正十七棱柱为底座的纪念像. 在慕尼黑博物馆悬挂的高斯画像上有这样一首题诗:他的思想深入数学、空间、大自然的奥秘,他测量了星星的路径、地球的形状和自然力,他推动了数学的进展,直到下个世纪.

# 习 题 一

1.1 判定下列命题的真假.

(1) 若 $c$ 为实常数,则 $c=\bar{c}$. ( )

(2) 若 $z$ 为纯虚数,则 $z\neq\bar{z}$. ( )

(3) $\mathrm{i}<2\mathrm{i}$. ( )

(4) 零的辐角是零. ( )

(5) 仅存在一个数 $z$,使得 $\dfrac{1}{z}=-z$. ( )