平面几何一题多解

翟连林 主编

北京出版社

中学数学智力开发丛书

中学数学智力开发丛书

平面几何一题多解

主编　翟连林

编者　张东海　周新民

张建成　张慎行

刘吉强　刘计刚

周维华　李寿高

北京出版社

（京）新登字200号

平面几何一题多解

Pingmian jihe Yiti Duojie

翟连林　主编

*

北 京 出 版 社 出 版

（北京北三环中路6号）

邮政编码：100011

北 京 出 版 社 总 发 行

新华书店北京发行所经销

北京市朝阳北苑印刷厂印刷

*

787×1092毫米　32开本　11.875印张　262 000字

1990年5月第1版　1993年6月第5次印刷

印数　60 701—64 700

ISBN 7-200-00889-3/G·385

定　价：5.70元

编写说明

培养正确迅速的运算能力、逻辑思维能力、空间想象能力以及分析问题和解决问题的能力，是中学数学教学中的一个重要任务。要完成这一任务，必须演算一定数量的题目。但不少自学青年和学生在演算习题时，往往只追求数量，而忽视有目的的总结、归纳，抓不住基本解题规律。这样尽管用了不少时间，费了很大精力，结果收效甚微。

长期的教学实践使我们体会到：恰当而又适量地采用一题多解的方法，进行思路分析，探讨解题规律和对习题的多角度"追踪"，能"以少胜多"地巩固基础知识，提高分析问题和解决问题的能力，掌握基本的解题方法和技巧。为此，总结我们多年来从事数学教学的经验，数学教材的编写以及指导初、高中毕业生进行数学复习的经验，编写了这套"中学数学智力开发丛书"。这套丛书包括：《初中代数一题多解》、《平面几何一题多解》、《高中代数一题多解》、《立体几何一题多解》、《平面三角一题多解》、《平面解析几何一题多解》、《高中数学综合题一题多解》。

在编写这套丛书时，我们力求作到以下两点：第一，紧密配合中学数学教学内容，帮助读者在理解课本知识的基础上，开阔视野，启迪思维；第二，内容编排循序渐进，结构新颖，对每道题目的多种解法，注重思路分析和解题规律的总结，以帮助读者从中领悟要点，掌握解数学题的常用方法及

基本解题规律。

在本书编写过程中，刘金玲、李维正、张树发、耿雪、董春容五位同志帮助核算，阮光南同志帮助绘图，在此一并表示感谢.

由于我们水平有限，书中不妥之处，敬请广大读者批评指正。

编者

1989年1月

目　　录

第一章　一题多解的意义与作用

解（证）平面几何题是深刻理解和牢固掌握平面几何基础知识和基本技能的根本手段。学习平面几何知识，不但要做一定数量的习题，还应该做到一题多解。这样做有以下好处：

1. 加深对基础知识的理解，促进基本技能的掌握。寻求平面几何题的多种解法，势必要复习和运用更多的数学基础知识，这就可以加深我们对数学概念、定理、公式的理解，并在实际运用中牢固掌握。熟能生巧，在基础知识的反复运用中，逐渐掌握解题的技能、技巧。基础知识学得好，才能联想丰富，思维流畅。

2. 促进基础知识的融会贯通。平面几何习题的多种解法中，除了不同的几何方法外，还经常用到代数法、三角法、解析法。这样就沟通了中学数学各科之间的联系，从而就能掌握各种基本概念之间的内在联系，使所学的数学知识融会贯通，运用起来得心应手。

3. 活跃思维，开阔思路。思维受阻，解题无法进行下去。如果从另一个角度，换一种方法，往往茅塞顿开。根据已知条件，沿着不同的方向，从不同角度进行广泛的联想，探索不同的解题方法，可以培养我们思维的灵活性、开阔性。不同常规的新颖独特的解题方法更是创造性思维的表现。

4. 增加解题兴趣，提高解题能力。解题方法应力求简

捷、巧妙.我们不能停留在一题多解上，而应从“多”中选“优”,比较、鉴别,找到最佳解法.这样能够培养我们严格地组织材料，迅速地进行筛选，作出结论的良好思维品质，从而提高我们的解题能力.如果采用简捷的思路和最优的解法，恰当地使用技巧，不仅会加快解题的速度，提高解题的准确性，还会增加解题兴趣，有利于培养我们的钻研能力和创造精神.

第二章　怎样培养一题多解能力

一、要有扎实的数学基础

解决问题的多种思路、方法与技巧来源于准确地掌握基础知识和严格的基本训练.要准确理解和运用数学概念，牢固记忆和灵活运用定理、公式等基础知识，还要对题目的特点进行认真的分析，对有关图形进行细致的观察，将涉及到的有关基础知识进行有机的联想.基础知识掌握得不准确，解题过程漏洞百出，就不可能顺利地达到目的.因此，在平常的学习中，不但要重视基础知识的学习，还要注意培养认真分析几何图形性质的习惯，要善于抓住图形的本质，克服不经认真审题、没有掌握图形性质就盲目动手解题的不良习惯.

二、掌握常用的数学方法

解决一个数学问题，往往是通过各种手段把它转化为已掌握的问题，用已掌握的方法加以解决.要转化就要会联想，联想已学过的有关知识和方法.比如，平移、旋转就是平面几何中常用的使问题转化的方法.请看：

例1 如图2-1所示，在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，D为$\triangle ABC$内一点，且$\angle ADB>\angle ADC$.**求证**：$DC>DB$.

我们知道，在一个三角形中，大边对大角．要证$DC>DB$，只须证$\angle CBD>\angle BCD$．但在$\triangle BCD$中，无法利用已知条件来比较这两个角的大小．因此可以利用旋转的方法，使问题转化，得到下面的证法．

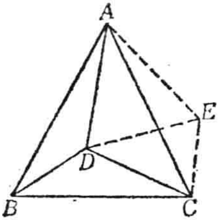

图 2-1

【证明】 将$\triangle ABD$绕A逆时针旋转，使AB落在AC上，这样，$\triangle ABD$便移至$\triangle ACE$位置上，则$\angle ADB=\angle AEC$．

$\because\quad \angle ADB>\angle ADC$，

$\therefore\quad \angle AEC>\angle ADC$．

连结DE．$\because\quad AD=AE$，

$\therefore\quad \angle ADE=\angle AED$．

则$\angle DEC>\angle EDC$，$DC>EC$．

又$\because\quad BD=EC$，$\therefore\quad DC>DB$．

在平面几何中，常用的证题方法是直接证法和间接证法．

在证明命题时，根据题设条件和已知的公理、定理，从正面入手一步一步地直接推得欲证的结论．这种方法叫直接证法．

当直接证明一个命题感到困难，甚至不能证明时，可采用间接证法．间接证法包括反证法和同一法．

所谓反证法，就是从否定结论（作出相反判断）出发，把相反的判断作为已知条件，在正确的逻辑推理下，导致逻辑矛盾，根据（逻辑学上）矛盾律，得知相反判断是错误的，再根据（逻辑学上的）排中律，而肯定原命题的判断本

身是正确的。

例2 如图2-2所示，在四边形$ABCD$中，对角线AC与BD相交于点O，已知$\angle A=\angle C$，$OB=OD$。求证：四边形$ABCD$为平行四边形。

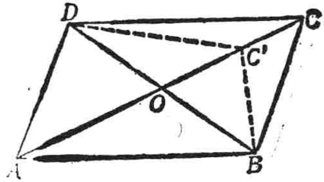

图 2-2

【证明】 假设$ABCD$不是平行四边形。

$\because$ $OB=OD$，则必有$OA\neq OC$，即$OA<OC$或$OA>OC$。

若 $OA<OC$，则可在OC上截取$OC'=OA$，连结BC'、DC'，则$ABC'D$为平行四边形。

$\therefore$ $\angle A=\angle BC'D=\angle BC'O+\angle OC'D$。

但 $\angle BC'O>\angle BCO$，$\angle OC'D>\angle OCD$，

$\therefore$ $\angle A>\angle BCO+\angle OCD=\angle BCD$。

这与已知 $\angle A=\angle C$相矛盾。

若$OA>OC$， 同理可证也是不可能的。

$\therefore$ 四边形$ABCD$是平行四边形。

例3 证明如果一个四边形有一对对角互补，那么这个四边形必可内接于圆。

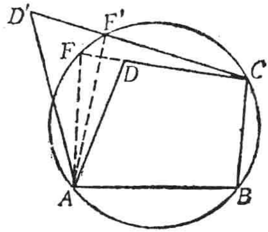

图 2-3

已知：如图2-3所示，在四边形$ABCD$中，$\angle ABC+\angle ADC=180°$。求证：$A$、$B$、$C$、$D$四点共圆。

【证明】 假定A、B、C、D四点不共圆。过A、B、C三点作$\odot O$，那么D点可能在$\odot O$内或$\odot O$外。

若D在$\odot O$内，延长CD交$\odot O$于F，连结AF，

则 $\angle F+\angle ABC=180°$.

又已知$\angle ADC+\angle ABC=180°$，

$\therefore$ $\angle F=\angle ADC$ ①

又 $\angle ADC$为$\triangle ADF$的外角，

$\therefore$ $\angle F<\angle ADC$ ②

①与②矛盾， $\therefore$ D不能在$\odot O$内.

同理可证D也不能在$\odot O$外.

这就是说，A、B、C、D不共圆是不可能的，

$\therefore$ A、B、C、D四点共圆.

运用反证法证题，在"归谬"时不一定非要推出与已知条件相矛盾，只要运用正确的逻辑推理，推出与已知的公理、定义、定理相矛盾，或与假定相矛盾，都是可以的.

当定理的条件与结论所指的事件是唯一的，且范围相同，根据同一法则，定理的逆命题一定真实.这时若证原命题不易入手，可改证原命题的逆命题，这样也可收到同样的效果.这种证明方法也是一种间接证法，叫做同一法.

用同一法证题时一般有如下步骤：（1）先另外作一个具有命题所述属性的部分图形.（2）证明这个图形与已知条件符合.（3）根据同一性说明所作图形与原命题要求的图形是一致的.（4）判定命题所述图形具有某种属性.

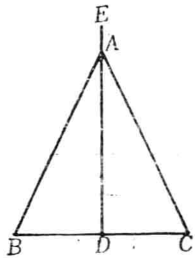

图 2-4

例4 证明等腰三角形底边的垂直平分线过顶点.

已知：如图2-4所示，$\triangle ABC$中，$AB=AC$，$BD=DC$，$DE\perp BC$.求证：

DE过A点.

【证明】 连结AD.

则　$\triangle ABD \cong \triangle ACD$,

$\therefore$　$\angle ADB = \angle ADC = 90°$.

$\therefore$　AD是BC的垂直平分线.

但DE是BC的垂直平分线，且BC的垂直平分线是唯一的，

$\therefore$　DE与AD必重合，即它们是同一的，所以，DE过点A.

证题时不论用直接证法还是用间接证法，都需要通过思维方法以寻求证明的思路，这种思维的方法按思路的顺逆分为综合与分析两种.

如果思考路线是从已知条件出发，逐步推理，得出待证的结论，这种思维方法叫做综合法.简单地说，综合法就是执因索果的方法.

例5　设M、N分别是▱$ABCD$的边BC、AD的中点，试证明　AM、CN必三等分BD于E、F.

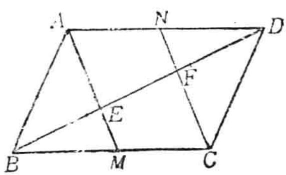

图 2-5

如图2-5所示，已知：M、是N▱$ABCD$的边BC、AD的中点，AM、CN分别交BD于E、F. 求证　$BE = EF = FD$.

证题时，若用综合法思索，其思路可如图2-6所示.

证题时，如果思考的路线是从“未知”追索“已知”，即从“未知”到“已知”，这种思维的方法叫做“分析法”，也就是“由果索因”的方法.

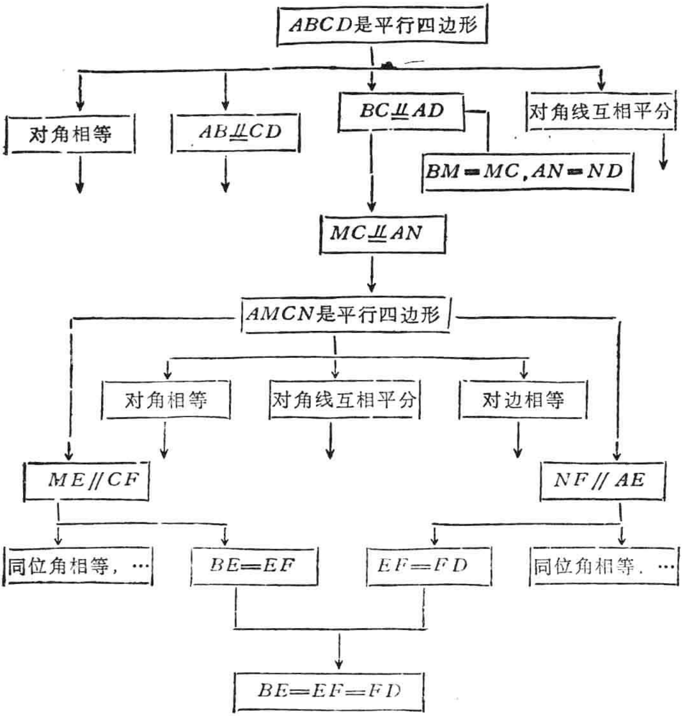

图 2-6

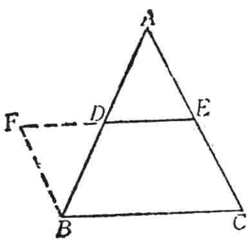

图 2-7

例6 证明三角形两边中点连线平行于第三边，且等于第三边的一半。

如图2-7所示，已知：$\triangle ABC$中，$AD=DB$，$AE=EC$。求证：$DE \parallel BC$，$DE=\frac{1}{2}BC$。

用分析法的思路如下：（1）要证$DE \parallel BC$，且$DE = \frac{1}{2}BC$，只要延长ED至F，使$EF = 2DE$，证明$EF \parallel BC$且$EF = BC$.（2）要证明两线段平行且相等，只要证明$BCEF$是平行四边形.（3）根据图形的结构，要证$BCEF$是平行四边形，只须证$BF \perp\!\!\!\!= CE$.为此，又须证$\triangle BDF \cong \triangle ADE$.（4）根据已知条件和图形特征，显然$\triangle BDF \cong \triangle ADE$.

分析至此，思路已通.

对于比较复杂的几何题，则常常是同时从“已知”和“未知”出发，经过逻辑推理找出解题途径.这种思维方法叫做分析综合法，也叫“两头挤”法.

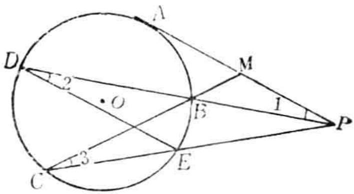

图 2-8

例7 如图2-8所示，自$\odot O$外一点P作$\odot O$的切线PA，切点为A.再由PA的中点M作$\odot O$的割线，交$\odot O$于B、C两点.PB、PC分别交$\odot O$于D点和E点.求证：$ED \parallel PA$.

先从已知出发：

$\because$ MA是$\odot O$的切线，

则由圆幂定理，得$MA^2 = MB \cdot MC$.

又已知 $MA = MP$， 则 $MP^2 = MB \cdot MC$.

到这一步还不能看出下边该怎么办，再从待证结论出发来考虑：

欲证$ED \parallel PA$，须证$\angle 1 = \angle 2$.

注意到位于同弧上的圆周角相等．只须证$\angle 1 = \angle 3$.而在$\triangle PMB$和$\triangle CMP$中，$\angle PMB = \angle CMP$（公用），所以

只须证$\triangle PMB \backsim \triangle CMP$。为此，只须证夹$\angle PMB$、$\angle CMP$的两边对应成比例：$\dfrac{MB}{MP}=\dfrac{MP}{MC}$。

这和上面从已知条件出发得到的关系式是一致的。因此，证题的思路就沟通了。

这种寻求解题途径的思维方法，可简单地叙述为：由"已知"看"可知"；由"未知"看"需知"，"可知"与"需知"沟通了，解题途径就找到了。

此外，还要善于把代数、三角等学科中常用的方法和技巧，比如配方法、换元法、待定系数法、构造法等等，用到平面几何解（证）题中来，就可以得到更多的沟通数学各分科之间联系的解（证）方法。例如，下面这道几何题可用代数法证明。

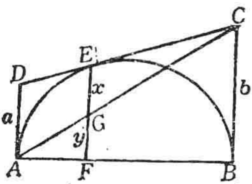

图 2-9

例8 如图2-9所示，在四边形$ABCD$中，$AB\perp BC$，$AB\perp AD$，CD与以AB为直径的半圆相切于E，过E作$EF\parallel BC$交AB于F。试证AC平分EF。

【证明】设AC与EF交于G，$AD=a$，$BC=b$，$EG=x$，$FG=y$。

由切线长定理知 $DE=a$，$CE=b$，$DC=a+b$。

$\because$ $EF\parallel BC\parallel AD$，

$\therefore$ $\dfrac{x}{a}=\dfrac{b}{a+b}$，$\dfrac{y}{b}=\dfrac{AF}{AB}=\dfrac{DE}{DC}=\dfrac{a}{a+b}$。

则 $x=\dfrac{ab}{a+b}$，$y=\dfrac{ab}{a+b}$。

$\therefore$ $x=y$。

即　AC平分EF.

三、要善于思考

探索平面几何的多种解（证）法，就要善于多角度、多方位思考问题，深入细致地观察、探索几何图形的结构、性质及其内在联系.

从平面几何知识本身的纵向联系来看，证明线段或角相等，或证明线段垂直、平行或成比例，或证明点共线、线共点、点共圆和圆共点，都要涉及到好多定理.而选择不同的定理，从不同的角度，通过不同的思维方法都可达到证明结论的目的.

从数学各科之间的横向联系来看，数学各科知识之间的内在联系，为我们开拓了一题多解（证）法的解题思路.例如，由平面几何中的线段成比例、图形的面积等，可以列出有关比例式和算式，用代数方法来解（证）；在几何图形中通过作高、切线、弦心距等得到直角三角形，可以利用锐角三角函数知识，用三角方法来解（证）…….只要我们从中学数学知识的纵横联系中，善于多角度、多方位地进行思考，寻求问题的多种解（证）法，是不难办到的.

四、掌握解题技巧

做题不能只满足做出结果，每做完一题后，都要认真想一想：解题时用了哪些知识、方法和解题技巧，还有哪些解法，哪种解法最简便，解这类题有什么规律，应该注意什么问题，在此基础上若将原图形或条件加以变更，还能引出什