

丛书主编 / 丁 岩
学科主编 / 王海鹰

焦点 问答

JIAODIAN WENDA

知识点 重点 难点 疑点

数 学

高中三年级 高考

东北师范大学出版社

高长玉 杨智勇 编著

焦点问答

JIAODIAN WENDA

知识点 重点

数 学

高中三年级 高考

6634.603/3.3 B
东北师范大学出版社

长 春

图书在版编目(CIP)数据

焦点问答: - 高三·高考数学/高长玉 杨智勇编著—长春:
东北师范大学出版社, 2001.5

ISBN 7 - 5602 - 2277 - 3

I. 数… II. ①高 ②杨… III. 数学课—高三—教学参考资料 IV. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 20161 号

☐ 出版人: 贾国祥

☐ 策划编辑: 刘宗谊 ☐ 责任编辑: 李 雁

☐ 封面设计: 张 然 ☐ 责任校对: 胡 影

☐ 责任印制: 栾喜湖

东北师范大学出版社出版发行
长春市人民大街 138 号(130024)

电话: 0431—5695744 5688470

传真: 0431—5695734

网址: <http://www.nnup.com>

电子函件: sdcbs@mail.jl.cn

东北师范大学出版社激光照排中心制版
长春第二新华印刷有限责任公司印刷

2001 年 5 月第 1 版 2001 年 5 月第 1 次印刷

开本: 880 mm × 1230 mm 1/32 印张: 10.75 字数: 312 千

印数: 00 001 — 10 000 册

本册定价: 11.80 元

目 录

第二部分 问答解练 41

1. 集合的运算有哪些? 运算方法是怎样的? 41

2. 集合的应用有哪些? 都具有什么特点? 423. 为什么必须准确地理解和记忆映射与函数的定义? 444. 求函数的定义域都有哪些题型? 46

5. 求函数值域的方法有哪些? 47

6. 什么叫二元函数在给定条件下求最值? 解答方法有哪些? 53

7. 求函数解析式的题目有哪些类型? 57

8. 为什么要会画函数的图像? 怎样画出函数的图像? 65

9. 怎样证明函数的单调性? 如何利用单调性的定义来求函数的单调区间? 怎样求在已知区间上的单调性问题中的参数的取值范围? 69

10. 二次函数都有哪些问题? 如何利用二次函数的有关性质
解答问题? 73

11. 抽象函数是什么样的函数? 怎样解答与抽象函数有关的题目? ... 83

第二章 三角 88

12. 三角函数线有哪些应用? 88
13. 求三角函数解析式的题目一般用哪些方法解答? 90
14. 怎样利用三角函数的图像和性质解题? 93
15. 怎样判断有关三角函数的奇偶性? 如何求有关三角函数的周期? 96
16. 有关三角函数值域的问题有哪些? 解答方法又有哪些? 99
17. 什么样的三角函数求值问题是非条件求值问题? 解答这类问题的基本策略有哪些? 105
18. 解答有关三角函数的条件求值问题的解题策略是什么? 107
19. 三角函数在三角形中的应用有哪些? 113
20. 怎样利用反三角函数的图像和性质解题? 120

第三章 不等式 126

21. 如何用作差法比较两个数(或式)的大小? 126
22. 如何用作商法比较两个数(或式)的大小? 126
23. 如何用比较法中的差值比较证明不等式? 127
24. 如何用商值比较法证明不等式? 128
25. 如何用综合法证明不等式? 128
26. 如何用分析法证明不等式? 130
27. 如何用数学归纳法证明不等式? 131
28. 如何用反证法证明不等式? 132
29. 如何用放缩法证明不等式? 133
30. 如何用判别式法证明不等式? 134
31. 不等式证明中的换元技巧有哪些? 134
32. 不等式证明中的构造技巧有哪些? 135
33. 什么是不等式证明中的拆项技巧? 137
34. 在不等式证明中,何时使用迭代技巧? 137

35. 如何解一元二次不等式?	138
36. 如何解一元高次不等式?	139
37. 如何解分式不等式?	140
38. 如何解无理不等式?	141
39. 如何解指数、对数不等式?	142
40. 如何解绝对值不等式?	143
41. 如何解含字母系数的不等式?	145
42. 均值不等式的应用有哪些?	146
43. 不等式的应用有哪些?	149
第四章 数列、极限、数学归纳法	151
44. 已知数列的前几项怎样求通项公式?	151
45. 如何根据递推公式求数列的通项公式?	152
46. 等差数列有哪些性质?	153
47. 等比数列有哪些性质?	154
48. 举例说明等差数列与等比数列的应用	156
49. 非等差、等比数列的求和方法有哪些?	157
50. 如何计算数列的极限?	159
51. 运用数学归纳法时易犯的误差有哪些?	161
52. 数学归纳法的应用有哪些?	162
第五章 复数	165
53. 什么是复数相等? 它有什么作用?	165
54. 证明复数 z 为实数有哪些方法?	166
55. 复数、模与共轭复数的关系是什么?	166
56. 如何进行复数代数形式的运算?	167
57. 如何应用复数模的几何意义解题?	168
58. 怎样应用复数加(减)法的几何意义解题?	169
59. 怎样应用复数的模解题?	170

焦点
问答

↓ 知识点 · 重点 · 难点 · 疑点

60. 怎样应用复数乘、除法及开方的几何意义解题?	172
61. 怎样进行复数的代数形式和三角形式的互化?	174
62. 怎样应用复数的三角形式运算?	175
63. 如何解答求复平面上点的轨迹问题?	176
64. 复数集内的方程有哪些类型? 如何解答?	177

第六章 排列、组合、二项式定理..... 180

65. 什么是特征分析法?	180
66. 什么是元素位置分析法?	181
67. 什么是直接法? 间接法?	182
68. 什么是二分法?	183
69. 什么是变换命题法?	183
70. 解排列组合应用题的常见技巧有哪些?	184
71. 如何利用二项式定理求展开式中的某一项?	185
72. 证明组合恒等式的方法主要有哪些?	187
73. 如何应用二项式定理进行近似计算?	189
74. 如何应用二项式定理证明整除性问题或求余数?	189
75. 如何应用二项式定理证明不等式?	190

第七章 立体几何..... 191

76. 怎样判定各元素的位置关系?	191
77. 如何运用立体几何知识证明平行问题? 怎样运用立体 几何中的平行知识?	194
78. 怎样分析和证明立体几何中的垂直问题?	198
79. 在立体几何中有几种角的问题? 它们计算的方法和规律 如何?	203
80. 立体几何中有关距离的问题有哪些? 怎样求这些距离?	214
81. 在立体几何中如何计算面积和体积?	217

第八章 直线..... 225

- 82. 如何证明同一直线上有向线段间的关系?..... 225
- 83. 如何应用解析法证明几何问题?..... 226
- 84. 怎样求点分有向线段所成的比?..... 226
- 85. 点分有向线段所成的比有哪些应用?..... 227
- 86. 怎样求直线的斜率?..... 228
- 87. 怎样求直线的截距?..... 229
- 88. 怎样利用两点的距离公式求最值?..... 230
- 89. 证明三点共线有哪些方法?..... 231
- 90. 怎样求直线的方程?..... 231
- 91. 如何用参数法求与直线 l 平行或垂直的直线的方程?..... 233
- 92. 两条直线所成的角有几类?..... 234
- 93. 如何判断两条直线的位置关系?..... 235
- 94. 何谓过两条直线交点的直线系?..... 236
- 95. 如何解答点与点、曲线与曲线关于已知直线对称的问题?..... 237

第九章 圆锥曲线..... 238

- 96. 如何求轨迹方程?..... 238
- 97. 怎样求圆的方程?..... 242
- 98. 如何判断点和圆的位置关系?..... 243
- 99. 如何判断圆和直线的位置关系?..... 243
- 100. 如何解答直线和圆的相交问题?..... 244
- 101. 如何求圆的切线方程?..... 245
- 102. 如何判断两圆的位置关系?..... 247
- 103. 常用的圆系方程有哪些?..... 248
- 104. 怎样求椭圆的方程?..... 249
- 105. 在圆锥曲线中, 怎样解与弦的中点有关的问题?..... 250
- 106. 举例说明在直线与二次曲线相交的问题中, 韦达定理

焦点
问答

↓ 知识点, 重点, 难点, 疑点

106. 有怎样的应用?	251
107. 在直线和二次曲线相交的问题中, 如何求弦长?	253
108. 移轴的作用是什么?	254
109. 怎样解答解析几何中的最值问题?	257
110. 怎样解答解析几何中常见的证明问题?	263
111. 直线与圆锥曲线的位置关系涉及哪些问题?	265
112. 怎样考虑两圆锥曲线间的位置关系?	266

第十章 参数方程与极坐标 269

113. 怎样化参数方程为普通方程?	269
114. 直线的参数方程有哪些应用?	270
115. 常见的圆锥曲线的参数方程是什么?	272
116. 极坐标系的应用有哪些?	273
117. 怎样求常见曲线的极坐标方程?	275

第三部分 综合测试 278

综合测试一	278
综合测试二	281
综合测试三	284

第四部分 参考答案 287

1. 几何中的平行知识	100
2. 怎样分析和证明立体几何中的垂直问题	101
3. 在立体几何中有什么常用的问题	102
4. 如何	103
5. 立体几何中有关距离的问题有哪些	104
6. 在立体几何中如何证明两平面垂直	105
7. 怎样求两异面直线间的距离	106

焦点 问答

认认真真总结

第一部分 知识归纳

一 函 数

(一) 集 合

1. 集合的有关概念

(1) 集合的定义

现行高中教材对集合的概念给出了描述性的说明：“我们说，每一组对象的全体就形成一个集合。”

(2) 集合的分类

有限集：含有有限个元素的集合。

无限集：含有无限个元素的集合。

空集：不含任何元素的集合。

(3) 集合中元素的性质

确定性：任何一个对象对一个集合来说，它要么属于这个集合，要么不属于这个集合。

互异性：集合中任何两个元素必须是不同的对象。

点 问答

↓ 知识点，重点，难点，疑点

无序性:用列举法表示集合中的元素时,不必考虑它们之间的顺序.

(4)集合的表示法

列举法:把集合中的元素一一列举出来写在大括号内.

描述法:把集合中元素的公共属性描述出来,写在大括号内.

采用描述法表示集合 $\{p|p \text{ 的条件}\}$ 时,一定要特别注意代表元素 p 的属性.否则,很易出现表达方式上的错误.

2. 集合间的运算

两个集合间的运算关系有子、交、并、补,一定要注意各个概念的实质和内涵.两个集合的包含、真包含和相等是三个既有区别又有联系的概念,必须加以区分. $M \subseteq N$ 有两层含义,即 $M \subset N$ 或 $M = N$ 两种情况必具其一.反之, $N = M$ 或 $N \supset M$ 也可写成 $M \subseteq N$.若 $M \subseteq N$ 且 $N \subseteq M$,则有 $M = N$,这是证明两个集合相等的有效方法之一.

(二)一元二次不等式

1. $|ax + b| < c$ 和 $|ax + b| > c$ ($c > 0$)型不等式

(1) $|x| < a$ 和 $|x| > a$ ($a > 0$)的解集

一般地, $|x| < a$ ($a > 0$)型不等式的解集为 $\{x | -a < x < a\}$,
 $|x| > a$ ($a > 0$)型不等式的解集为 $\{x | x > a \text{ 或 } x < -a\}$.

(2) $|ax + b| < c$ 和 $|ax + b| > c$ 型不等式的解集

可将 $ax + b$ 看成(1)中的 x ,运用代换的思想有 $|ax + b| < c$ 的解集是 $|x| - c < ax + b < c$,由此可求出原不等式的解集.运用类似的办法可以求出 $|ax + b| > c$ ($a > 0$)的解集.

2. 一元二次不等式

(1)定义: $ax^2 + bx + c > 0$ 或 $ax^2 + bx + c < 0$ ($a \neq 0$)型的不等式叫一元二次不等式.

(2)解法

使用二次函数的图像和一元二次方程的根来解一元二次不等式.

对于二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$), $\Delta = b^2 - 4ac$,那么 $ax^2 + bx + c > 0$ 或 $ax^2 + bx + c < 0$ 的解集有如下三种情况.

① 当 $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ 时, $x_2 < x_1$,如图1,有

$ax^2 + bx + c > 0$ 的解集为 $\{x | x > x_1 \text{ 或 } x < x_2\}$,

$ax^2 + bx + c < 0$ 的解集为 $\{x \mid x_2 < x < x_1\}$.

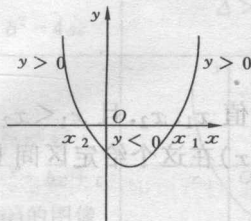


图 1

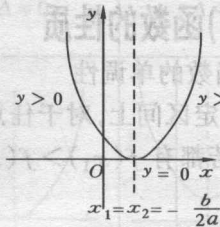


图 2

② 当 $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ 时, $x_1 = x_2$, 如图 2, 有

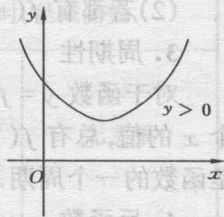
$ax^2 + bx + c > 0$ 的解集为 $\{x \mid x \in \mathbf{R} \text{ 且 } x \neq -\frac{b}{2a}\}$,

$ax^2 + bx + c < 0$ 的解集为 $\emptyset$.

③ 当 $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ 时, 如图 3, 有

$ax^2 + bx + c > 0$ 的解集为 $x \in \mathbf{R}$,

$ax^2 + bx + c < 0$ 的解集为 $x \in \emptyset$.



(三)映射与函数

1. 映射

映射的概念是为函数的概念作准备的, 它是一

种特殊的对应, 要求原象集 A 中的每个元素都有惟一的象, 但在集合 B 中不一定所有的元素都有原象.

2. 函数

(1) 函数的定义: 集合 A 和 B 都是非空数集, 且 B 中的每个元素都有原象, 这时的映射 $f: A \rightarrow B$ 就称为从定义域 A 到值域 B 上的函数, 记为 $y = f(x)$.

(2) 函数的定义域: 所有原象的集合即是函数的定义域. 若给出函数解析式, 那么定义域就是使式子有意义的所有自变量的全体. 若函数由实际问题给出, 还要注意定义域须由实际情况来界定.

(3) 函数的值域: 所有象的集合即是值域, 也可以认为是所有函数值的集合或函数值的变化范围.

(4) 函数的表示方法: 常用的方法有解析法 (即给出函数解析式)、

焦点
问答

↓ 知识点 · 重点 · 难点 · 疑点

列表法和图像法.

(四)函数的性质

1. 函数的单调性

在给定的区间上,对于任意两个自变量的值 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$:

(1)若都有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则函数 $f(x)$ 在这个给定区间上是减函数;

(2)若都有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则函数 $f(x)$ 在这个给定区间上是增函数.

2. 函数的奇偶性

对于函数定义域内任意一个 x :

(1)若都有 $f(-x) = f(x)$, 则函数 $f(x)$ 为偶函数;

(2)若都有 $f(-x) = -f(x)$, 则函数 $f(x)$ 为奇函数.

3. 周期性

对于函数 $y = f(x)$, 若存在非零常数 T , 使得对定义域内的每一个 x 的值, 总有 $f(T+x) = f(x)$ 成立, 则 $y = f(x)$ 叫做周期函数, T 是函数的一个周期.

4. 反函数

一般地, 式子 $y = f(x)$ 表示 y 是自变量 x 的函数, 设它的定义域为 A , 值域为 C . 我们从式子 $y = f(x)$ 中解出 x , 得到式子 $x = \varphi(y)$, 它表示 x 是自变量 y 的函数, 记作 $x = f^{-1}(y)$, 即 $x = \varphi(y) = f^{-1}(y)$, 把式子中的 x, y 对调, 得到 $y = f^{-1}(x)$.

(五)几种初等函数的图像和性质

1. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

函数的图像和性质见下表:

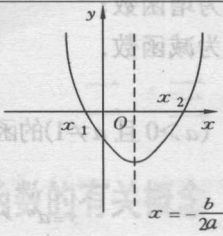
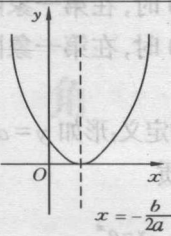
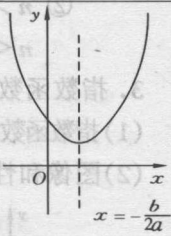
函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图像和性质见下表:

对于二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图像和性质, 我们主要研究以下问题:

① 当 $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ 时, $x_2 < x_1$, 则函数 $y = f(x)$ 的图像和性质如下:

(1) 当 $a > 0$ 时, 函数 $y = f(x)$ 的图像和性质如下:

(2) 当 $a < 0$ 时, 函数 $y = f(x)$ 的图像和性质如下:

判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$)的图像			
定义域	$\mathbb{R}$		
值域	$y \geq \frac{4ac - b^2}{4a}$		
单调性	$x \geq -\frac{b}{2a}$ 时, 是增函数; $x \leq -\frac{b}{2a}$ 时, 是减函数.		
一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)的根	有相异实根 $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ($x_1 < x_2$)	有二相等实根 $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$	无实根
$ax^2 + bx + c > 0$ ($a > 0$)	$\{x x > x_2 \text{ 或 } x < x_1\}$	$\{x x \in \mathbb{R} \text{ 且 } x \neq -\frac{b}{2a}\}$	$\mathbb{R}$
$ax^2 + bx + c > 0$ ($a < 0$)	$\{x x_1 < x < x_2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$

焦点
问答

↓ 知识点 · 重点 · 难点 · 疑点

2. 幂函数

(1) 幂函数的定义: 形如 $y = x^\alpha$ (α 为常数) 的函数叫做幂函数, 中学阶段只考虑 α 为有理数 n 的情况.

(2) $y = x^n$ (n 为有理数) 的图像和性质

如图 4, 四个函数 $y = x^{n_1}$, $y = x^{n_2}$, $y = x^{n_3}$, $y = x^{n_4}$ 的图像, $n_1 > 1$, $n_2 = 1$, $0 < n_3 < 1$, $n_4 < 0$, 函数在其他象限的图像可由函数的奇偶性得到

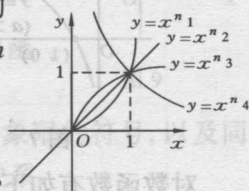


图 4

(因为幂函数只要定义域允许,一定具有奇偶性).

性质:① 图像都过定点(1,1).

② $n > 0$ 时,在第一象限为增函数;

$n < 0$ 时,在第一象限为减函数.

3. 指数函数

(1) 指数函数的定义:形如 $y = a^x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的函数叫做指数函数.

(2) 图像和性质

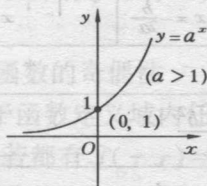


图 5

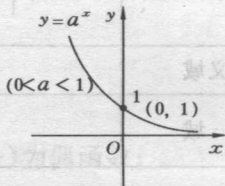


图 6

指数函数有如下性质:

① 图像都过定点(0,1).

② 定义域为 $\mathbf{R}$, 值域为 $\mathbf{R}^+$.

③ $a > 1$ 时, $y = a^x$ 在 $x \in \mathbf{R}$ 时是增函数;

$0 < a < 1$ 时, $y = a^x$ 在 $x \in \mathbf{R}$ 时是减函数.

4. 对数函数

(1) 对数函数的定义: $y = a^x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的反函数 $y = \log_a x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 叫做对数函数.

(2) 图像和性质

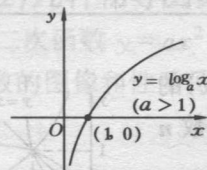


图 7

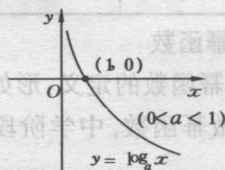


图 8

对数函数有如下性质:

① 图像都过定点(1,0).

② 定义域为 $\mathbf{R}^+$, 值域为 $\mathbf{R}$.

- ③ $a > 1$ 时, 函数 $y = \log_a x$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数,
 $0 < a < 1$ 时, 函数 $y = \log_a x$ 在 $(0, +\infty)$ 上是减函数.

二 三 角

(一)三角函数的有关概念

1. 角的定义

一条射线由原来的位置 OA , 绕着它的端点 O 旋转到另一位置 OB 就形成一个角 α , 把按顺时针方向旋转得到的角叫做负角, 把按逆时针方向旋转得到的角叫做正角, 没作任何旋转时叫做零角.

2. 角度制和弧度制

(1) 规定周角的 $\frac{1}{360}$ 为 1 度的角, 这种用度做单位来度量角的制度叫做角度制.

(2) 等于半径长的圆弧所对的圆心角叫做 1 弧度的角, 这种用弧度做单位来度量角的制度叫做弧度制.

(3) 角度制与弧度制的关系: $180^\circ = \pi$ 弧度.

3. 三角函数的定义

在角 α 的终边上任取一点 P (非原点), 设 $P(x, y)$, 它与原点的距离 $|OP| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$, 如图 9.

$$\text{则 } \sin \alpha = \frac{y}{r}, \cos \alpha = \frac{x}{r}, \tan \alpha = \frac{y}{x},$$

$$\cot \alpha = \frac{x}{y}, \sec \alpha = \frac{r}{x}, \csc \alpha = \frac{r}{y},$$

分别称为角 α 的正弦函数、余弦函数、正切函数、余切函数、正割函数和余割函数.

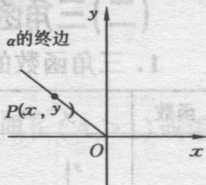


图 9

由三角函数的定义能得到三角函数值在各个象限的符号, 以及同角的六个三角函数间的关系, 即同角三角函数的关系.

点
回
答



知 识 点 · 重 点 · 难 点 · 疑 点

(1)平方关系

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

(2)倒数关系

$$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$$

(3)商的关系

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\sec^2 \alpha - \tan^2 \alpha = 1$$

$$\csc \alpha \cdot \sin \alpha = 1$$

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\csc^2 \alpha - \cot^2 \alpha = 1$$

$$\sec \alpha \cdot \cos \alpha = 1$$

4. 诱导公式

公式一 $\sin(k \cdot 360^\circ + \alpha) = \sin \alpha$

$\cos(k \cdot 360^\circ + \alpha) = \cos \alpha$

$\tan(k \cdot 360^\circ + \alpha) = \tan \alpha$

$\cot(k \cdot 360^\circ + \alpha) = \cot \alpha$

公式二 $\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$

$\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$

$\tan(180^\circ + \alpha) = \tan \alpha$

$\cot(180^\circ + \alpha) = \cot \alpha$

公式三 $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$

$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$

$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$

$\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$

公式四 $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$

$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$

$\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha$

$\cot(180^\circ - \alpha) = -\cot \alpha$

公式五 $\sin(360^\circ - \alpha) = -\sin \alpha$

$\cos(360^\circ - \alpha) = \cos \alpha$

$\tan(360^\circ - \alpha) = -\tan \alpha$

$\cot(360^\circ - \alpha) = -\cot \alpha$

5. 已知三角函数值求角

先根据已知的三角函数值确定所求的角在第几象限,再求出这个三角函数值的绝对值所对应的一个锐角,最后由诱导公式求出适合题意的角.

(二)三角函数的图像和性质

1. 三角函数的图像和性质

函数	$y = \sin x$	$y = \cos x$	$y = \tan x$	$y = \cot x$
图像				