



Large-scale Linear Goal Programming and Its Applications

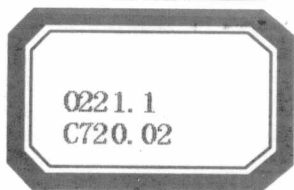
大型线性目标规划及其应用

(第二版)

成思危 胡清淮 刘敏 著



科学出版社



郑州大学 *04010744585 *

Large-scale Linear Goal Programming and Its Applications

大型线性目标规划及其应用 (第二版)

成思危 胡清淮 刘敏 著



科学出版社
北 京

0221.1

C720.02

内 容 简 介

作者以从事我国三项大型线性目标规划的实例(中国磷资源开发系统研究、中国化学工业发展战略研究、中国化肥规划模型研究)为基础,系统地介绍了大型线性目标规划的基本理论和应用技术。全书共10章,包括:目标规划导论,大型目标规划的建模技术,线性目标规划基础,线性目标规划的基本算法,对偶线性目标规划,灵敏度分析和参数目标规划,解大型线性目标规划问题的计算机实现,多目标线性规划,线性目标规划的其他方法与进展,整数线性目标规划。

本书适合系统工程、管理科学、计算机科学、应用数学和工程界的科研工作者以及高等院校相关专业的本科生、研究生、老师阅读和参考。

图书在版编目(CIP)数据

大型线性目标规划及其应用/成思危,胡清淮,刘敏著.—2版.

—北京:科学出版社,2012

ISBN 978-7-03-033381-0

I. 大… II. ①成…②胡…③刘… III. ①大规模线性规划—研究 IV. ①0221.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2012) 第 008506 号

责任编辑:兰 鹏 / 责任校对:陈玉凤
责任印制:张克忠 / 封面设计:蓝正设计

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

源海印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2000年12月第 一 版 开本:720×1000 1/16

2012年2月第 二 版 印张:23 1/2

2012年2月第一次印刷 字数:470 000

定价:78.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

第二版序言

本书第一版于2000年12月出版发行,它是从成思危在20世纪90年代主持的三个软科学研究项目所取得的部分成果中综合而成。特别是其中“全国磷资源开发系统研究”项目获得了国家科技进步二等奖及原化工部科技进步一等奖。本书中的大型线性目标规划就是该项目的成果之一。

本书出版后得到了我国系统工程和管理科学界的认同。我国系统工程奠基人之一许国志院士在评价该著作时认为,反映该研究工作成果的“大型线性目标规划及其应用”的学术著作,“在内容和水平上与20世纪70年代以来,在国际目标规划领域最具影响的权威著作以及国内几本同类著作相比,都更加全面、系统,并有其独到之处。该书较全面反映了该领域的最新成就”。他还认为,“在目标规划的模型建造和应用方面,三大实例都是我国化学工业中的重大课题,就其复杂性来说,在我国的有关研究中处于前列。鉴于使用微机解各种大中型管理决策问题特别适合我国国情,该专著的又一突出特点是完整并系统地论述了便于使用微机解大型线性目标规划问题的基本算法和各种改进算法,还系统地论述了有关难点问题及解决办法的计算技术,这在理论和应用上都是极其可贵的”。对著作中关于算法,多目标线性规划和整数线性目标规划的研究,原中国工程院副院长王殿佐院士评价说:“本书在介绍目标规划的基本算法,对偶线性目标规划和灵敏度分析时,详细地讲述了关于有界变量的各种算法,作为降低矩阵维数和使用微机解算的有效方法,符合编程的实用需要”。“在论述线性目标规划的基本原理和方法的基础上,还进一步系统地讨论了多目标线性规划,线性目标规划的其他方法以及整数线性目标规划等内容,且综合上述,说明本书较全面地反映了国内外的最新成就”。中国工程院古德生院士也作了评价。他认为,“本书具有很强的实用性”,弥补了我国长期以来在这一领域理论联系实际的不足。该著作在2003年获湖北省自然科学三等奖。

由于第一版印量少,而且其中的数学表示式和表格数据存在不规范等缺点,促使我们三位作者决心以认真负责的态度,再次审阅已出版的原书,找出其中的错误及欠妥之处而加以改正或修正,并在此基础上重新出版发行该书的第二版本。

在这次再版时，全书各章节的内容基本保持不变。主要的改进有，对向量、矩阵、集合的数学符号均使用黑体字表示；对各章的习题作了必要的精简，并对其较难者增加了提示；以“多阶段单纯形法有界变量线性目标规划计算程序”取代了原附录1的内容，因而扩大了原来程序的功能，更便于教学和学习中解有关章节的习题；对附录2的计算程序也作了进一步的改进。

在本著作第一版和第二版的写作、编辑和发行过程中，得到众多专家、教授、有关领导和朋友们的支持、指导和帮助，使我们深受感动。值此，特向许国志院士表达深切怀念，向王殿佐和古德生院士表示衷心感谢。向给我们巨大支持和帮助的郑州大学校长申长雨院士和武汉工程大学校长吴元欣教授和喻九阳、袁军和张电吉教授，北京理工大学的魏一鸣教授，上海华东理工大学的范体军教授，以及协助我们修改文稿的武汉工程大学李元松教授、杨进和李巽芝高级工程师，表示衷心感谢！向其他所有支持和帮助过我们的专家、教授、有关领导、编辑和朋友们致以诚挚的谢意！

成思危 胡清淮 刘敏

2012年1月1日

第一版序言

目标规划是国外于 20 世纪 60 年代初开始兴起的一种数学规划方法。由于它具有多目标、软约束的特点，在多数情况下比线性规划更加接近于实际决策的情况，故很快就引起了管理科学界的注意。在 20 世纪 70 年代到 80 年代初期，目标规划得以蓬勃发展，许多学者都在该领域进行了多方面的探索，发表了数百篇研究论文，在理论和实践两方面都有不少进展。

我是于 20 世纪 80 年代初在美国加利福尼亚大学洛杉矶分校进修管理学时开始接触目标规划的，并深为其特色所吸引，特意选修了这方面的课程，回国以后也依然关注其发展。1987~1990 年，在我负责主持国家“七五”科技攻关重点项目——“全国磷资源开发系统研究”的过程中，首次开始尝试用目标规划方法来构建我国的磷资源开发规划模型，并取得了初步的成功。这就更加坚定了我对目标规划的信心，并促使我进一步探索大型目标规划的建模技术。于是我进一步将目标规划方法用于“我国化学工业发展战略研究”及“我国化肥系统研究”这两个软科学研究课题中，在研究过程中也使我加深了对目标规划的了解。

应当看到，目标规划的发展道路也是很曲折的。尽管学术界都承认目标规划是一种解决实际生活中多目标问题的有效方法和强大的工具，但对目标规划进行研究和应用的热情在 20 世纪 80 年代中期以后却有所减退。其原因之一是普遍缺乏建立有效的目标规划模型所需的知识，二是缺少商业化的大型目标规划求解软件，从而阻碍了目标规划的实际应用。

我在实践中深深体会到，建模是目标规划的关键，而建模的成败在很大程度上取决于建模者对研究对象的深入和全面的了解，这就要求管理科学家与专业领域专家和决策者之间的紧密结合。此外，在构建好模型之后还必须解决算法设计及计算机实现这两个关键问题，否则再好的模型也无法应用。另外，首次构建的目标规划模型难免有许多不够完善之处，需要在求解过程中对所得的结果进行分析，并用实际现象和数据来检验模型的合理性及适用性，如有偏差则要对模型进行修改补充，直到满意为止。

在算法设计及计算机实现方面，胡清淮教授是我多年来的合作伙伴，他和他的学生刘敏高级工程师在实践中解决了许多算法和编程方面的问题，如误差积

累、多解及量纲的不一致性等。本书的大部分内容都是由胡清淮教授撰写的，也正是在他的敦促下，才使我鼓起勇气从繁忙的日程中抽出时间来撰写本书的第1、2两章，把我在学习和运用目标规划过程中的一些体会和收获介绍给读者们。

我坚信目标规划是实现决策科学化的有力工具，但只有在实际应用中取得实际效果时，它才能得到决策者的承认和重视。我希望本书的出版能引起更多管理科学界的人士对目标规划的兴趣，并在理论及实践两方面对其进行深入探讨，使这一工具能在建设有中国特色社会主义事业中发挥其应有的作用。

成思危

2000年5月6日于北京

目 录

第二版序言

第一版序言

第 1 章 目标规划导论	1
1.1 数学规划在决策中的作用	1
1.2 线性规划的局限性	2
1.3 目标规划的提出及发展	4
1.4 目标规划的基本概念	5
1.5 线性目标规划的基本类型及求解方法	7
1.6 目标规划的局限性	8
1.7 目标规划的发展前景	9
主要参考文献	10
第 2 章 大型目标规划的建模技术	12
2.1 大型目标规划的建模技术概述	12
2.2 大型目标规划的建模步骤	13
2.3 大型目标规划建模实例之一——中国磷资源开发系统研究	15
2.4 大型目标规划建模实例之二——中国化学工业发展战略研究	23
2.5 大型目标规划建模实例之三——中国化肥规划模型研究	28
主要参考文献	33
第 3 章 线性目标规划基础	34
3.1 线性目标规划基础概述	34
3.2 线性目标规划的数学模型	39
3.3 线性目标规划图解法	47
习 题	50
主要参考文献	56
第 4 章 线性目标规划的基本算法——多阶段单纯形法	58
4.1 线性目标规划的基本算法概述	58
4.2 多阶段单纯形法的讨论及矩阵形式	65
4.3 线性目标规划的改进单纯形法	75
4.4 有界变量线性目标规划问题	82

4.5 有界变量问题的讨论及有界变量改进单纯形法	93
习 题	107
主要参考文献	113
第5章 对偶线性目标规划	115
5.1 多维对偶及顺序多维对偶单纯形算法	115
5.2 多维对偶单纯形法	122
5.3 有界变量问题的对偶原理及多维对偶算法	126
5.4 线性目标规划的原始—对偶算法	138
习 题	141
主要参考文献	146
第6章 灵敏度分析和参数目标规划	147
6.1 线性目标规划的灵敏度分析	147
6.2 参数线性目标规划	157
6.3 有界变量线性目标规划问题的灵敏度分析与参数规划	164
习 题	183
主要参考文献	189
第7章 解大型线性目标规划问题的计算机实现	190
7.1 解大型线性目标规划问题的基本算法	190
7.2 解大型线性目标规划问题的计算技术	194
7.3 典型算例及结果分析	199
习 题	203
主要参考文献	209
第8章 多目标线性规划	212
8.1 多目标线性规划问题	212
8.2 求有效极点集的相邻有效基法	218
8.3 求有效极点集的有效边算法	225
8.4 有效解集	237
8.5 多目标线性规划的对偶、中性区及灵敏度分析	246
习 题	257
主要参考文献	260
第9章 线性目标规划的其他方法与进展	263
9.1 用目标规划法解多目标线性规划问题	263
9.2 用区间准则权法解多目标线性规划问题	267
9.3 应用区间权的目标规划灵敏度分析	274
9.4 目标规划的 Schniederjans-Kwak 算法	283

习 题	287
主要参考文献	293
第 10 章 整数线性目标规划	294
10.1 典型问题模型	294
10.2 混合型整数线性目标规划问题的 SLGP 算法	304
10.3 多阶段单纯形法整数线性目标规划算法	312
10.4 0-1 型目标规划的区分与约束集合算法	317
习 题	326
主要参考文献	329
附录 1 多阶段单纯形法有界变量线性目标规划计算程序	333
附录 2 多目标线性规划有效极点解计算程序	348

第1章

目标规划导论

1.1 数学规划在决策中的作用^[1]

通俗地说,决策就是作决定,它包括为达到同一目标而在现实条件下可以采取的各种行动方案中选定最适宜方案的全过程。

古往今来,人们一直不断地在进行各种各样的决策。所不同的是以往人们主要是依靠定性的方法,即依靠其直觉、判断和经验来进行决策。而在现代化社会中,这种经验决策的方法已经日益不能适应决策者的要求,故必须采用各种定量的方法来辅助决策。这种定量的决策方法常常被称为科学决策方法,而需要采用这种方法的原因如下:

- (1) 有些问题相当复杂,不借助于定量的方法难以找出满意的解决办法。
- (2) 有些问题相当重要(如涉及巨额的投资或有深远的影响等),决策者希望在采取行动之前要慎重分析。
- (3) 新问题层出不穷,决策者没有过去的经验可以借鉴。
- (4) 有些问题不断重复出现,决策者希望建立一些理性的解决办法来处理,以便节省时间和精力。
- (5) 有些问题要求迅速作出决定,决策者希望借助数学和计算机来及时作出决策。

在科学决策方法中最常用的是数学规划方法,其本质是将目标、约束条件及各种关系用数学式来表达,再用数学方法来求解。最早出现的一类数学规划方法是线性规划(linear programming, LP),即其目标和各约束条件的表达式都是线性的。线性规划最早是在第二次世界大战期间因军事需要而发展起来的,战后逐步推广应用到工商管理、行政管理等许多方面。下面我们用一个简单的例子来说明线性规划的特点。

例 1.1 某化工厂利用 A、B 两种原料在一套装置内轮换生产甲、乙两种产

品, 有关数据如下:

产品	原料 A 单耗(t/t)	原料 B 单耗(t/t)	售价/(元/t)
甲	1.0	2.0	15 000
乙	1.0	1.0	11 000

原料 A、B 的购入价分别为 3 000 元/t 及 2 000 元/t, 除原料费以外的其他费用(包括工资、折旧费、管理费等)为每月 300 000 元。若原料 A、B 的供应量分别为每月 60t 及 90t, 而根据已经签订的销售合同, 每月至少应生产产品甲、产品乙的量分别为 20t 及 25t, 问应如何安排月生产计划以使其利润最大?

解: 当用线性规划来解该问题时, 设产品甲、产品乙的产量分别为 x t 和 y t, 则可将目标表达为

$$\max \quad 15\,000x + 11\,000y - (3\,000 + 2\,000 \times 2)x - (3\,000 + 2\,000)y - 300\,000$$

经整理后可得目标函数的表达式如下:

$$\max \quad 8\,000x + 6\,000y - 300\,000$$

约束条件为

原料 A 的供应量约束: $x + y = 60$

原料 B 的供应量约束: $2x + y = 90$

合同约束: $x \geq 20, y \geq 25$

求解后可得 $x = 30, y = 30$; 这时利润可达 120 000 元。

线性规划经过几十年的发展, 在建模与求解方面都有很多改进, 其应用遍及农业、工业、运输、能源、环境、医疗卫生、行政管理等许多方面, 并陆续发展出非线性规划、整数规划、目标规划、动态规划等其他数学规划方法。

科学决策与经验决策这两种方法并不相互排斥, 而是相辅相成的。科学决策方法虽然可以列举出各种行动方案并定量地评价其优劣, 但由于客观世界中各种因素之间的关系错综复杂而又瞬息万变, 而决策者又处在信息不完备、资源不充足、各方利益不一致的环境下, 不可能完全依靠定量分析的结果来进行决策。故在选定最适宜方案时还必须依靠决策者的阅历、知识、智慧和胆略。

1.2 线性规划的局限性

虽然线性规划是数学规划中发展得最完善、应用面最广的方法, 但它也有以下三个严重的缺陷。

1. 难以妥善处理多目标问题

在现实生活中, 人们常常会遇到多目标的决策问题, 例如, 在一个装置的改造中, 既要投资尽可能少, 又要成本尽可能低, 还要质量尽可能好, 而且这些目

标往往是相互矛盾的。在这种情况下,决策者如何按照其价值观来确定这些目标之间的优先顺序,就成为首先需要妥善处理的问题。线性规划在处理多目标问题时通常采用给各个目标赋予不同权重的办法,但如何将决策者定性的价值判断转化为定量的权重则是一个十分困难的问题。决策者可以明确地肯定目标甲比目标乙重要,但很难确定目标甲比目标乙重要多少倍。近年来提出了一些将对目标之间的相对重要性的定性判断转化为定量的权重的方法,例如, Saaty 提出的层次分析法^[2],将人们对于两个目标之间的相对重要性的判断分为9级标度,经两两比较后可构造出一个判断矩阵,进而算出各个目标的权重。这种方法虽然可以求出权重,但其准确性还是有些问题的。

另外,即使可以求出各个目标的权重,但当各个目标的量纲不同时(如不同的目标会分别用金额、人数、时间等来表示),也难以用赋予权重的办法将它们归并于到一个目标函数中。

为了更好地用线性规划来处理多目标规划问题,近年来有些学者致力于多目标线性规划(MOLP)的研究^[3],但至今尚未取得突破性的成果。

2. 缺乏必要的灵活性

线性规划的另一个局限就是其约束条件都是“硬”的,从而缺乏必要的灵活性。当某一线性规划问题有一个约束条件得不到满足时,这一问题就会以无解而告终。例如,在例1.1中,如果将产品甲的合同约束改为40t,产品乙的合同约束改为15t,则会因原料B的供应量约束条件 $2x + y \leq 90$ 不能满足而宣告无解。

然而目标规划的约束条件却都是“软”的,具有较大的灵活性。这是因为在目标规划的每个约束条件中都引入了一对正负偏差变量,故可以告诉使用者每个约束条件能否满足,是过紧还是过松,差多少或余多少。例如,在上述线性规划无解的情况下,用目标规划却可以解得原料A多余5t,原料B缺少5t。因此,如果有可能每月少买5t原料A而多买5t原料B的话,这一问题就变成有解了。

3. 处理大型问题时会遇到一些困难

在用线性规划处理大型问题时,由于决策变量为数众多,其度量单位又多种多样,这种量纲不一致性问题使线性规划的实际应用遇到很大困难,唯一的办法是作出许多不尽合理的假定来将各个决策变量转化为同一个量纲,例如,将职工人数、设备台数、订货次数等都转化为用金额来表示。由于这种办法既不合理又不精确,故即使勉强求出可行解,其有效性仍令人怀疑。目标规划则并不要求所有决策变量的量纲一致,只要在同一优先级内的变量量纲一致即可求解。即使在同一优先级内遇到量纲不一致性问题,由于其变量数较少,也较易将其一致化。Tamiz 与 Jones 还提出了一种方法^[4],可将同一优先级内的变量量纲化为一致,

即将同一优先级内的每个变量的正负偏差加权和除以一个与此变量量纲相同的一致化常数,从而将该级内的所有变量都化为量纲一致的量。此外,在用线性规划处理大型问题时常会遇到收敛较慢以及误差积累等问题,在采用目标规划时都能得到改进。

1.3 目标规划的提出及发展

目标规划是一种多目标规划技术,其基本思想源于 Simon 的目标满意概念^[5]。即每一个目标都有一个要达到的标靶或目标值,然后使距离这些目标的偏差最小化。

Charnes, Cooper 和 Ferguson 等在 1955 年发表的一篇关于用线性规划来最优地测算经理人员的酬劳的文章中,为目标规划的产生打下了基础^[6]。但目标规划这一术语则是于 1961 年在 Charnes 和 Cooper 所著的《管理模型与线性规划的工业应用》(*Management Models and Industrial Applications of Linear Programming*)一书中首次提出的^[7]。

Lee 在其 1972 年出版的《决策分析用的目标规划》(*Goal Programming for Decision Analysis*)一书中介绍了目标规划的基本概念、解法及其在生产计划、财务决策、市场决策、公司计划、学院计划、政府决策、医疗保健计划等多方面的应用,是致力于讨论目标规划的第一本专著^[8]。

Ignizio 在他 1976 年所著的《目标规划及其扩展》(*Goal Programming and Extensions*)一书中阐明了目标规划的基本理论^[9],并将其应用扩展到整数规划及非线性规划领域,此后他又提出了目标规划的对偶和效率较高的求解算法。Schniederjans 在其 1984 年出版的《线性目标规划》(*Linear Goal Programming*)一书中详细讨论了目标规划的应用^[10]。

Romeo 在其 1991 年出版的《目标规划关键问题手册》(*Handbook of Critical Issues in Goal Programming*)一书中探讨了目标规划的建模方法^[11],并给出了详尽的(350 篇以上)参考文献目录。在 Ignizio 和 Cavalier 于 1994 年出版的《线性规划》(*Linear Programming*)一书中对目标规划及其向人工智能领域的扩展进行了综述^[12]。

大体上说,20 世纪 70 年代到 80 年代初期是目标规划蓬勃发展的阶段,许多学者进行了多方面的探索,发表了数百篇研究论文,在理论和实践两方面都有不少进展。尽管学术界都承认目标规划是一种解决实际生活中多目标问题的有效方法和一个强大的工具,但对目标规划进行研究和应用的热情在 20 世纪 80 年代中期以后却有所减退。其原因之一是普遍缺乏建立有效的目标规划模型所需的知识,二是缺少商业化的大型目标规划求解软件,从而阻碍了目标规划的实际应用。

从20世纪90年代中期开始,目标规划又开始引起人们的注意。1994年6月1日至3日在英国朴次茅斯(Portsmouth)大学召开了第一届多目标规划与目标规划理论与应用国际会议(MOPGP 94)^[13],会上共宣读了10篇目标规划方面的论文, Ignizio 教授在会议上作了有关目标规划的主题演讲。他指出,自从目标规划在20世纪60年代提出并应用之后,在解决现实世界的一些难题中取得了相当大的成功,特别是对那些具有众多而相互矛盾的目标,以及软硬约束共存的问题,用常规的方法求解时通常都要作许多简化的(往往是有问题的)假定。从解决美国太空计划中的工程设计问题到进行预测和成本测算,都已证明目标规划是一个解决现实问题的有效而实用的方法。但遗憾的是有些研究人员只热衷于探索这一新“热门”工具的新颖特性,而忽视了过去理解它在决策中的特定作用,从而阻碍了目标规划的发展。他在报告中还列举了许多在多目标决策学术界还鲜为人知的目标规划的新应用。

1996年5月16日至18日在西班牙的托雷莫里诺斯(Torremolinos)召开了第二届多目标规划与目标规划理论与应用国际会议^[14],会上宣读了8篇有关目标规划的论文,从中可以看到在理论和应用方面的一些新进展,例如,在克服决策变量的量纲不一致性、启发性搜索解法、动态目标规划,以及在股票市场、配送系统设计、投票行为、模糊估计等方面的应用。

我国学者在目标规划方面的研究大致开始于20世纪80年代初期,主要侧重于其应用,不仅翻译了 Ignizio、Lee 等的著作;宣家骥、方爱群^[15],陈景艳^[16],赵可培^[17],陈昌年^[18],裴鑫德^[19]等还编写了目标规划方面的专著;近年来国内学者每年都有十多篇论文发表。但由于我国学术界对目标规划的了解相当不够,国内外的学术交流较少,又缺乏适用的求解软件,故其研究深度及应用广度都远远逊于线性规划、整数规划及动态规划等其他数学规划方法。

1.4 目标规划的基本概念

如上所述,目标规划是针对线性规划的局限性而研究出来的一种数学规划方法,为了更好地适应决策者解决某些现实问题的需要,特归纳下述基本概念。

1. 在每个约束条件中引入正、负偏差变量,使硬约束变成软约束

为了避免在线性规划中常会出现的“无可行解”情况,增加决策的灵活性,在目标规划的每个目标条件中都引入了相应的正、负偏差变量,这就使得线性规划中的硬约束变成了软约束,大大增加了求得可行解的机会。

2. 将距各个目标值的偏差总和最小作为目标函数,便于处理多目标问题

在用线性规划处理多目标问题时,通常要在目标函数中采用对各个目标加权

的方法,再以使其总和最大或最小为目标。这样就使得各个决策变量通常都要在目标函数中出现,因而变得庞大而复杂,不便于求解。而目标规划则将线性规划中各个约束条件的右端项作为目标值,而将距各个目标值的偏差总和最小作为目标函数,这就使得在目标函数中只包含偏差变量,而由于每个目标最多只有两个偏差变量(其中不必要的一个偏差变量还可不进入目标函数中),且目标数要比决策变量数少得多,故非常便于处理多目标问题。

3. 用划分优先级的方法来处理多个目标的相对重要性,能更好地适应决策者的判断

在用线性规划处理多目标问题时,通常根据决策者的判断来确定各个目标的权重,但决策者通常只能定性地判断各个目标之间的相对重要性,难以定量地给出权重。而目标规划则用划分优先级的方法来处理多个目标的相对重要性,能更好地适应决策者的定性判断。此外,用划分优先级的方法还可以减少决策变量之间的量纲不一致性问题的发生。

4. 通过变量定界的方法来解决多解问题

在目标规划中决策变量的数目往往大大超过目标的数目,也常大于约束条件的数目,这样在求解时就容易产生多解问题。目标规划可要求决策者对变量定界,即定出允许其变动的范围,从而可以通过灵敏度分析来解决多解问题。

为了说明目标规划的上述特点,我们可将例 1.1 中的问题修改为如下的问题。

例 1.2 某化工厂利用 A、B 两种原料在一套装置内轮换生产甲、乙两种产品,有关数据如下:

产品	原料 A 单耗(t/t)	原料 B 单耗(t/t)	售价/(元/t)
甲	1.0	2.0	15 000
乙	1.0	1.0	11 000

原料 A、B 的购入价分别为 3 000 元/t 及 2 000 元/t,除原料费以外的其他费用(包括工资、折旧费、管理费等)为每月 300 000 元。若原料 A、B 的库存量分别为 60t 及 90t,产品乙的定货合同为 40t,而厂领导希望首先应达到 120 000 元的利润指标,其次是完成定货合同,并应充分利用库存原料,不够时可以添购。问利润目标和定货合同是否可以完成?原料 A、B 是否够用?

解:当用目标规划来解该问题时,首先应当确定共有到达利润指标、完成定货合同及充分利用库存这 3 个目标,并用 d^+ 和 d^- 分别表示其正、负偏差变量。其次按照要求确定这 3 个目标的优先顺序,分为 3 个优先级。从而可以建立目标规划模型如下(下面的“s. t.”为“subject to”的缩写,下同):

$$\begin{aligned}
\min \quad & a = P_1(d_1^+ + d_1^-) + P_2(d_2^-) + P_3(d_3^- + d_4^-) \\
\text{s. t.} \quad & 8\,000x + 6\,000y - 300\,000 + d_1^- - d_1^+ = 120\,000 \text{ (利润约束)} \\
& y + d_2^- - d_2^+ = 40 \text{ (产品乙定货约束)} \\
& x + y + d_3^- - d_3^+ = 60 \text{ (原料 A 库约束)} \\
& 2x + y + d_4^- - d_4^+ = 90 \text{ (原料 B 库存约束)}
\end{aligned}$$

求解后可得 $x = 22.5$, $y = 40$; 以及

- (1) $d_1^+ = d_1^- = 0$, 即利润目标刚好完成;
- (2) $d_2^+ = d_2^- = 0$, 即客户定货合同刚好完成;
- (3) $d_3^- = 0$, $d_3^+ = 2.5$, 即原料 A 不够用, 还要外购 2.5t;
- (4) $d_4^- = 5$, $d_4^+ = 0$, 即原料 B 还剩余 5t。

在目标规划中最常用也最成熟的是线性目标规划(linear goal programming), 即各个约束条件都是决策变量的线性连续函数。在有关文献中还报道过非线性目标规划、整数目标规划以及交互作用目标规划等, 但由于解法繁复, 故实际上很少应用。

1.5 线性目标规划的基本类型及求解方法^[20]

目标规划模型可以分为两大类型。

第一种类型称为加权重的目标规划(WGP), 即可根据偏差对决策者的重要程度对其赋予权重, 并使其加权和为最小。WGP 的数学表达式为

$$\begin{aligned}
\min \quad & a = \sum_{i=1}^m (w_i^- d_i^- + w_i^+ d_i^+) \\
\text{s. t.} \quad & f_i(x) + d_i^- - d_i^+ = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad x \in C_s
\end{aligned}$$

式中, x 为待求解的决策变量集; m 为目标数; 为 $f_i(x)$ 是 x 的线性函数(目标), 它是对应第 i 个目标的, 而 b_i 则是该目标的目标值; d_i^- 和 d_i^+ 分别为对该目标值的负偏差及正偏差变量, 表示对该目标值的不足与过剩; w_i^- 和 w_i^+ 分别为对这些偏差所赋予的权重; C_s 为像在线性规划中那样的任一硬约束集。

第二种类型称为设优先级的目标规划(LGP), 即对偏差变量设定优先顺序, 再依次使其达到最小。所谓优先级最小化就是依次使每一优先级最小化, 而在使某一级最小化时, 优先级较其高的各级已经求得的最小值应保持不变。LGP 的数学表达式为

$$\begin{aligned}
\text{lex min} \quad & a = [g_1(d^-, d^+), g_2(d^-, d^+), \dots, g_K(d^-, d^+)] \\
\text{s. t.} \quad & f_i(x) + d_i^- - d_i^+ = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad x \in C_s
\end{aligned}$$

式中, K 为优先级数; a 为 K 个优先级的有序向量。

按照常规, 任何“线性规划”型的硬约束都应放入第 1 优先级中。在某一优先