SHIFANZHUANKESHIYONGJIAOCAI

师范专科试用教材

初等代数研究

吉林教育出版社

师范专科试用教材

初 等 代 数 研 究

师范专科试用教材

初等代数研究

王纪书　谷昭安
侯秀琴　袁极民　编

责任编辑：王铁义　　封面设计：王劲涛

出版：吉林教育出版社
发行：吉林省新华书店

787×1092毫米　32开本　11.75印张　257.000字
1987年10月第1版　1987年10月第1次印刷
印数：1—3458册
统一书号：7375•587　定价：2.05元
X/G•245

师专数学教材
出版说明

师范专科学校承担着培养大批合格的初中教师的重任。随着九年制义务教育的普及和四化建设的深入发展，师专的地位和作用愈来愈受到社会的重视。但是，就师专数学专业而言。到目前为止，国内还没有公开出版一套完整的、令人满意的专业教材。这给师专教学带来了一定的困难。为了解决这一问题，填补这一空白，在吉林省教育委员会的组织和资助下，由四平师院、吉林师院、长春师院、通化师院、白城师专、齐齐哈尔师院、廊坊师专、内蒙民族师院、昭盟蒙族师专等九所师范院校联合编写了这套教材。本套教材共有十四种，十五册。它们是：《空间解析几何》，《高等代数》，《数学分析》（上、下册），《概率论与数理统计》，《逻辑代数与计算机语言》，《普通物理》，《初等代数研究》，《初等几何研究》，《中学数学教材教法总论》，《高等几何》，《常微分方程》，《复变函数》，《高等数学》（物理专业用），《高等数学》（化学专业用）。

本套教材是根据国家教委制定的二年制师范专科学校的教学计划（征求意见稿）和各门课程的教学大纲并结合九所院校的教学实践编写的。为保证教学质量，邀请了东北师大、吉林大学等校的二十多位教授、专家、学者组成教材编审委员会，对全套教材的编写进行具体指导和严格审查。

本套教材包括了教学计划规定的师专数学专业的全部专

业课程（必修课及选修课）的教材以及物理和化学专业的高等数学教材。编写时充分注意了各门教材内容上的衔接与配合，深度和广度方面的协调一致，并在文字使用、表述方式以及名词术语和符号的使用等方面有统一的要求，力争规范划一。

本套教材从培养目标出发，突出了师专教育的要求和特点。教材选择上避免了“多、深、尖”的弊病，体现了“少、广、新”的原则。力求培养学生具有坚实的理论基础和广阔的视野，以适应“三个面向”的需要。在表述方面，在充分注意科学性和严密性的前提下，力求通俗易懂，深入浅出，详尽透彻，易教易学。

为了加强对学生的能力培养和科学的思维方法的训练，各门教材都配备了较多的例题和习题。它们都经过精心选择，与正文内容密切配合，有些还是正文内容的补充和提高，对于难度较大的习题，作了适当的提示。

本套教材不仅可供师范专科学校使用，还可作为教育学院、职业大学、电视大学以及函授、刊授等相应专业的教材，亦可作为师范院校本科及其它院校有关专业的教学参考书。

编写一套完整的、适应四化建设需要的教材是一项十分艰巨的任务。我们的工作只是一个初步的尝试，缺点和谬误之处在所难免，诚恳希望得到有关专家和广大读者的批评指正。吉林省教育委员会和参加编写工作的九所院校的有关领导对于本套教材的编写出版给予了宝贵的支持，谨此表示衷心的感谢。

师专数学专业教材协编组

1986年10月

目　　录

第一章 数

数的产生是人类文明发展的重要标志。它是在长期的生产和交换过程中形成的。在人类社会初期，为了实际的需要，人们用物体逐一比较的办法来区别多与少，这种比较的办法实质是把两个物体集合的元素间建立对应关系。这时人们虽然没有把数从具体物体中分离出来，但已被理解为物体集合不可缺少的性质。也就是说，尽管不能表明它，却可以理解它。以后则学会了将物体与第三者（如人体的手指、墙上刻痕或悬挂的绳索等）来进行间接比较，这时数已被指明为物体集合的属性，但还没有把它当做“抽象的数”从物体的集合中分离出来，只能形象地、粗糙地说明一些数，从而产生了不依附于具体对象的“个数”的概念。

随着生产和交换活动的扩大，人们千百万次地重复这种比较，逐步地把数同具体物体集合分离出来，并且给予了符号和语言，这就产生了最早的数。正是由于数字符号的引进，使人们对自然数的认识出现了重大的突破。数字符号不仅是抽象数的化身，并且由于它的引进和进位制的产生，一方面使得记数范围得到无限扩大；另一方面，也使得复杂的算术运算有了实施的可能性，并且建立和证明了数的一般理论，于是形成了自然数。

随着人类对量的认识的发展，数的概念也在不断地扩展，由于自然数系是一个离散的、而不是稠密的数系，它只能表示一个单位的整数倍，而无法表示它的部分。为了表示可

分割量而引进了分数。

人们在形成数的概念的同时，也逐步形成“形”的概念，并且它们互相作用。希腊人发现正方形的对角线与其边长是不可通约的，它第一次向人们揭示了有理数的缺陷，为了表示不可通约的线段，引入了（正）无理数。由于记数形式上的需要引入数零；为了表示相反意义的量引入了负数。但是实数理论的形成还是十九世纪后半叶，由于建立微积分学理论的需要，实数理论才完整地建立起来。

虚数概念的引进则与前几次不同，它首先是为着解决数学本身的问题而提出的。还在古代，在解一元三次方程时，遇到了负数开方的问题，为了解决这个问题，当时数学家引入了新数，人们叫它虚数，但在很长时间不被人们所认识，直到复数的直观几何表示出现，虚数才得到具体的解释和应用。

从上面简短的叙述中我们看到

1．数的概念反映物体集合量的特征。数的概念是在分析大量的实践经验的基础上加以抽象概括而产生的。在人类历史发展的长河中，各种新数的出现是互相交错的。在人们还没有完全认识负数之前，早已有了无理数的概念；在实数的理论还没有建立之前，已经产生了虚数的概念。

2．数的每一次扩张，总是由于原有数集与解决具体问题的矛盾而引起的。这些问题有的是从实际中提出的，有的是由数学本身提出的（如虚数的产生），然后在实践中得到解释和应用才被承认。因此，研究数的理论，不能完全按照数的历史发展进程。作为教学的数，首先建立起自然数系，然后按照一定的原则在自然数的基础上逐步扩张。

从原有数集扩张到新数集要遵循下列原则

1．原数集是扩张后的新数集的真子集；

2．原数集定义了的元素间的关系和运算在新数集中同样地被定义；

3．对原数集中的元素在新数中定义的运算结果与在原数集中的运算结果一致，且基本运算律保持；

4．在原数集中不能施行或不能完全施行的某种运算，在新数集中能够施行；

5．新数集是满足上述四条的数集中的最小数集．

按照上述扩张原则，通常有两种扩张方法．一种是把新引进的数加到已建立的数系中而扩张．

自然数$\xrightarrow{\text{引入零}}$非负整数$\xrightarrow{\text{引入（正）分数}}$非负有理数$\xrightarrow{\text{引入负数}}$有理数$\xrightarrow{\text{引入无理数}}$实数$\xrightarrow{\text{引入虚数}}$复数．

另一种是纯粹公理化建立起自然数的理论，再根据扩张的原则，从理论上创造一个新集合，通过定义等价类建立新数系，然后指出新数系包含一个与原数系同构的部分数系．

§1　自然数

自然数是人类最早认识的数系．世界上不同地区的许多民族，在历史上都各自独立地用自己的文字来表示自然数，以后又有了分数、负数、实数、虚数，使得数扩展到更广泛范围．然而，也许这些随时都在使用的数太基本了，因此在十九世纪以前的漫长历史中，没有人感到需要给它们以严格地定义．

但是数学的深入发展，却越来越迫切地要求自己有一个

坚实的逻辑基础。数学分析的奠基必须要求有完整地实数理论，这就要求严格定义无理数。要严格定义无理数，必须严格定义有理数，而有理数是以自然数为出发点构造的，这样自然数作为其它数系的逻辑上的出发点，也就成了整个数学分析大厦的基石。

自然数有两种作用，一种是计数；一种是排序。相应地就有两种理论，一种是基数理论；一种是序数理论。本节重点介绍基数理论。

1.1 自然数的基数理论

自然数的基数理论是以“集合”为基础建立起来的。

1．自然数的概念

两个集合A与B元素之间存在一一对应，则称这两个集合是等价的，记为$A \sim B$。等价集合的共同特征称为基数(或势)。对有限集合来说，基数就是元素的个数。

定义1　有限集合的基数叫做自然数。

例如，一个人的集合与一本书的集合，一张桌子的集合等等，都是等价集合。这类集合的基数用符号“1”来表示。“1”就是一个自然数。

这样，任何具有相同基数的等价集合类（有限的）都对应一个自然数；任何一个自然数都对应一类等价的有限集合。

2．自然数大小的比较

定义2　如果对应自然数a、b的等价集合分别用A、B代表，那么

（1）　若$A \sim B$，则称a等于b，记作$a=b$；

（2）　若$A \sim B' \subset B$，则称a小于b，记作$a<b$；

（3） 若 $A \supset A' \sim B$，则称 a 大于 b，记作$a>b$。

由于集合 A、B 之间有且仅有三种关系$A \sim B$、$A \sim B' \subsetneq B$、$A \supset A' \sim B$ 之一成立，因而可以推出自然数下面的顺序律

两个自然数 a、b 之间有且仅有下面三种关系之一成立。

$a>b$；　　$a=b$；　　$a<b$

由集合的等价性质还可以推出

（1） $a=a$　　（自反性）

（2） $a=b$，则 $b=a$　　（对称性）

（3） $a=b$，$b=c$，则 $a=c$　　（传递性）

（4） $a>b$，则 $b<a$　　（反对称性）

（5） $a>b$，$b>c$，则 $a>c$　　（传递性）

（6） $a>b$，$b=c$，则 $a>c$

把自然数按大小顺序排列，得到数列

$1, 2, 3, 4, \cdots$

称为自然数列。自然数列里有最小数1，而没有最大数。

3 自然数的运算

在这里我们将以集合的理论为基础建立自然数的算术运算，并讨论运算性质。

定义3 设 A、B 为两个没有公共元素的有限集合，它们的基数分别是 a、b，如果$C=A\cup B$，则称集合C 的基数 c 为 a 与 b 的和，记作 $a+b=c$。a 叫做被加数，b 叫做加数。求和的运算叫做加法运算。

由集合$C=A\cup B$，是唯一确定的有限集合，因此自然数的加法永远可以施行，且和是唯一的。

因为对集合 A、B，有$A\cup B=B\cup A$，所以

$$a+b=b+a$$

即加法满足交换律。

设 A、B、C为任何二者都没有公共元素的有限集合，它们的基数分别是 a、b、c，由

$$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$$

可得

$$a+(b+c)=(a+b)+c$$

即自然数加法满足结合律。

定义 4 设 a、b 是两个自然数，如果存在一个自然数 c，使 $b+c=a$，则 c 叫做a与b的差，记作

$$c=a-b$$

a 叫做被减数，b 叫做减数。求两个自然数差的运算叫做减法运算。

在自然数集合里，减法运算不是永远可以施行的。只有在 $a>b$ 时,$a-b$才存在。如果 $a-b$ 存在,则结果是唯一的。

定义 5 设A_1，A_2,…,A_b是两两间没有公共元素 b个等价集合，它们的基数是 a,如果集合 $c=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_b$ 的基数是 c，则称 c 为 a 与 b 的积，记作

$$c=a\times b\ (\text{或者}c=a\cdot b)$$

a 叫做被乘数，b 叫做乘数。求积的运算叫做乘法运算。

当$b=1$时，规定 $a\times 1=a$

在自然数集合里，乘法永远可以施行，且积是唯一的。

自然数的乘法满足：

（1） 乘法交换律

$$a\times b=b\times a$$

证 设两两没有公共元素的等价集合为

$$A_1=\{m_1,\ m_2,\ \cdots,\ m_a\}$$

$$A_2=\{n_1,\ n_2,\ \cdots,\ n_a\}$$

$$\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots$$

$$A_b=\{r_1,\ r_2,\ \cdots,\ r_a\}$$

它们的基数是 a。把这些集合的元素重新组合，使得有 a 个等价集合，它们的基数是 b，这些集合是

$$B_1=\{m_1,\ n_1,\ \cdots,\ r_1\}$$

$$B_2=\{m_2,\ n_2,\ \cdots,\ r_2\}$$

$$\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots$$

$$B_a=\{m_a,\ n_a,\ \cdots,\ r_a\}$$

由 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_b=B_1\cup B_2\cup\cdots B_a$，可得

$$a\times b=b\times a$$

（2） 乘法结合律

$$(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$$

证 由乘法定义

$$a\times b=\underbrace{a+a+\cdots+a}_{b\text{个}}$$

$$\begin{aligned}(a\times b)\times c&=\left.\begin{array}{l}\overbrace{a+a+\cdots+a}^{b\text{个}}\\+a+a+\cdots+a\\+\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\+a+a+\cdots+a\end{array}\right\}c\text{行}\\&=\underbrace{a+a+\cdots+a}_{b\times c\text{个}}\\&=a\times(b\times c)\end{aligned}$$

（3） 乘法关于加法的分配律

$$(a+b)\times c=a\times c+b\times c$$

证 由乘法定义、加法交换律、结合律有