



“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材

弹性力学

Elasticity

第5版

徐芝纶

上册

高等教育出版社



“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材

弹性力学

Tan xing Lixue

Elasticity

第5版

徐芝纶

上册

高等教育出版社·北京

内容提要

本书是“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材，是在第4版的基础上修订而成的。第1版获“1977—1981年度全国优秀科技图书”奖，第2版获1987年“全国优秀教材特等奖”。

全书分上、下两册。上册为数学弹性力学部分，内容包括：绪论、平面问题的基本理论及其直角坐标解答、极坐标解答、复变函数解答、温度应力的平面问题、平面问题的差分解；空间问题的基本理论及其解答，等截面直杆的扭转、能量原理与变分法、弹性波的传播。下册为应用弹性力学部分，内容包括：薄板的小挠度弯曲问题及其经典解法、差分解法、变分解法及薄板的振动、稳定、各向异性、大挠度问题；壳体的一般理论以及柱壳、旋转壳、扁壳。

本书可作为高等学校工程力学、土建、水利、机械、航空航天等专业弹性力学课程的教材，也可供工程技术人员参考和应用。

图书在版编目(CIP)数据

弹性力学.上册 / 徐芝纶编著.--5 版.--北京：
高等教育出版社,2016.3

ISBN 978-7-04-044689-0

I . ①弹… II . ①徐… III . ①弹性力学-高等学校-
教材 IV . ①O343

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 021497 号

策划编辑 周婷
插图绘制 杜晓丹

责任编辑 赵向东
责任校对 张小镝

封面设计 张楠
责任印制 田甜

版式设计 马云

出版发行 高等教育出版社
社址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120
印刷 固安县铭成印刷有限公司
开本 787mm×960mm 1/16
印张 24.25
字数 430 千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598

网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.hepmall.com.cn>
<http://www.hepmall.com>
<http://www.hepmall.cn>
版 次 1978 年 1 月第 1 版
2016 年 3 月第 5 版
印 次 2016 年 3 月第 1 次印刷
定 价 37.70 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换
版权所有 侵权必究
物 料 号 44689-00

第五版前言

徐芝纶院士编著的《弹性力学》(上、下册)在国内具有广泛的影响,是一部经典的力学教材。第四版自2006年出版以来,已有近十年的时间了。为了适应科学技术的发展,反映教学实践中的经验,现修订出版第五版。

第五版的修订工作是在高等教育出版社的支持下进行的,河海大学工程力学系曾专门组织召开座谈会,并广泛征求国内有关高校从事弹性力学教学的教师意见,经多次讨论研究,形成了本次的修订大纲。

本次修订的主要内容如下:

(1) 对弹性力学基本理论和方法进行了强调和说明,特别是对弹性力学的基本概念、基本假定、基本方程、边界条件、圣维南原理的应用、能量原理与变分法等都做了进一步的阐述。

(2) 增加了“弹性力学的发展简史”和“叠加原理”。

(3) 考虑到原书缺乏变分法专门知识的介绍,增加了“变分法初步”;基于许多专业书刊上已普遍使用张量记号的实际情况,增加了“笛卡儿张量简介”。为了不影响原书的体系编排,这两部分内容均作为补充材料附在正文后面,供教师讲授或学生参考之用。

(4) 为了加强实践性教学环节,补充了一些习题。

(5) 将“解的唯一性定理”移到第八章,改写了个别章节,对全书的文句进行了完善和修订。

在修订过程中,得到了河海大学两任校长姜弘道教授和王乘教授的关心,王润富教授提出了许多宝贵意见,余天堂教授认真审阅了修订稿,许多院校的教师也以不同方式提出了重要的建议,谨向他们表示深切的谢意。并希望广大教师和学生在今后的使用过程中,对修订版提出意见,以使徐芝纶院士编著的教材得到进一步完善。

本书由河海大学章青具体执笔修订。

章 青

2015年12月

第四版前言

《弹性力学》是徐芝纶教授(1911—1999)为工程力学专业、工科研究生等编著的一部教材,1990年出版了第三版,至今已有16年,为满足教学要求,现修订出版第四版。

第四版在保持第三版的内容、编排和写作风格不变的前提下,进行以下几方面的修订:

- (1) 为方便读者阅读,在正文之前增加了“主要符号表”。
- (2) 按1993年发布的GB 3100~3102—93《量和单位》系列国家标准及有关规定,规范使用量和单位的名称、符号及书写规则。
- (3) 重新绘制了全部插图,少数图示有所改进,图注均用宋体字。
- (4) 在反复斟酌的基础上,对个别字、词及表述作了修订,在“能量原理及变分法”一章中增加了余能概念。

第四版的修订工作由王润富(河海大学)、徐慰祖(北京工业大学)、张元直(高等教育出版社)共同完成。

修订不当之处敬请读者指正。

修订者
2006年7月

第三版前言

在安排本书第三版的内容时,对总的体系未加更改,对次序的先后也只作了很小的变动。

由于国内的大专院校和设计单位都已普遍使用电子计算机(至少已普遍使用微型机),用手工进行的松弛计算已经失去了实用价值,所以第三版中取消了这方面的内容。

平面问题的位移差分解,与应力函数差分解相比,具有较广泛的适用性,但是,对同样的精度要求说来,方程较多是其缺点。由于电子计算机的使用,这一缺点已无关紧要,因此,第三版中增加了位移差分解的内容。

兄弟院校的几位同志建议,增加“解答的唯一性”和“功的互等定理”。还有同志认为,既然空间轴对称问题的应力函数等同于勒夫位移函数,前者就不必介绍了。编者采纳了这两方面的建议。

为了便于教学,第三版中对文句和插图作了不少的修改,对例题和习题也作了一些调整。

徐芝纶

1987年5月

第二版前言

本书在 1979 年出版以后,曾蒙若干兄弟院校的教师作为教材试用,并先后提出不少宝贵的意见和建议。现在已经按照这些意见和建议进行了修改,择要说明如下。

原书中关于楔形坝体温度应力的一般分析,数学运算较繁,在有限单元法广泛应用于坝体应力分析以后,已经失去了应用价值。原书中关于等截面直杆弯曲问题的解答,虽然属于古典弹性力学上的重大成就,但在工程上很少有人应用。因此,在修订版中删去了这两方面的内容。

修订版在平面问题的基本理论中增加了“斜方向的应变”这一节,是为了适应结构实验分析方面的需要;在薄板小挠度弯曲问题的边界条件中,增加了弹性支承边的边界条件,因为弹性支承是板壳理论中的一个重要概念,而且在很多的板壳结构中,支承构件的弹性也是必须加以考虑的。

原书中关于平面问题应力函数以及应力和位移的复变函数表示,沿用过去文献中的传统推导方法,引用了几个人为的调和函数,显得曲折而不自然。在修订版中,放弃了这些调和函数而用共轭复变数进行推导,比较直观,容易为学生接受。

等曲率扁壳的简化计算,是我国的力学工作者们在 50 年代末期和 60 年代初期的重大贡献,至今还不失为国际上的先进成果。因此,在修订版中稍许增多了这方面的内容。

此外,在很多的章节中,文字叙述和数学推导作了某些修改,习题也有些调整。

恳切希望兄弟院校的教师继续对本书进行严格的审查,把发现的缺点和错误及时通知本人,以便再度加以修改或更正,使本书成为比较合用的一部教材。

徐芝纶

1982 年 4 月

第一版前言

本书是为高等学校工科力学专业编写的弹性力学教材。

全书分上下两册,上册先讲平面问题,再讲空间问题,下册先讲薄板问题,再讲薄壳问题。这样安排,大致符合由浅入深、由易到难、循序渐进的原则。

为了训练学生理论推导和实际运算的能力,每章之后都附有难易程度不同的习题,任课教师可按照专业教学计划的要求和学生课外学时的多少,适当布置。

在大多数章的最后,列出了参考教材的目录,以使学生在阅读了这些教材以后,能够更全面、深入地掌握该章的内容。

内容索引和人名对照表,附在下册的书后。

本书承主审人北京航空学院王德荣同志和武汉建筑材料工业学院王龙甫同志,以及同济大学、大连工学院、太原工学院、华北水利水电学院、西南交通大学、天津大学参加审稿的同志提出了宝贵的意见,特此表示衷心的感谢。

徐芝纶

1978年10月

主要符号表

弹性力学

坐标 直角坐标 x, y, z ; 圆柱坐标 ρ, φ, z ; 极坐标 ρ, φ ; 球坐标 r, θ, φ 。

体力分量 f_x, f_y, f_z (直角坐标系); f_ρ, f_φ, f_z (圆柱坐标系); f_ρ, f_φ (极坐标系)。

面力分量 $\bar{f}_x, \bar{f}_y, \bar{f}_z$ (直角坐标系); $\bar{f}_\rho, \bar{f}_\varphi, \bar{f}_z$ (圆柱坐标系); $\bar{f}_\rho, \bar{f}_\varphi$ (极坐标系)。

位移分量 u, v, w (直角坐标系); u_ρ, u_φ, w (圆柱坐标系); u_ρ, u_φ (极坐标系)。

边界约束分量 $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ (直角坐标系)。

方向余弦 l, m, n (直角坐标系)。

应力分量 正应力 σ , 切应力 τ ; 全应力 p ; 斜面应力分量 p_x, p_y, p_z (直角坐标系); σ_N, τ_N ; 体积应力 Θ 。

应变分量 正应变 ε , 切应变 γ ; 体应变 θ 。

势能和功 应变能 V_e , 外力势能 V , 总势能 E_p , 功 W , 动能 E_k , 应变余能 V_c 。

艾里应力函数 Φ , 扭转应力函数 Ψ 。

弹性模量 E , 切变模量 G , 体积模量 K , 泊松比 μ 。

质量 m , 密度 ρ , 重力加速度 g 。

温度场和温度应力

温度 T , 绝热温升 θ 。

热量 Q , 热流密度 q 。

比热容 c , 线胀系数 α 。

导热系数(热导率) λ , 导温系数(热扩散率) a , 运流放热系数(表面传热系数) β 。

薄板力学

挠度 w , 振型函数 W , 振动频率 ω , 抗弯刚度 D 。

中面内力(薄膜内力) 拉压力, 平错力(纵向剪力) $F_{Tx}, F_{Ty}, F_{Txy} = F_{Tyx}$ (直角坐标系); $F_{Tp}, F_{T\varphi}, F_{T\rho\varphi} = F_{T\varphi\rho}$ (极坐标系)。

平板内力 弯矩, 扭矩 $M_x, M_y, M_{xy} = M_{yx}$ (直角坐标系); $M_\rho, M_\varphi, M_{\rho\varphi} = M_{\varphi\rho}$ (极坐标系)。

横向剪力, 总剪力 $F_{Sx}, F_{Sy}; F_{Sx}^t, F_{Sy}^t$ (直角坐标系)。 $F_{Sp}, F_{S\varphi}; F_{Sp}^t, F_{S\varphi}^t$ (极坐标系)。

薄壳力学

正交曲线坐标 α, β, γ 。坐标线上微分线段 ds_1, ds_2, ds_3 。

位移 u_1, u_2, u_3 ; 中面位移 u, v, w 。

正应变 e_1, e_2, e_3 ; 切应变 e_{23}, e_{31}, e_{12} 。

中面正应变 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 。中面切应变 ε_{12} 。中面主曲率 k_1, k_2 。中面主曲率改变 χ_1, χ_2 。中面扭率改变 χ_{12} 。壳体的中面荷载 q_1, q_2, q_3 。

中面内力(薄膜内力) 拉压力 F_{T1}, F_{T2} ; 平错力 F_{T12}, F_{T21} 。总平错力 F_{T12}^t, F_{T21}^t 。

平板内力 弯矩 M_1, M_2 ; 扭矩 M_{12}, M_{21} 。

横向剪力 F_{S1}, F_{S2} 。总剪力 F_{S1}^t, F_{S2}^t 。

量纲

国际单位制(SI)采用的基本量为, 长度(L), 质量(M), 时间(T), 电流(I), 热力学温度(Θ), 物质的量(N), 发光强度(J)。

目 录

(上 册)

第一章 绪论	1
§ 1-1 弹性力学的内容	1
§ 1-2 弹性力学中的几个基本概念	3
§ 1-3 弹性力学中的基本假设	7
§ 1-4 弹性力学的发展简史	8
第二章 平面问题的基本理论	12
§ 2-1 平面应力问题与平面应变问题	12
§ 2-2 平衡微分方程	13
§ 2-3 平面问题中一点的应力状态	15
§ 2-4 几何方程 刚体位移	18
§ 2-5 平面问题中一点的应变状态 斜方向的位移	21
§ 2-6 物理方程	24
§ 2-7 边界条件	26
§ 2-8 圣维南原理	28
§ 2-9 按位移求解平面问题	31
§ 2-10 按应力求解平面问题 相容方程	33
§ 2-11 常体力情况下的简化	35
§ 2-12 应力函数 逆解法与半逆解法	38
第三章 平面问题的直角坐标解答	44
§ 3-1 多项式解答	44

II 目 录

§ 3-2 矩形梁的纯弯曲	45
§ 3-3 位移分量的求出	47
§ 3-4 简支梁受均布荷载	50
§ 3-5 楔形体受重力和液体压力	55
§ 3-6 级数式解答	57
§ 3-7 简支梁受任意横向荷载	59
 第四章 平面问题的极坐标解答	65
§ 4-1 极坐标中的平衡微分方程	65
§ 4-2 极坐标中的几何方程及物理方程	67
§ 4-3 应力分量的坐标变换式	69
§ 4-4 极坐标中的应力函数与相容方程	71
§ 4-5 轴对称应力和相应的位移	73
§ 4-6 圆环或圆筒受均布压力 压力隧洞	75
§ 4-7 曲梁的纯弯曲	80
§ 4-8 圆盘在匀速转动中的应力及位移	82
§ 4-9 圆孔的孔边应力集中	85
§ 4-10 楔形体在楔顶或楔面受力	91
§ 4-11 半平面体在边界上受法向集中力	95
§ 4-12 半平面体在边界上受法向分布力	97
 第五章 平面问题的复变函数解答	103
§ 5-1 应力函数的复变函数表示	103
§ 5-2 应力和位移的复变函数表示	104
§ 5-3 各个复变函数确定的程度	106
§ 5-4 边界条件的复变函数表示	108
§ 5-5 多连体中应力和位移的单值条件	110
§ 5-6 无限大多连体的情形	113
§ 5-7 保角变换与曲线坐标	115
§ 5-8 孔口问题	118
§ 5-9 椭圆孔口	122
§ 5-10 裂隙附近的应力集中	128
§ 5-11 正方形孔口	132

第六章 温度应力的平面问题	138
§ 6-1 关于温度场和热传导的一些概念	138
§ 6-2 热传导微分方程	141
§ 6-3 温度场的边值条件	143
§ 6-4 按位移求解温度应力的平面问题	144
§ 6-5 位移势函数的引用	148
§ 6-6 用极坐标求解问题	152
§ 6-7 圆环和圆筒的轴对称温度应力	154
§ 6-8 楔形坝体中的温度应力	158
第七章 平面问题的差分解	164
§ 7-1 差分公式的推导	164
§ 7-2 稳定温度场的差分解	168
§ 7-3 不稳定温度场的差分解	172
§ 7-4 应力函数的差分解	176
§ 7-5 应力函数差分解的实例	181
§ 7-6 温度应力问题的应力函数差分解	183
§ 7-7 位移的差分解	186
§ 7-8 位移差分解的实例	196
§ 7-9 多连体问题的位移差分解	200
§ 7-10 温度应力问题的位移差分解	203
第八章 空间问题的基本理论	211
§ 8-1 平衡微分方程	211
§ 8-2 物体内任一点的应力状态	212
§ 8-3 主应力与应力主向	214
§ 8-4 最大与最小的应力	216
§ 8-5 几何方程 刚体位移 体积应变	218
§ 8-6 物体内任一点的应变状态	220
§ 8-7 物理方程 方程总结	224
§ 8-8 轴对称问题的基本方程	226
§ 8-9 球对称问题的基本方程	230
§ 8-10 叠加原理	232

§ 8-11 解的唯一性定理	235
第九章 空间问题的解答	240
§ 9-1 按位移求解空间问题	240
§ 9-2 半空间体受重力及表面均布压力	242
§ 9-3 空心圆球受均布压力	244
§ 9-4 位移势函数的引用	246
§ 9-5 勒夫位移函数及伽辽金位移函数	249
§ 9-6 半空间体在表面受法向集中力	251
§ 9-7 半空间体在表面受切向集中力	254
§ 9-8 半空间体在表面受法向分布力	256
§ 9-9 两球体之间的接触压力	259
§ 9-10 按应力求解空间问题	263
§ 9-11 等截面直杆的纯弯曲	266
第十章 等截面直杆的扭转	271
§ 10-1 扭转问题中的应力和位移	271
§ 10-2 扭转问题的薄膜比拟	275
§ 10-3 椭圆截面杆的扭转	277
§ 10-4 矩形截面杆的扭转	280
§ 10-5 薄壁杆的扭转	283
§ 10-6 扭转问题的差分解	286
第十一章 能量原理与变分法	291
§ 11-1 弹性体的应变能和应变余能	291
§ 11-2 位移变分方程 虚位移原理 最小势能原理	295
§ 11-3 位移变分法	298
§ 11-4 位移变分法应用于平面问题	301
§ 11-5 应力变分方程 虚应力原理 最小余能原理	306
§ 11-6 应力变分法	309
§ 11-7 应力变分法应用于平面问题	311
§ 11-8 应力变分法应用于扭转问题	315
§ 11-9 功的互等定理	318

第十二章 弹性波的传播	322
§ 12-1 弹性体的运动微分方程	322
§ 12-2 弹性体中的无旋波与等容波	324
§ 12-3 平面波的传播	326
§ 12-4 表层波的传播	329
§ 12-5 球面波的传播	332
附录 A 变分法初步	335
§ A-1 函数的变分	335
§ A-2 泛函及其变分	336
§ A-3 泛函的极值问题	338
§ A-4 欧拉方程与自然边界条件	339
附录 B 笛卡儿张量简介	341
§ B-1 指标符号	341
§ B-2 矢量的基本运算	344
§ B-3 坐标变换与张量的定义	345
§ B-4 张量代数与张量分析初步	348
§ B-5 弹性力学相关公式的张量记法	352
内容索引	355
人名对照表	366

第一章 絮 论

§ 1-1 弹性力学的内容

弹性是指外力或其他作用消失后,物体恢复原状的特性,是固体材料的基本属性之一。弹性体是仅考虑弹性性质的一种理想物体。

弹性体力学,通常简称为弹性力学,又称为弹性理论,是固体力学的一个分支。弹性力学研究弹性体由于受外力作用、边界约束或温度改变等原因而发生的应力、应变和位移。

弹性力学的任务与材料力学、结构力学的任务一样,是分析各种结构物或其构件在弹性阶段的应力和位移,校核它们是否具有所需的强度、刚度和稳定性,并寻求或改进它们的计算方法。然而,这三门学科在研究对象上有所分工,在研究方法上也有所不同。

在材料力学里,基本上只研究所谓杆状构件,也就是长度远大于高度和宽度的构件,如柱体、梁和轴等。这种构件在拉压、剪切、弯曲、扭转作用下的应力和位移,是材料力学的主要研究内容。在结构力学里,主要是在材料力学的基础上研究杆状构件所组成的结构,也就是所谓杆件系统,如桁架、刚架等。至于非杆状的结构,如板和壳,以及挡土墙、堤坝、地基等实体结构,则在弹性力学里加以研究。对于杆状构件作进一步的、较精确的分析,也须用到弹性力学。

虽然在材料力学和弹性力学里都研究杆状构件,然而研究的方法却不完全相同。在材料力学里研究杆状构件,除了从静力学、几何学、物理学三方面进行分析以外,大都还引用一些关于构件的变形状态或应力分布的假定,这就大大简化了数学推演,但是,得出的解答有时只是近似的。在弹性力学里研究杆状构件,一般都不必引用那些假定,因而得出的结果就比较精确,并且可以用来校核材料力学里得出的近似解答。

例如,在材料力学里研究直梁在横向荷载作用下的弯曲,就引用了平面截面的假定,得出的结果是:横截面上的正应力(弯应力)按直线分布。在弹性力学

里研究这一同一问题，就无须引用平面截面的假定。相反地，还可以用弹性力学里的分析结果来校核这个假定是否正确，并且由此判明：如果梁的高度并不远小于梁的跨度，而是同等大小的，那么，横截面上的正应力并不按直线分布，而是按曲线变化的，材料力学里给出的最大正应力将具有很大的误差。

又例如，在材料力学里计算有孔的拉伸构件，通常就假定拉应力在净截面上均匀分布。弹性力学里的计算结果表明：净截面上的拉应力远不是均匀分布，而在孔的附近发生应力集中，孔边的最大拉应力比平均拉应力大得多。

弹性力学可以分为数学弹性力学和实用弹性力学两部分。在数学弹性力学里，只用精确的数学推演而不引用关于变形状态或应力分布的假定。本书上册的内容属于数学弹性力学。在实用弹性力学里，和在材料力学里一样，也引用一些关于变形状态或应力分布的假定来简化数学推演，得出具有一定近似性的解答。这样，按照分析的方法和解答的精度说来，实用弹性力学是接近材料力学的；但是，由于其中所研究的问题比较复杂，同时还要用到数学弹性力学中的结果，所以这些研究内容归入弹性力学。本书下册的内容就属于实用弹性力学。

虽然在弹性力学里通常并不研究杆件系统，然而近几十年来，许多力学工作者致力于弹性力学和结构力学的综合应用，使得这两门学科越来越密切结合。弹性力学吸收了结构力学中的超静定结构分析法以后，大大扩展了它的应用范围，使得一些比较复杂的本来是无法求解的问题，得到了解答。这些解答虽然在理论上具有一定的近似性，但应用在工程上，通常却是足够精确的。在近几十年间快速发展起来的有限单元法，把连续弹性体划分成有限大小的单元构件，然后用结构力学里的位移法、力法或混合法求解，更加显示了弹性力学与结构力学综合应用的良好效果。

此外，对同一结构的各个构件，甚至对同一构件的不同部分，分别用弹性力学和结构力学或材料力学进行计算，常常可以节省很多的工作量，而仍然能得到令人满意的结果。

弹性力学在土木、水利、机械、交通、能源和航空航天等工程学科中具有重要的地位。随着社会的进步和发展，出现了许多大型、复杂的工程结构，这些结构的安全性和经济性的矛盾十分突出，必须对结构进行严密和精确的力学分析，这就需要应用弹性力学、其他固体力学的理论和相应的数值计算方法及实验技术。弹性力学作为其他固体力学最重要的基础，是进行工程结构力学分析必不可少的一门学科。