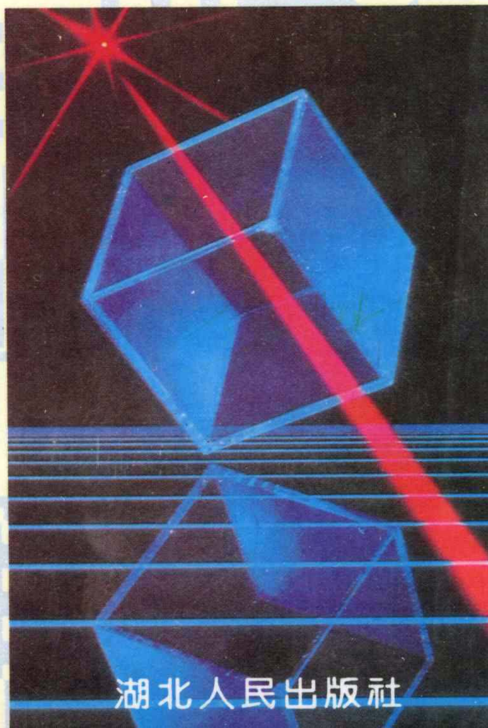
● 朱华伟 著

奥林匹克数学教程



湖北人民出版社

奥林匹克数学教程

朱华伟　著

鄂新登字 01 号

图书在版编目(CIP)数据

奥林匹克数学概论/朱华伟著.
武汉:湖北人民出版社,1995

ISBN 7-216-01751-X/O·6

Ⅰ.奥…
Ⅱ.朱…
Ⅲ.①初等数学-概论
②高等数学-概论
Ⅳ.①012 ②013

湖北人民出版社出版·发行
[武汉市解放大道新育村 33 号]
安陆市印刷厂印刷
850×1168 毫米 32 开本 11.875 印张 5 插页 295 千字
1996 年 2 月第 1 版 1996 年 2 月第 1 次印刷
印数:1-10640

定价:12.00 元

序

苏淳

正如本书作者所言："现在数学奥林匹克已经成为当今数学教育中的一股潮流。"这股潮流现今已不仅仅激荡着欧洲、北美和大洋洲，而且已冲向亚洲这块广袤而神秘的大地；不仅在中国和印度这些文明古国中引起了振荡，而且在包括四小龙在内的广大亚洲土地上产生了反响。

中国大陆这条有着数千年文明史的东方巨龙已不再是一条卧龙，它正处于前所未有的经济腾飞之中，并且以令人耳目一新的姿态回归到世界大家庭内，在科学技术、文化教育、艺术体育等众多领域的竞争中显示出自己的雄厚实力，摘取了一顶顶的桂冠，包括在数学奥林匹克领域内的最高水平的角逐场IMO（国际数学奥林匹克）中已连续七年保持了领先地位——4年总分第一，3年总分第

二。中国人的成绩已得到举世公认，中国人的民族自豪感和自信心空前增强。

如何使中国的数学奥林匹克事业持续不断地健康地发展下去，是现时放在有兴趣于这一事业的同仁们面前的一个重要课题。笔者认为，除了应吸引越来越多的人加入到这一事业中来，加强其群众性、组织和管理上的科学性之外，还应当努力地开展奥林匹克数学这一“已逐渐形成的特殊的数学学科”中的广泛而深入的科学研究工作，应当花力气组织起一支既有广泛的群众基础又有其中坚力量的科学研究队伍，努力提高其研究水平。

以笔者的陋见，这种研究应包括两个方面：一是深入地研究数学奥林匹克的历史和现状，探索奥林匹克数学的内在规律，加强与世界各国的联系，借鉴他国的做法，吸收其经验；二是加强对“命题工作”的组织和探讨，组织各种形式的命题讨论班或研讨会，其任务就是“生产”新的竞赛试题”。数学大师华罗庚教授说过：“出题比做题更难，题目要出得妙，出得好，要测得出水平。”因此可以说，命题是一门深奥的学问，应当花大力气来抓。本书作者指出：“命题是数学奥林匹克的中心环节，命题对数学奥林匹克活动的开展带有指导性作用，题目出得好坏是数学竞赛成败的关键。”作者在本书中所写的这几句话很好地概括出命题工作的重要性。以笔者之见，看一个国家奥林匹克数学水平的高低，不仅是看在IMO中夺取了多少块金牌、拿到了总分第几名；而且应当看其在奥林匹克数学领域中研究水平的高低，其中的一个显著标志就是：这个

国家一年中可以“生产”出多少道富有新意而又具有实用价值的妙题、好题来。前苏联每年一月份都在莫斯科大学数学力学系举行一次命题研讨会，集中全国四、五十位专家，历时半个月到一个月，命出一批题来用于当年的各级各类数学竞赛，其中往往有数十道妙题、好题。前苏联的这种努力奠定了它在奥林匹克数学界的强国地位，并因此而对IMO活动产生出广泛、深远而持久的影响，这种影响并未因苏联的解体而消失。

朱华伟先生的这本专著的问世，可以说是奥林匹克数学界的一件大事，更是一件好事。书名称之为《奥林匹克数学教程》实际上是应当称为“概论”的。因为它不同于一般的数学竞赛教程，它突破了一般竞赛教程以讲述竞赛数学的基本知识、介绍解数学竞赛题的方法作为目的格局，它是从介绍和研究奥林匹克数学的全貌入手，探讨了这门学科的深刻的内涵和内在的规律。笔者读来，深有爱不释手之感，深觉它有极高的阅读价值。这本专著是朱华伟先生多年来悉心从事奥林匹克数学研究所结出的硕果，是他献身于奥林匹克数学事业之心血的结晶，也是他奉献给奥林匹克数学界广大同仁们的一件丰厚的礼物。笔者相信，这本专著的问世，必将在我国奥林匹克数学界引起反响，并将对我国的数学奥林匹克事业产生出持久深远的良好影响。

1995年元旦于中国科学技术大学

前　言

自世界上第一次真正有组织的数学竞赛——匈牙利数学竞赛(1894年)以来,已有一百年的历史了。国际数学奥林匹克(International Mathematics Olympiad,简称IMO)已举办了35届,也有三十多年的历史。我国的数学竞赛始于1956年,虽道路坎坷,经历了三起两落的磨难,但今天也已走上繁荣发展的康庄大道。如今,世界上中学教育水平较高的国家大多举办了数学竞赛,并参加国际数学奥林匹克。现在数学奥林匹克已经成为当今数学教育中的一股潮流。

多年的数学奥林匹克的研究与实践证明,科学合理地举办各级数学奥林匹克对传播数学思想方法,培养学生学习数学的兴趣,增强学生的思维能力,丰富课外活动的内容,促进数学教师素质的提高和数学教学的改革,发现和选拔优秀人才等方面产生了积极的作用。1980年国际数学教育委员会决定成立国际数学奥林匹克委员会作为其下设的一个专业委员会,这在组织机构上保证了IMO的正常进行,同时也意味着在学术界得到了国际数学教育委员会的确认,即关于数学奥林匹克的研究是数学教育研究的一个重要课题。一百年数学奥林匹克的实践,已经为全面进行数学奥林匹克研究准备了丰富的素材。有人认为已经形成一个新的数学分支——奥林匹克数学。许多专家学者都在探索、研讨奥林匹克数学的形成与特征、内容与方法及命题与解题的规律和艺术,进而形成

奥林匹克数学的理论体系。但是，奥林匹克数学的体系究竟应该怎样，眼下尚无定论，还处在“百花齐放，百家争鸣”的探索阶段。

作为一种尝试，本书以IMO及国内外高层次数学奥林匹克为背景，以众多的数学奥林匹克文献为源泉，以作者多年从事数学奥林匹克的研究与实践为基础，概要论述了奥林匹克数学的一般理论及基本内容。全书分总论和分论两部分。总论部分论述了奥林匹克数学的形成背景、基本特征、命题原则和命题方法。分论部分把奥林匹克数学涉及到的内容归为数列、不等式、多项式、函数方程、平面几何、数论、组合数学、组合几何等八章；每一章包括内容概述（三大内容、基本问题、方法技巧、概念定理）和例题选讲两节，试图对数学奥林匹克所涉及的内容、方法、技巧作一总结和界定，并通过典型的例题进行阐述，注意题目来源与推广的讨论，重视新问题的收集与传统解法的优化，反映了国内外数学奥林匹克命题的最新潮流。书后的参考文献为读者提供一个进一步学习研究的线索。

笔者深知这些尝试是极为粗浅甚至是幼稚的，但本着抛砖引玉的想法将她献给多年来关心、支持和帮助我的前辈和同仁，献给辛勤耕耘在教学第一线的中学数学老师，献给有志于参与教学奥林匹克活动的大学生和中学生朋友。

本书的写作，得益于张景中、苏淳、林六十、张君达等四位教授对作者长期的指导、鼓励和教诲，在此向他们致以衷心的谢意；在本书的写作过程中，参阅了众多的文献资料，并得到数学教育界前辈和同仁的支持和帮助，得到湖北人民出版社的大力扶持。在此一并表示感谢。

对于本书存在的问题，热忱希望读者不吝赐教。

朱华伟

1994年7月

目录

总论

〔1〕第一章　奥林匹克数学的形成背景

(1)1.1　数学奥林匹克的历史

〈2〉1.1.1　溯源——解难题竞赛的来龙去脉

〈2〉1.1.2　数学奥林匹克的先导
——匈牙利数学竞赛

〈5〉1.1.3　数学奥林匹克的兴起及其发展

〈8〉1.1.4　数学奥林匹克在中国

(12)1.2　数学奥林匹克与奥林匹克数学

〔18〕第二章　奥林匹克数学的基本特征

(18)2.1　内容的广泛性

(33)2.2　命题的新颖性

(37)2.3　解题的创造性
(52)2.4　问题的研究性

〔71〕第三章　奥林匹克数学的命题原则
(72)3.1　科学性原则
〈72〉3.1.1　叙述的严谨性
〈72〉3.1.2　条件的恰当性
〈76〉3.1.3　结论的可行性
(77)3.2　新颖性原则
(79)3.3　选拔性原则
〈79〉3.3.1　试题的客观性
〈79〉3.3.2　试题的难度
〈80〉3.3.3　试题的区分度
(81)3.4　能力性原则
〈82〉3.4.1　数学能力的概述
〈83〉3.4.2　基本能力
〈89〉3.4.3　创造能力
(94)3.5　界定性原则
〔95〕第四章　奥林匹克数学的命题方法
(95) 4.1　演绎深化
(102)4.2　直接移用
(105)4.3　改造变形
〈105〉4.3.1　同构变形
〈106〉4.3.2　简化变形
〈111〉4.3.3　易位变形
〈112〉4.3.4　类比变形
〈116〉4.3.5　增加条件
〈118〉4.3.6　减少条件

(118)4.4 陈题推广
〈119〉4.4.1 从低维到高维的推广
〈121〉4.4.2 从特殊向一般的推广
(127)4.5 构造模型

分 论

〔134〕**第五章 数列**
(134)5.1 内容概述
(137)5.2 例题选讲

〔159〕**第六章 不等式**
(159)6.1 内容概述
(163)6.2 例题选讲

〔189〕**第七章 多项式**
(189)7.1 内容概述
(194)7.2 例题选讲

〔215〕**第八章 函数方程**
(215)8.1 内容概述
(217)8.2 例题选讲

〔237〕**第九章 平面几何**
(237)9.1 内容概述
(242)9.2 例题选讲

〔267〕第十章　数论
(267)10.1　内容概述
(274)10.2　例题选讲

〔297〕第十一章　组合数学
(297)11.1　内容概述
(303)11.2　例题选讲

〔328〕第十二章　组合几何
(328)12.1　内容概述
(331)12.2　例题选讲

总 论

第一章

奥林匹克数学的形成背景

随着数学奥林匹克的发展，已逐渐形成一门特殊的数学学科——奥林匹克数学.

——王元

1.1 数学奥林匹克的历史

奥林匹克运动起源于古希腊，它是关于体能的竞赛. 数学奥林匹克与体育奥林匹克相类似，它是青少年智能的竞赛，智能和体能

都是创造人类文明的必要条件，所以前苏联人首创了“数学奥林匹克”这个名词.

1.1.1 溯源——解难题竞赛的来龙去脉

数学是锻炼思维的体操，而其核心则是问题.解数学难题的竞赛至少可以追溯到16世纪初期.当时，不少数学家喜欢提出问题，向其他数学家挑战，以比高低，其中解三次方程比赛的有声有色的叙述，使人记忆犹新.意大利数学家丰坦那(Niccolo Fontana)，人称“塔塔利亚”(Tartaglia 意为口吃者)，出身贫寒，自学成才，后以教书为生.他一生中最重大的事件，莫过于几次数学竞赛.1535年意大利数学家菲奥(A. M. Fior)向塔塔利亚提出挑战，要求举行一次解三次方程的公开比赛.菲奥是著名数学家费罗(Scipiouedal Ferro)的得意门生，费罗1500年左右已解出了形如 $x^3+mx=n$ 类型的三次方程，并把方法传给了菲奥.比赛于当年2月22日在米兰大教堂进行.双方各给对方出30道题.为了迎接这场挑战，塔塔利亚作了充分准备，他冥思苦想，终于在比赛前十天掌握了三次方程的解法，因而大获全胜.意大利数学家发现的三次方程的代数解法被认为是16世纪最壮观的数学成就之一.

公开的解题竞赛无疑会引起数学家的注意和激发更多人的兴趣，随着学校教育的发展，教育工作者开始考虑在中学生中间举办解数学难题的竞赛，以激发中学生的数学才能和引起对数学的兴趣.

1.1.2 数学奥林匹克的先导——匈牙利数学竞赛

世界上真正有组织的数学竞赛开始于1894年，当时匈牙利数学界为了纪念著名数学家、匈牙利数学会主席埃特沃斯(L. Eötvös)荣任匈牙利教育部长而组织了第一届中学生数学竞赛，本来是叫做 Eötvös 竞赛，后来命名为 Jószef Kürschak 竞赛，这一活

动除两次世界大战和1956年匈牙利事件而中断七年外，每年十月举行一次，每次竞赛出三道题，限四小时做完，允许使用任何参考书. 这些试题难度适中，别具风格，虽然用中学生学过的初等数学知识就可以解答，但是又涉及许多高等数学的课题. 中学生通过做这些试题，不但可以检查自己对初等数学掌握的程度，提高灵活运用这些知识解题以及逻辑思维的能力，还可以接触到一些高等数学的概念和方法，对于以后学习高等数学有很大帮助. 匈牙利数学竞赛试题的上述特点，使得它的命题方向对世界各国数学竞赛，乃至国际数学奥林匹克(International Mathematics Olympiad，简称IMO)的命题都产生了一定的影响. 例如，1947年匈牙利数学竞赛中有一个题目：

【题 1.1】 在任意6个人中，总有3个人相互认识或相互不认识.

此题是组合数学中Ramsey问题的最简单情形. 以后几十年中这个题目被许多国家反复改造、变形、推广，用作竞赛试题. 比如

【题 1.2】 (1953年第13届普特南数学竞赛试题)空间中6个点，任意3点不共线，任意4点不共面，成对地连接它们得15条线段，用红色或蓝色染这些线段(一条线段只染一种颜色). 求证：无论如何染，恒存在单色三角形.

【题 1.3】 (第6届IMO试题)有17位科学家，其中每一个人和其余科学家都通信，他们在通信中只讨论三个题目，而且每两个科学家之间只讨论一个题目. 求证：至少有3个科学家相互之间只讨论同一个题目.

【题 1.4】 (1966—1967年波兰数学竞赛题)大厅中聚集100个客人，他们之中每个人至少认识6个人，证明在这些客人中一定可以找到4人，他们之中的任何两人都互相认识.

【题 1.5】 (1970—1976年波兰数学竞赛试题)已知空间中6

条直线，其中任何 3 条不平行，任何 3 条不交于一点，也不共面. 求证：在这 6 条直线中总可选出 3 条，其中任两条异面.

【题 1.6】 (1970—1976 年波兰数学竞赛试题)平面上有 6 点，任何 3 点都是一个不等边三角形的顶点. 求证：这些三角形中一个的最短边同时是另一个三角形的最长边.

【题 1.7】 (1988 年加拿大数学竞赛试题) 有 6 人聚会，任意 2 人要么认识，要么互不认识. 证明：必有两个组，每组 3 个人，同组的 3 个人要么彼此认识，要么互不认识.

【题 1.8】 (1989 年全国初中数学联赛试题)设 $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ 是平面上的 6 点，其中任 3 点不共线.

(1) 如果这些点之间任意连接 13 条线段，证明：必存在 4 点，它们每两点之间都有线段连接.

(2) 如果这些点之间只连 12 条线段，请你画出一个图形，说明(1)的结论不成立.

【例 1.9】 (第 33 届 IMO 试题)给定空间中的 9 个点，其中任 4 点都不共面，在每一对点之间都连有一条线段，这些线段可染为蓝色或红色，也可不染色. 试求出最小的 n 值，使得将其中任意 n 条线段中的每一条任意染为红蓝二色之一，在这 n 条线段的集合中都必然包含有一个各边同色的三角形.

本题的解答见本书例 11.26.

又如 1961 年匈牙利数学竞赛中有一个题目：

【题 1.10】 平面上的 4 个点可以连接成 6 条线段，证明最长线段和最短线段之比不小于 $\sqrt{2}$.

此题同样受到各国命题者的青睐，以此为源头产生了一批赛题. 比如：

【题 1.11】 (1962 年德国 MO 试题)证明：任意一个凸四边形的顶点之间的最大距离与最小距离之比至少为 $\sqrt{2}$.

【题 1.12】 (1991 年澳大利亚 MO 试题)设 ABCD 为凸四边

形，AB，AC，AD，BC，BD，CD 中最长的为 g，最短的为 h. 证明：$g \geqslant \sqrt{2}h$.

【题 1.13】（1985 年全国高中数学联赛试题）平面上任给 5 个相异的点，它们之间的最大距离与最小距离之比记为 λ. 求证：$\lambda \geqslant 2\sin 54°$，并讨论等号成立的充要条件.

【题 1.14】（1964 年第 25 届普特南数学竞赛试题，1965—1966 波兰数学竞赛试题，1975 年奥地利数学竞赛试题）证明：平面上有 6 个不同的点，则这些点之间的最大距离与最小距离之比至少为 $\sqrt{3}$.

一般地，给定平面上 n 个点，每两点之间有一个距离，最大距离与最小距离的比记为 λ_n，由上述几题知：$\lambda_4 \geqslant \sqrt{2}$，$\lambda_5 \geqslant 2\sin 54°$，$\lambda_6 \geqslant \sqrt{3}$. 由归纳猜想：$\lambda_n \geqslant 2\sin \frac{n-2}{2n}\pi$. 这就是著名的 Heilbron 型猜想. 这个猜想已被我国数学工作者解决（见本书例 12.18）.

若假定这 n 个点在一条直线上，则有

【题 1.15】（1991 年湖南省数学奥林匹克夏令营竞赛试题）假定一条直线上有 n 个点，则其最大距离与最小距离之比 $\lambda_n \geqslant \sqrt{\frac{n(n+1)}{6}}$.

与距离类似，又有人开始考虑角度、面积，见本书第十二章.

匈牙利数学竞赛已有一百年的历史，时值世界各国数学竞赛和 IMO 蓬勃发展的今天，我们尤为关切地认识到匈牙利数学竞赛在国际数学竞赛史册中占有引人瞩目的一页.

1.1.3 数学奥林匹克的兴起及其发展

数学奥林匹克的发展大致可以划分为以下三个阶段：

第一阶段（1894 年～1933 年）：数学奥林匹克的酝酿和发生时期.