XINZHUANTI JIAOCHENG

新专题教程

黄仁寿 主编

高中数学 3

解析几何

华东师范大学出版社

新专题教程

XINZHUANTI JIAOCHENG

高中数学3

解析几何

主　编　　黄仁寿

参　编　　黄仁寿　欧阳新龙

　　　　　吴有根　吴江春

华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

新专题教程. 高中数学 3 解析几何/黄仁寿主编. —上海:华东师范大学出版社,2004.3
ISBN 978-7-5617-3764-4

Ⅰ.新... Ⅱ.黄... Ⅲ.解析几何课—高中—数学—参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 021822 号

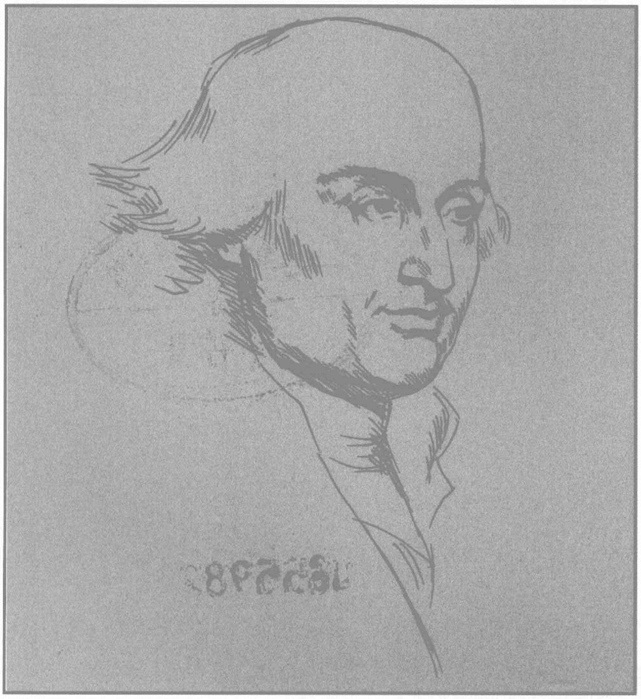
新专题教程
高中数学 3 · 解析几何

主　　编　黄仁寿
策划组稿　教辅分社
项目编辑　徐红瑾
文字编辑　陈信漪
封面设计　黄惠敏
版式设计　蒋　克

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路 3663 号　邮编 200062
电话总机　021-62450163 转各部门　行政传真 021-62572105
客服电话　021-62865537(兼传真)
门市(邮购)电话　021-62869887
门市地址　上海市中山北路 3663 号华东师范大学校内先锋路口
网　　址　www.ecnupress.com.cn

印 刷 者　宜兴市德胜印刷有限公司
开　　本　787×960　16 开
印　　张　14
字　　数　265 千字
版　　次　2009 年 4 月第四版
印　　次　2009 年 8 月第三次
书　　号　ISBN 978-7-5617-3764-4/G·2071
定　　价　16.00 元

出 版 人　朱杰人



只要代数和几何独立地发展，它们的进度就缓慢，而且应用也受到限制，但是当这两门学科结合起来时，它们彼此互相加强，并且它们一起以飞快的速度走向完美的境界。

——拉格朗日

亲爱的读者，展现在您面前的这套《新专题教程》系列图书是按新课程标准所列的内容，在“新教学理念、新教学方法”的指导下，按专题编写，涵盖初、高中语文、数学、英语、物理和化学5个学科，共计50个分册。

本丛书自初版起就坚持“完整、系统、深入、细致”的编写特色，甫一面世，就受到广大学生的欢迎。但我们不敢懈怠，我们必须与时俱进。根据现行中学教材的变化情况及中、高考的变化趋势，我们进行了多方调研，在此基础上，组织作者对本丛书进行了全面的修订。新修订的这套丛书，不仅知识点配套，而且题型新颖，更利于学生对学科知识的理解和掌握。

丛书有以下特点。

作者权威　编写队伍由师范大学学科专家及长期在教学第一线的全国著名中学特、高级教师组成。他们有先进的教育理念和丰富的教学经验，是中、高考研究方面的专家，他们的指导更具权威性。

材料典型　丛书精选了近几年的中、高考试题，还收集了许多有代表性的例题，编写者对这些典型材料进行了详细的解读，还设置了有针对性的训练。总之，编写者力求从国家课程标准的知识内容中提炼出相应的能力要求，并对重点知识进行深入、细致的讲解，对难点用实例的方法进行释疑，使用这套丛书，能切实提高学生的学习效果。

版本通用　丛书以教育部颁布的新课程标准为编写依据，不受教材版本限制，按各学科知识内容编排，独立成册，不仅与教学要求相对应，更体现了学科知识的完整性、系统性和科学性，具有很强的通用性。

编排科学　丛书在编排时照顾到了学生的差异性，读者可以根据自己学习中的薄弱环节，有重点地选择，有针对性地学习，以达到事半功倍的效果。丛书坡度设计合理，帮助学生在知识学习的基础上，充分了解和掌握运用知识解决问题的方法，提升学习能力。

愿《新专题教程》成为您的好伙伴，学习的好帮手，为您的学习带来诸多的便利，给您一个智慧的人生。

华东师范大学出版社
教辅分社

CONTENTS

目录

高中数学3·解析几何

专题1　直线的倾斜角和斜率　1

专题2　直线的方程　8

专题3　两直线的位置关系与距离公式　19

专题4　圆的方程　36

专题5　直线和圆的位置关系　45

专题6　空间直角坐标系　57

专题7　直线和圆在数学中的应用　62

专题8　直线和圆在实际问题中的应用　71

专题9　椭圆的定义和方程　77

专题10　椭圆的几何性质　85

专题11　双曲线的定义和方程　96

专题12　双曲线的几何性质　105

专题13　抛物线的定义和方程　118

专题14　抛物线的几何性质　127

专题15　圆锥曲线在数学中的应用　137

专题16　圆锥曲线在实际问题中的应用　145

专题17　曲线和方程中的几个典型问题　153

专题18　解析几何的重要方法和技巧　165

参考答案和提示　173

专题 1

直线的倾斜角和斜率

【知识梳理】

1. 直线的倾斜角和斜率

(1) 直线的倾斜角的定义

在平面直角坐标系中，对于一条与 x 轴相交的直线，如果把 x 轴绕着交点按逆时针方向旋转到和直线重合时所转过的最小正角记为 α，那么 α 就叫做这条直线的倾斜角. 特别地，当直线与 x 轴平行或重合时，规定它的倾斜角为 $0°$.

由倾斜角的定义可知，倾斜角的取值范围是 $\{\alpha \mid 0° \leqslant \alpha < 180°\}$.

(2) 直线的斜率的定义

倾斜角不是 $90°$ 的直线，它的倾斜角 α 的正切值叫做这条直线的斜率，即斜率 $k = \tan\alpha$.

由定义，知任何直线均存在倾斜角，但不一定存在斜率.

(3) 直线的斜率公式

过两点 $P_1(x_1, y_1)$、$P_2(x_2, y_2)$ 的直线的斜率公式 $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$（其中 $x_1 \neq x_2$）.

直线的斜率用来表示倾斜角不是 $90°$ 的直线对于 x 轴的倾斜程度. 倾斜角为 $90°$ 的直线没有斜率.

2. 两条直线平行与垂直的判定

(1) 不垂直于 x 轴的两条直线互相平行，当且仅当这两条直线的斜率相等.

设两条直线 l_1、l_2 的斜率分别为 k_1、k_2，有

$$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2.$$

由于垂直于 x 轴的直线，其倾斜角为 $90°$，其斜率不存在，故当谈到斜率时，一定要排除垂直于 x 轴的直线.

(2) 如果两条直线都有斜率，它们互相垂直，当且仅当它们的斜率之积等于 -1.

同(1)中的设定，易知

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1 k_2 = -1.$$

【分类题解】

1. 讨论直线的倾斜角和斜率

例 1 求下列直线的倾斜角，并讨论其斜率：

(1) $y=\tan 60^\circ\cdot x$；　　(2) $x=\tan 60^\circ$；

(3) $y=\tan 60^\circ$；　　(4) $x=\tan 60^\circ\cdot y$.

解 (1) 在直线上任取两点 $A(1,\ \tan 60^\circ)$、$B(2,\ 2\tan 60^\circ)$，则直线的倾斜角 α 满足

$$\tan\alpha=\frac{2\tan 60^\circ-\tan 60^\circ}{2-1}=\sqrt{3}.$$

又 $$\tan 60^\circ=\sqrt{3},$$

故该直线的斜率为$\sqrt{3}$，倾斜角为 60°.

(2) 该直线垂直于 x 轴，故其倾斜角为 90°，斜率不存在.

(3) 该直线平行于 x 轴，故其倾斜角为 0°，斜率也为 0.

(4) 由原方程，得

$$y=\tan 30^\circ\cdot x.$$

在直线上任取两点 $A(1,\ \tan 30^\circ)$、$B(2,\ 2\tan 30^\circ)$，则直线的倾斜角 α 满足

$$\tan\alpha=\frac{2\tan 30^\circ-\tan 30^\circ}{2-1}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

又 $$\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3},$$

故该直线的倾斜角为 30°，斜率为$\frac{\sqrt{3}}{3}$.

说明 当直线的斜率存在时，由直线的方程求斜率或倾斜角，常先将直线方程化为斜截式或点斜式；当直线的斜率不存在时，直线的倾斜角为 90°.

例 2 求过两点 $P(1-m,\ 1+m)$ 和 $Q(3,\ 2m)$ 的直线的倾斜角.

解 当 $1-m\neq 3$，即 $m\neq -2$ 时，由斜率公式可知，$k=\frac{m-1}{m+2}$，因此：

学习直线方程之后，由直线方程 $y=kx$ 即可判断该直线的斜率为k，倾斜角 α 由

$$k=\tan\alpha$$

求出.

这里用到同角三角函数的关系式：

$$\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1.$$

这里用到“弧度制”表示一个角的大小，用“rad”表示“弧度”(此单位常省略)：

$$1^\circ=\frac{\pi}{180}\text{ rad},$$

$$1\text{ rad}=\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ.$$

(1) 当 $m \in (-\infty, -2) \cup [1, +\infty)$ 时，$k \geqslant 0$，此时直线的倾斜角 α 为零或锐角，所以 $\alpha = \arctan \dfrac{m-1}{m+2}$；

(2) 当 $m \in (-2, 1)$ 时，$k < 0$，此时直线的倾斜角为钝角. 所以

$$\alpha = \pi - \arctan\left|\frac{m-1}{m+2}\right| = \pi + \arctan\frac{m-1}{m+2};$$

(3) 当 $m = -2$ 时，直线过点 $P(3, -1)$、$Q(3, -4)$，垂直于 x 轴. 所以此时倾斜角为 $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$.

说明 准确掌握斜率与倾斜角的关系，以及倾斜角的取值范围是解题的关键. 当写出斜率 $k = \dfrac{m-1}{m+2}$ 后，千万不可把倾斜角直接写成 $\alpha = \arctan \dfrac{m-1}{m+2}$ 的形式. 这是由于：

当 $k \geqslant 0$ 时，倾斜角 α 为锐角或 0，且 $\tan\alpha = k$，所以 $\alpha = \arctan k$；

当 $k < 0$ 时，倾斜角为钝角，且 $\tan\alpha = k$，α 在 $\left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$ 内，使正切值为 k 的角只能是 $\alpha = \pi - \arctan|k|$.

在解题中，还应注意到对斜率不存在时的情况的讨论.

只有当 $\theta \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，才能由 $\tan\theta = a$ 推出 $\theta = \arctan a$. 此题中 $\alpha \in [0, \pi)$，因而要分类讨论.

例 3 已知两点 $A(-3, 4)$、$B(3, 2)$，过点 $P(2, -1)$ 的直线 l 与线段 AB 有公共点.

(1) 求直线 l 的斜率 k 的取值范围；

(2) 求直线 l 的倾斜角 α 的取值范围.

解 如图 1 - 1，为使直线 l 与线段 AB 有公共点，直线 l 的倾斜角应介于直线 PB 与直线 PA 的倾斜角之间. 但由于直线 l 的倾斜角要“跨越”$90°$，故当直线 l 的倾斜角小于 $90°$ 时，有 $k \geqslant k_{PB}$；当直线 l 的倾斜角大于 $90°$ 时，则有 $k \leqslant k_{PA}$.

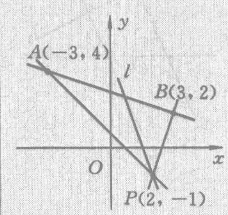


图 1 - 1

由题意可知：

$$k_{PA} = \frac{4-(-1)}{-3-2} = -1,$$

$$k_{PB} = \frac{2-(-1)}{3-2} = 3.$$

(1) 要使直线 l 与 AB 有公共点，则直线 l 的斜率 k 的取值范围是

每一条直线均有倾斜角且倾斜角惟一，

但并非每一条直线均有斜率，垂直于 x 轴的直线就没有斜率. 当然，有斜率的直线，其斜率是惟一的.

若直线的斜率 k 的范围是 $-1\leqslant k\leqslant 3$，则其倾斜角 α 的范围是 $[0,\ \arctan 3]\cup\left[\frac{3\pi}{4},\ \pi\right)$. 其中 $[0,\arctan 3]$ 与 $0\leqslant k\leqslant 3$ 对应，$\left[\frac{3\pi}{4},\ \pi\right)$ 与 $-1\leqslant k<0$ 对应.

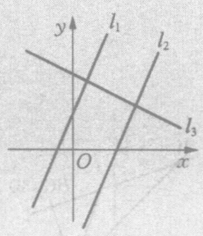


图 1-2

“有公共点的两

$$k\leqslant -1 \text{ 或 } k\geqslant 3;$$

当 l 与 x 轴垂直时，斜率不存在.

(2) 由题意可知直线 l 的倾斜角介于直线 PB 与 PA 的倾斜角之间. 又 PB 的倾斜角是 $\arctan 3$，PA 的倾斜角是 $\frac{3\pi}{4}$. 所以 α 的取值范围是

$$\arctan 3\leqslant \alpha\leqslant \frac{3\pi}{4}.$$

说明 本例常会错误地作结论 $-1\leqslant k\leqslant 3$，产生错误的主要原因是没有搞清倾斜角与斜率之间的变化关系. 事实上，当 α 在 $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ 上，$\tan\alpha$ 是增函数；当 α 在 $\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$ 上，$\tan\alpha$ 也是增函数. 但是 $\tan\alpha$ 在 $\alpha\in[0,\ \pi)$ 上不具有单调性.

一般地，如果直线 l 所经过的区域含有与 x 轴垂直的直线，那么直线 l 的斜率的范围应分为两部分.

2. 判定两条直线的平行与垂直

例 4 已知三条不同的直线满足：

(1) 直线 l_1 的倾斜角 α 满足 $\tan\alpha=3$；

(2) 直线 l_2 上有两点的坐标为 $A\left(\frac{1}{3},\ 7\right)$、$B(2,\ 12)$；

(3) 直线 l_3 的斜率为 $k_3=-\frac{1}{3}$.

试判断直线 l_1、l_2 和 l_3 的位置关系.

解 由条件(1)知，直线 l_1 的斜率 $k_1=\tan\alpha=3$.

由条件(2)知，直线 l_2 的斜率 k_2 满足 $k_2=\dfrac{12-7}{2-\frac{1}{3}}=3$.

所以直线 l_1 和 l_2 的斜率满足 $k_1=k_2$，故 $l_1\parallel l_2$. 直线 l_1、l_2 和 l_3 的斜率满足 $k_1\cdot k_3=-3\times\frac{1}{3}=-1$，$k_2\cdot k_3=-3\times\frac{1}{3}=-1$，故 $l_1\perp l_3$，$l_2\perp l_3$(参考示意图 1-2).

例 5 已知 $A(1,\ -1)$，$B(2,\ 2)$，$C(m,\ 1)$.

(1) 若 A、B、C 三点共线，求 m 的值；

(2) 若 C 在以 AB 为直径的圆上，求 m 的值.

解 (1) 因为 A、B、C 三点共线，所以 $k_{AC}=k_{AB}$. 由斜

率公式

$$k_{AB}=\frac{2-(-1)}{2-1}=3,\ k_{AC}=\frac{1-(-1)}{m-1}=\frac{2}{m-1},$$

所以 $$\frac{2}{m-1}=3,\text{故 } m=\frac{5}{3}.$$

(2) 依题意有 $AC\perp BC$，所以 $k_{AC}\cdot k_{BC}=-1$. 由斜率公式

$$k_{AC}=\frac{1-(-1)}{m-1}=\frac{2}{m-1},$$

$$k_{BC}=\frac{1-2}{m-2}=\frac{-1}{m-2},$$

所以 $$\frac{2}{m-1}\times\frac{-1}{m-2}=-1,$$

整理得 $$m^2-3m=0,$$

解之得 $$m=0,\text{或 } m=3.$$

说明 (1) A、B、C 三点共线的充要条件是 $k_{AC}=k_{AB}$ 或直线 AC、BC 的斜率都不存在；

(2) C 在以 AB 为直径的圆上的充要条件是 $AC\perp BC$，即当 AC、BC 分别有斜率 k_{AC}、k_{BC} 时，

$$k_{AC}\cdot k_{BC}=-1.$$

条直线重合，当且仅当它们的斜率相等或斜率均不存在"，本题(1)的解答就是应用了这个结论.

基础训练

一、选择题

1. 对于下列命题：

① 如果直线 l 的倾斜角为 α，则 l 的斜率为 $\tan\alpha$；

② 与坐标轴平行的直线没有倾斜角；

③ 任何直线都存在倾斜角，但不是每一条直线都存在斜率.

其中正确的命题个数有(　　).

(A) 0 个　　(B) 1 个　　(C) 2 个　　(D) 3 个

2. 过点 $P(-2, m)$、$Q(m, 4)$ 的直线的斜率为 $-\frac{1}{2}$，则 m 的值为(　　).

(A) 2　　(B) -8　　(C) 10　　(D) 以上均不对

3. 直线 l 过点 $A(1, 2)$，且不过第四象限，那么 l 的斜率的取值范围是(　　).

(A) $[0, 2]$　　(B) $[0, 1]$　　(C) $\left[0, \frac{1}{2}\right]$　　(D) $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

4. 三点 $(a+b, c)$、$(b+c, a)$、$(c+a, b)$ 一定(　　).

(A) 在同一条直线上　　(B) 是一个直角三角形的三个顶点

(C) 是一个等边三角形的三个顶点　　(D) 是等腰三角形的三个顶点

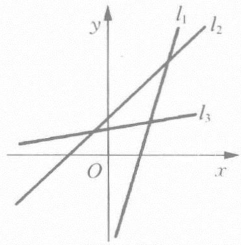
5. 如果直线 l 沿 x 轴负方向平移 3 个单位,再沿 y 轴正方向平移 1 个单位,又回到了原来的位置,那么直线 l 的斜率是(　　).

(A) $-\frac{1}{3}$　　(B) -3　　(C) $\frac{1}{3}$　　(D) 3

6. 如图,直线 l_1、l_2、l_3 的斜率分别为 k_1、k_2、k_3,则(　　).

(A) $k_1 < k_2 < k_3$　　(B) $k_3 < k_1 < k_2$

(C) $k_3 < k_2 < k_1$　　(D) $k_1 < k_3 < k_2$



(第 6 题)

7. 过两点(1, 2)、(3, 1)的直线的倾斜角是(　　).

(A) $-\arctan\frac{1}{2}$　　(B) $\arctan\frac{1}{2}$

(C) $\pi-\arctan\frac{1}{2}$　　(D) $\pi+\arctan\frac{1}{2}$

8. 若 $-\frac{\pi}{2}<\alpha<0$,则经过两点 $P_1(0, \cos\alpha)$,$P_2(\sin\alpha, 0)$ 的直线的倾斜角为(　　).

(A) α　　(B) $-\alpha$　　(C) $\frac{\pi}{2}+\alpha$　　(D) $\pi+\alpha$

二、填空题

9. 直线 $y=x\cot\alpha+1$, $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$的倾斜角为________.

10. 直线的斜率为$-\sqrt{3}$,则倾斜角为________.

11. 已知 $A(1, 1)$、$B(3, 5)$、$C(a, 7)$、$D(-1, b)$四点共线,则 $a=$________, $b=$________.

三、解答题

12. 已知 $A(3, 1)$、$B(m, -2)(m\in\mathbf{R})$,求直线 AB 的斜率和倾斜角.

13. 若 $a, b, c>0$,且直线 $y=x\lg(ac)+m$ 和 $y=x\lg(bc)+n$ 互相垂直,求$\frac{a}{b}$的取值范围.

能力提高

14. 已知线段的两个端点 $A(0, -3)$、$B(3, 0)$. 若直线 $y=\lambda x+\lambda+2$ 与线段 AB 相交,求实数 λ 的取值范围.

15. 已知实数 x、y 满足 $y=x^2-2x+2(-1\leqslant x\leqslant 1)$,试求$\frac{y+3}{x+2}$的最大值和最

小值.

16. 已知 a、b、m 均为正数，且 $a < b$，利用斜率公式证明：$\frac{a+m}{b+m} > \frac{a}{b}$.

17. 已知矩形 $ABCD$ 中，$A(-4, 4)$，$D(5, 7)$，其对角线的交点 E 在第一象限内且与 y 轴的距离为一个单位，动点 $P(x, y)$ 沿矩形一边 BC 运动，求 $\frac{y}{x}$ 的取值范围.

专题 2

直 线 的 方 程

【知识梳理】

直线方程的几种形式

(1) 点斜式：$y-y_1=k(x-x_1)$，其中(x_1, y_1)是直线上一定点，k是斜率．点斜式适用于不垂直于x轴的任何直线．

(2) 斜截式：$y=kx+b$，其中k是斜率，b是直线在y轴上的截距．斜截式适用于不垂直于x轴的任何直线．

两点式有其特定的使用范围，但将其化为$(y-y_1)(x_2-x_1)=(x-x_1)(y_2-y_1)$之后，就适用于任何直线了．

(3) 两点式：$\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$，其中$(x_1, y_1)$、$(x_2, y_2)$是直线上两定点，$y_1\neq y_2$且$x_1\neq x_2$．两点式适用于不垂直于坐标轴的任何直线．

截距式表示直线过$A(a, 0)$、$B(b, 0)$ $(ab\neq 0)$两点，因此截距式可由两点式直接推出．

(4) 截距式：$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$，其中$a$和$b$分别是直线在$x$轴和$y$轴上的截距，$a\neq 0$且$b\neq 0$．截距式适用于不垂直于$x$轴和$y$轴且不过原点的任何直线．

(5) 一般式：$Ax+By+C=0$ $(A^2+B^2\neq 0)$，其中A、B、C为常数．一般式适用于任何直线．

【分类举例】

1. 求直线的方程

例 1 已知直线l经过点$P(3, 2)$，其倾斜角是直线$x-4y+3=0$的倾斜角的两倍，求直线l的方程．

此题是通过"点斜式"写直线方程的．

解 设直线$x-4y+3=0$的倾斜角为α，则$\tan\alpha=\dfrac{1}{4}$，所求直线的斜率为

$$k=\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{8}{15}.$$

又直线l经过点$P(3, 2)$，故直线l的方程为

$$y-2=\frac{8}{15}(x-3).$$

整理即得 $$8x-15y+6=0.$$

例 2 若直线 l 满足如下条件，分别求出其方程的一般形式：

(1) 斜率为 $\frac{3}{4}$，且与两坐标轴围成的三角形的面积为 6；

(2) 经过两点 $A(1, 0)$ 及 $B(m, 1)$；

(3) 将直线 l 绕其上一点 P 沿顺时针方向旋转角 α $(0^\circ<\alpha<90^\circ)$ 所得直线方程是 $x-y-2=0$，若继续旋转 $90^\circ-\alpha$，所得直线方程为 $x+2y+1=0$；

(4) 过点 $(-a, 0)$ $(a>0)$ 且割第二象限得到一个面积为 S 的三角形区域.

解 (1) 设直线方程为 $y=\frac{3x}{4}+b$. 令 $y=0$，得 $x=-\frac{4b}{3}$. 故得

$$\frac{1}{2}\left|b\cdot\frac{-4b}{3}\right|=6.$$

由此解得 $b=\pm 3$，故所求直线的方程为

$$y=\frac{3x}{4}\pm 3.$$

化简得 $3x-4y+12=0$ 或 $3x-4y-12=0$.

(2) 当 $m=1$ 时，直线的方程为 $x=1$.

当 $m\neq 1$ 时，直线的方程为

$$\frac{y-0}{1-0}=\frac{x-1}{m-1},$$

化简即为 $$x-(m-1)y-1=0.$$

(3) 解方程组 $\begin{cases}x-y-2=0,\\x+2y+1=0,\end{cases}$ 得点 P 的坐标 $P(1, -1)$.

又因为直线 l 与直线 $x+2y+1=0$ 垂直，而直线 $x+2y+1=0$ 的斜率为 $-\frac{1}{2}$，由此可知直线 l 的斜率为 2. 因此直线 l 的方程为

$$y+1=2(x-1),$$

即 $$2x-y-3=0.$$

先引入参数，假设所求方程的形式，再结合题设条件求出各参数的值，最后求出方程并进行化简. 这种方法称为待定系数法.

本例 (1)、(2)、(3)、(4) 小题用待定系数法求方程时，假设的方程的形式分别为斜截式、两点式、点斜式和截距式.

互相垂直的两直线的斜率之积为 -1，例 2(3) 和例 3 中均要用到这个结论.

(4) 设直线 l 的方程为 $\frac{x}{-a}+\frac{y}{b}=1$,则有 $\frac{1}{2}ab=S$, $b=\frac{2S}{a}$. 故得直线 l 的方程为

$$\frac{x}{-a}+\frac{y}{\frac{2S}{a}}=1,$$

化简即为 $$2Sx-a^2y+2aS=0.$$

说明 本例是用待定系数法求方程,解题中分别用到直线方程的四种形式,但最终要求化为直线方程的一般形式.

例3 已知△ABC 的两个顶点 $A(-1, 5)$ 和 $B(0, -1)$,又知∠C 的平分线所在直线方程为 $2x-3y+6=0$,求三角形各边所在直线的方程.

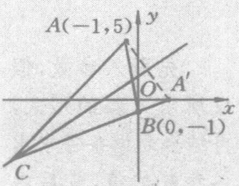


图 2-1

若点 A 关于直线 l 的对称点为 A',则 l 为线段 AA' 的垂直平分线. 这一特征表明:① AA' 的中点在 l 上;② AA' 的斜率和 l 的斜率互为负倒数.

解 设点 A 关于直线 $2x-3y+6=0$ 的对称点为 $A'(x_1, y_1)$(如图 2-1),则

$$\begin{cases}2\cdot\frac{x_1-1}{2}-3\cdot\frac{y_1+5}{2}+6=0,\\ \frac{y_1-5}{x_1+1}=-\frac{3}{2}.\end{cases}$$

化简得 $$\begin{cases}2x_1-3y_1-5=0,\\ 3x_1+2y_1-7=0.\end{cases}$$

由此解得 $$\begin{cases}x_1=\frac{31}{13},\\ y_1=-\frac{1}{13}.\end{cases}$$

故点 A' 坐标为 $A'\left(\frac{31}{13}, -\frac{1}{13}\right)$.

同理可求得点 B 关于直线 $2x-3y+6=0$ 的对称点的坐标为 $B'\left(-\frac{36}{13}, \frac{41}{13}\right)$.

本例提供的求一个点关于一条直线的对称点的方法,是通法.

因为角平分线是角的两边的对称轴,所以点 A' 在直线 BC 上. 故直线 BC 的方程为

$$y=\frac{-\frac{1}{13}-(-1)}{\frac{31}{13}-0}x-1,$$