

现代数学方法

XIANDAI SHUXUE FANGFA

周永正 詹棠森 编著
方成鸿 邱望仁

现代数学方法

周永正 詹棠森

编 著

方成鸿 邱望仁



 天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

内 容 简 介

本教材是在落实教育部《高等教育面向 21 世纪教学内容和课程体系改革计划》要求的基础上,根据普通高等学校教学改革的最新要求,结合作者多年来从事“现代数学方法”课程教学的实践体会编写而成的。教材从体例上突出了方法、应用案例并重的特点,主要内容包括正交设计方法、数值逼近方法、模糊数学方法,每一种方法都提供了应用案例分析,并附有一定数量的习题。

本教材可作为普通高等学校本、专科学生“现代数学方法”课程教材或教学参考书,还可供从事应用研究的工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

现代数学方法/周永正等编著. —天津:天津大学出版社,
2011. 10

ISBN 978-7-5618-4102-0

I. ①现… II. ①周… III. ①数学方法 IV. ①01-0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 212539 号

出版发行 天津大学出版社
出 版 人 杨欢
地 址 天津市卫津路 92 号天津大学内(邮编:300072)
电 话 发行部:022-27403647 邮购部:022-27402742
网 址 www.tjup.com
印 刷 廊坊市长虹印刷有限公司
经 销 全国各地新华书店
开 本 185mm × 260mm
印 张 14
字 数 349 千
版 次 2011 年 10 月第 1 版
印 次 2011 年 10 月第 1 次
定 价 28.00 元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页等质量问题,烦请向我社发行部门联系调换

版权所有 侵权必究

前 言

随着现代计算机的飞速发展，现代计算机能够高速进行大量的数值计算。现代数学方法因而更加广泛地应用于工业、农业、社会学、经济学、工程技术等领域。为了提高学生应用现代数学方法的能力，编写一本现代数学方法教材供普通高等学校本、专科学生使用，就显得很有必要了。

编写本教材的主要设想有以下几点。

(1) 突出介绍方法，淡化理论推导。由于本教材的读者主要是普通高等学校本、专科学生，现代数学方法学时少，因此，本教材主要介绍几种实用数学方法，重点介绍这些方法的应用，而不强调理论的系统性和完整性。

(2) 注重数学思想方法的介绍。数学是研究现实世界中的空间形式和数量关系的，具备正确的数学思想方法是学生观察现实世界所必备的文化修养。本教材注重介绍数学方法的思想、问题的背景、意义等。使学生对数学思想方法有一个较好的理解。

(3) 方法与实例的结合。本教材编写了用有关数学方法解决实际问题的实例，让学生看到数学方法的应用价值。有趣的实际问题，能启发学生思维，开拓学生眼界，激发学生的学习兴趣，通过实例的介绍，引导学生用数学方法解决一些实际问题。

本教材共分四个部分，第一部分是正交设计方法，介绍正交设计的基本知识、正交设计的方差分析、正交设计在陶瓷生产中的应用、正交设计的灵活应用；第二部分是数值逼近方法，介绍误差分析及数值计算的稳定性、插值法、函数逼近与计算、数值积分与数值微分、Bézier 曲线的基本知识；第三部分是模糊数学方法，介绍模糊数学基础、模糊数学方法及其应用；第四部分多元统计方法，介绍聚类分析、判别分析、主成分分析、因子分析。

本教材是作者在多年讲授现代数学方法讲义的基础上，修改、加工而成的，书中一些案例是近年来作者的研究成果。教材第一章~第四章由周永正编写，第五章~第九章由詹棠森编写，第十章~第十一章由邱望仁编写全书由周永正统稿。

在编写本教材的过程中，我们参考了较多的相关文献，在本书的“参考文献”中没有全部列出，在此对相关文献作者表示衷心感谢。

由于作者水平有限，书中难免存在缺点与错误，恳请专家、读者批评指正。

2011 年 9 月

目 录

第一部分 正交设计方法

第一章 正交设计的基本知识	1
第一节 试验设计的几个概念	1
第二节 正交表及试验计划	2
第三节 单指标的试验分析	6
第四节 多指标的试验分析	9
第五节 有交互作用的试验分析	13
第二章 正交设计的方差分析	15
第一节 单因素方差分析简介	15
第二节 正交表的方差分析	17
第三节 有重复试验的方差分析	21
第四节 0-1 数据的计算分析法	24
第三章 正交设计在陶瓷生产中的应用	26
第一节 “高档细瓷工艺”正交试验	26
第二节 “古窑红”正交试验	29
第四章 正交设计的灵活应用	35
第一节 并列法	35
第二节 拟位级（水平）法	37
第三节 组合法	40
第四节 部分追加法	44
第五节 直积法	47
第一部分习题	52
第一部分附表	58

第二部分 数值逼近方法

第五章 误差分析及数值计算的稳定性	66
第一节 误差与有效数字的基本概念及计算	66
第二节 数值计算中算法的稳定性	70
第三节 案例：递推计算的稳定性	72
第六章 插值法	75
第一节 插值的基本问题	75
第二节 埃尔米特插值	77
第三节 Lagrange（拉格朗日）插值多项式	82
第四节 Newton（牛顿）插值多项式	84

第五节 样条函数插值	88
第六节 实例	93
第七节 案例: 随机优化磨光算法对卫生陶瓷进出口的分析模型	97
第七章 函数逼近与计算	101
第一节 曲线拟合的最小二乘法	101
第二节 曲线拟合的 MATLAB 实现	103
第三节 正交函数及正交多项式	104
第四节 实例	113
第五节 案例: 背景值带参数的 GM (1, 1) 非线性拟合优化模型	120
第八章 数值积分与数值微分	125
第一节 插值型数值求积公式	125
第二节 Gauss 型求积公式	131
第三节 数值微分	135
第四节 例题选讲	138
第五节 案例: 几种积分的比较	142
第九章 Bézier 曲线的基本知识	143
第一节 Bézier 曲线的定义和性质	143
第二节 Bézier 曲线的分割	145
第三节 Bézier 曲线的矩阵形式及幂基表示	149
第四节 案例: 伯恩斯坦基的应用	154
第二部分习题	154
第三部分 模糊数学方法	
第十章 模糊数学基础	157
第一节 模糊数学概述	157
第二节 模糊集合与隶属度	160
第三节 模糊集合的运算与性质	163
第四节 模糊集上的度量	167
第五节 模糊关系与模糊矩阵	169
第十一章 模糊数学方法及其应用	173
第一节 模糊聚类分析	173
第二节 模糊模式识别	184
第三节 模糊综合评判	196
第四节 模糊逻辑与模糊推理	200
第五节 模糊专家系统	207
第三部分习题	215
参考文献	217

第一部分

正交设计方法

第一章 正交设计的基本知识

在生产实践和科学研究中，为了改革旧工艺或试制新产品，经常要多因素试验。如何安排多因素试验，是值得研究的问题。试验安排得好，既可减少试验次数、缩短时间和避免盲目性，又能得到好的结果；试验安排得不好，试验次数既多，结果还不一定满意。试验次数多得不合理，必然浪费大量的人力、物力、财力，有时由于时间拖长、试验条件改变，也会使试验失败。本章介绍试验设计的基本概念、正交设计的基本知识。

第一节 试验设计的几个概念

试验设计是以概率论与数理统计为理论基础，经济、科学地安排试验的一项科学技术，其主要内容是讨论如何合理地安排试验和正确地分析试验数据，从而达到尽快获得优化方案的目的。

目前，国内外广泛采用的正交设计法（又称正交试验法、正交试验设计法、正交法）是一种安排和分析多因素试验的科学方法，是在实际经验与理论认识的基础上，利用一种排列整齐的表格——正交表，来科学地安排试验方案和对试验结果进行计算、分析，找出最优或较优的生产条件或工艺条件的数学方法，即它是用正交表安排试验并对结果进行统计分析，迅速找出优化方案的科学方法。

一般地，把试验设计中根据试验目的而选定的用来考查或衡量试验效果的特性值称为试验指标。试验指标可以是数量指标、质量指标、成本指标、效率指标等。

试验指标可分为 2 类：一类是定量指标（数量指标），是在试验中能直接得到数值的指标，如强度、硬度、质量、表面粗糙度、寿命、成本、合格率等；另一类是定性指标，是在试验中不能得到具体数值的指标，如颜色、光泽、手感、图面清晰度等。在试验设计中，为便于分析试验结果，一般将定性指标定量化，例如，可把光泽按不同深度分成不同等级。

试验指标只有 1 个的试验称为单指标试验，试验指标多于 1 个的试验称为多指标试验。指标值应从本质上表示出物体的某项性能，尽量不要用几个重复的指标值表示某一性能。

通俗地说，对试验指标特性可能有影响的原因或要素称为因素，它是在进行试验时重点考查的内容。因素可理解为试验过程中的自变量，如化学反应中温度、压强、催化剂用量，农业试验中的种子品种、肥料等。广义上，因素还可以理解为变量间的某种确定关系，如陶瓷原料的配方配比、工艺流程，农业试验中的田间管理方式，都可看做广义因素。因素一般用大写英文字母 A, B, ...表示，如因素 A、因素 B 等。

在确定试验因素时，必须以专业知识和生产实践经验为基础，应尽可能列出与研究对象目标有关的各种因素，然后判断哪些是需要考查的因素。

因素在试验中所处的状态，称为因素的位级（又叫水平），一般试验方案是由若干个试验组成的，因素在试验方案中变化了几种状态就称为几位级。例如，在化学反应中，温度这个因素允许在一定范围内变化，这叫因素的试验区间；但在一个试验中，温度总是固定在几个状态中变化的，如选取 1300℃, 1330℃, 1350℃ 3 种状态，1300℃, 1330℃, 1350℃ 都叫温度位级，在这个试验方案中温度是三位级因素。

在试验中，有时因素所处状态是不能控制的，如农作物生长期间的平均日温，显然会影响作物产量，它是一个因素，但在试验中，人们不能控制日平均温度，这样的因素称为不可控因素；但化学反应中的温度，在一般试验条件下是可控制的，这样的因素称为可控因素。在试验设计中，只对可控因素的位级变化在试验前做出设计。

根据影响指标的因素的多少，可以把试验分为 2 类：影响指标的因素只有 1 个的试验称为单因素试验；因素有 1 个以上的试验称为多因素试验。正交设计法是安排多因素试验的有效方法。

第二节 正交表及试验计划

一、正交表

正交表是已经制作好的规格化表格，是正交设计法的基本工具，下面先介绍正交表。

1. 正交表 $L_8(2^7)$ 和 $L_4(2^3)$

正交表 $L_8(2^7)$ 和 $L_4(2^3)$ 分别如表 1-1、表 1-2 所示。

表 1-1 正交表 $L_8(2^7)$

列 号 试 验 号	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	2	2	2	2
3	1	2	2	1	1	2	2
4	1	2	2	2	2	1	1
5	2	1	2	1	2	1	2
6	2	1	2	2	1	2	1
7	2	2	1	1	2	2	1
8	2	2	1	2	1	1	2

表 1-2 正交表 $L_4(2^3)$

列 号 试 验 号	1	2	3
1	1	1	1
2	1	2	2
3	2	1	2
4	2	2	1

正交表 $L_8(2^7)$ (表 1-1) 有 8 个横行和 7 个纵列, 由数码 “1”、“2” 组成。它有两个特点:

(1) 每纵列恰有 4 个 “1” 和 4 个 “2”;

(2) 任意 2 个纵列, 其横方向形成的 8 个数字对中, 恰好 (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2) 各出现 2 次, 即对于任意 2 个纵列, 数码 “1”、“2” 间的搭配是均衡的。

正交表 $L_4(2^3)$ (表 1-2) 同 $L_8(2^7)$ 类似, 也全由数码 “1” 和 “2” 组成, 不同的是, 它只有 4 个横行、3 个纵列——它是最小的正交表。然而, 它也具有类似的特点:

(1) 每纵列恰有 2 个 “1” 和 2 个 “2”;

(2) 任意 2 个纵列, 其横方向形成的 4 个数字对中 (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2) 各出现 1 次, 即它们的搭配也是均衡的。

2. 正交表 $L_9(3^4)$

正交表 $L_9(3^4)$ (表 1-3) 有 9 个横行和 4 个纵列, 由数码 “1”、“2”、“3” 组成。它也具有与前 2 张表类似的特点:

(1) 每纵列 “1”、“2”、“3” 出现的次数相同, 都是 3 次。

表 1-3 正交表 $L_9(3^4)$

列 号 试 验 号	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	1	2	2	2
3	1	3	3	3
4	2	1	2	3
5	2	2	3	1
6	2	3	1	2
7	3	1	3	2
8	3	2	1	3
9	3	3	2	1

(2) 任意 2 个纵列, 其横方向形成的 9 个数字对中, (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2) 和 (3, 3) 出现的次数相同, 都是 1 次, 即任意 2 列的数码 “1”、“2”、“3” 间的搭配是均衡的。

以上介绍的 3 张正交表是正交试验中最常用的, 它们都具有 “搭配均衡” 的特性, 这也是正交表的 “正交性” 的含义。至于正交表记号所表示的意思如图 1-1 所示。

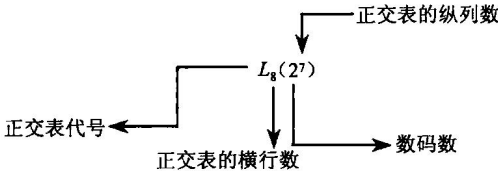


图 1-1 正交表记号含义示意

二、如何用正交表安排试验

如何用正交表安排试验，目前主要有两大观点，简介如下。

第一种观点认为：在多因素试验中，一般存在因素间的交互作用，必须通过试验结果分析交互作用，因素间的交互作用与因素的地位一样，在正交表中占列。在有交互作用时应当少考虑几个因素（留交互作用列）、少分位级，搞完全组合（或程度较低的部分实施）试验。在这种观点指导下，用正交表安排试验一般要作表头设计。由这种观点得到的安排试验的方法称为方法 I。这种观点认为下面介绍的方法 II 牺牲了交互作用。

第二种观点认为：在多因素试验中，虽然存在交互作用，但分析、计算交互作用的大小在某种意义上说是兜圈子。安排试验时，应该多安排几个因素，每种因素多分位级，搞高度的部分实施。不留交互作用列，不作表头设计，而是按因素顺序上列、位级对号入座的方法安排试验方案。由这种观点得到的安排试验的方法称为方法 II。

本书将在第三章通过实例详细介绍方法 II，现在讨论方法 I。

例 1-1 某厂为研制好的高档细瓷坯釉配方和改进工艺，考查 4 个主要因素，每个因素选 2 个位级，如表 1-4 所示。

表 1-4 因素位级表

因素 位 级	坯料配方 A	釉料配方 B	釉层厚度 C (mm)	烧成温度 D (℃)
1	B ₁	G ₁	0.2	1310
2	B ₂	G ₂	0.3	1330

(1) 只考虑 A, B, C 3 个因素，选 $L_8(2^7)$ 比较合适，按表 1-5 作表头设计。

表 1-5 表头设计

列 号	1	2	3	4	5	6	7
因 素	A	B	A×B	C	A×C	B×C	

这时 3 个因素的两两交互作用完全可以计算出来。共做 8 个试验，安排试验时，不需要交互作用列，试验安排如表 1-6 所示。

表 1-6 试验计划

因素 试 验 号	A	B	C
1	1 (B ₁)	1 (G ₁)	1 (0.2)
2	1	1	2 (0.3)
3	1	2 (G ₂)	1
4	1	2	2
5	2 (B ₂)	1	1
6	2	1	2
7	2	2	1
8	2	2	2

(2) 如果 4 个因素都考虑，而它们的交互作用根据以往经验认为不大，此时仍选用 $L_8(2^7)$ ，按表 1-7 作表头设计。

表 1-7 表头设计

列 号	1	2	3	4	5	6	7
因 素	A	B	A×B C×D	C	A×C B×D	B×C A×D	D

这时保证了每个因素的作用可以分析清楚，而交互作用由于很小，不需要单独拿出来考查，让它们混杂在一起。

(3) 如果 4 个因素都考虑，并且特别希望分析 A 与 B，C，D 的交互作用，而其他的交互作用很小，此时仍选用 $L_8(2^7)$ ，按表 1-8 作表头设计。

表 1-8 表头设计

列 号	1	2	3	4	5	6	7
因 素	A	B C×D	A×B	C B×D	A×C	D B×C	A×D

在此设计中有一些混杂，B 和 C×D，C 和 B×D，D 和 B×C，但由于已知 C×D，B×D，B×C 很小，故不影响对结果的分析。

(4) 如果 4 个因素都考虑，因素的所有两两交互作用也考虑，这时由 $L_8(2^7)$ 的表头设计看出，选 $L_8(2^7)$ 不合适，于是选 $L_{16}(2^{12})$ ，表头设计如表 1-9 所示。

表 1-9 表头设计

列 号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
因 素	A	B	A×B	C	A×C	B×C		D	A×D	B×D		C×D

例 1-2 在提高钛酸铝陶瓷强度的研究中，考虑如下 4 个因素：烧结温度（A）、外加 ZrO_2 (WT)% (B)、外加 SnO_2 (WT)% (C)、保温时间（D），因素位级表如表 1-10 所示。

表 1-10 因素位级表

因 素 位 级	烧结温度 (°C)	外加 ZrO_2 (WT)%	外加 SnO_2 (WT)%	保温时间 (h)
	A	B	C	D
1	1460	3	0	1
2	1500	5	1	3
3	1540	7	3	5

(1) 如果只考察因素 A，B，C，不考虑交互作用，此时选用 $L_9(3^4)$ ，A，B，C 可放在 $L_9(3^4)$ 表中 4 列的任意 3 列，如放在前 3 列（表 1-11）。

表 1-11 表头设计

列 号	1	2	3	4
因 素	A	B	C	

(2) 若 4 个因素都考虑，而不考虑交互作用，这时要根据具体情况来定。

① 试验费用高，希望少做点试验，可仍选用 $L_9(3^4)$ ，表头设计如表 1-12 所示。

表 1-12 表头设计

列 号	1	2	3	4
因 素	A	B	C	D

这样设计分析的精度差；如条件允许，最好不选这个表，而选用试验次数更多的表。

②试验费用不太高，试验比较方便，此时选 $L_{18}(2 \times 3^7)$ 为宜，表头设计如表 1-13 所示（A，B，C，D 放在 2~8 列中任一列均可）。

表 1-13 表头设计

列 号	1	2	3	4	5	6	7	8
因 素		A	B	C	D			

这样设计分析的精度比 $L_9(3^4)$ 有所提高。

（3）如需要考虑的有因素 A，B，C 及它们两两的所有交互作用，这时 $L_9(3^4)$ ， $L_{18}(2 \times 3^7)$ 均做不到，于是选用 $L_{27}(3^{11})$ ，表头设计如表 1-14 所示。

表 1-14 表头设计

列 号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
因 素	A	B	$(A \times B)_1$	$(A \times B)_2$	C	$(A \times C)_1$	$(A \times C)_2$	$(B \times C)_1$		$(B \times C)_2$	

其中每个交互作用都占了 2 列。

方法 II 安排试验的原则是：因素顺序上列，位级对号入座。用正交表安排试验时，尽可能多安排因素，每个因素多分位级，这样可以选用小表安排试验，不考虑因素间的交互作用。方法 I 与方法 II 的区别在于：要不要在表上安排交互作用列，是否作表头设计。本章第三节、第四节分析数据的方法都适用于方法 I 与方法 II。采用方法 II 安排试验方案，一般在分析试验结果时，尽量作直观分析，不作或少作方差分析。第三章将通过实例介绍方法 II。

在正交表的任意 2 列中，各种数码搭配出现的次数相同，这就是正交表的正交性。因为正交表的这种性质，可知：①保证了试验条件均衡地分散在搭配完全的位级组合中，剪表性剪，易于出现较好的试验条件，这就是均衡分散性；②对于每一个因素列，在各个位级的结果之和中，其他因素各个位级的出现次数都是相同的，这就保证了在各个位级的结果中，极大地限度地排除了其他因素的干扰，能有效地进行试验效果的比较，计算出好的试验条件组合，这就是整齐可比性。正交设计法效率高、有代表性的主要原因就是上述 2 种特性。

第三节 单指标的试验分析

上节介绍了正交表的选择，正交表选定后，进行试验，试验后的数据如何分析？现在介绍 2 种分析法：一种是直观分析，简单易行；一种是方差分析，计算量较大，但比较精确。后一种方法将在下章讨论。

例 1-3 在试验用不发芽的大麦制造酒的过程中（可简称无芽酶试验），选了 4 个因素，每个因素选 3 个位级（表 1-15）。考查指标：粉状粒含量（粉状粒越多越好）。

表 1-15 因素位级表

因素 位 级	底水 A (g)	浸氮时间 B (分)	920 浓度 C (%)	氨水浓度 D (%)
1	136	180	2.5	0.25
2	138	215	3.0	0.26
3	140	250	3.5	0.27

这项试验全是 3 位级的因素，应选 L_9 ， L_{18} ， L_{27} 等正交表；由于试验工作量所限， L_{18} 以上一次做不了，于是选 $L_9(3^4)$ ，按表 1-16 进行表头设计。

表 1-16 表头设计

列 号	1	2	3	4
因 素	A	B	C	D

对 A 的位级随机化，如表 1-17 所示。

表 1-17 位级随机化

位 级	1	2	3
A	140	136	138

于是因素位级表重新列表如表 1-18 所示。

表 1-18 因素位级表

因素 位 级	A	B	C	D
1	140	180	2.5	0.25
2	136	215	3.0	0.26
3	138	250	3.5	0.27

用 L_9 安排试验，测得粉状粒含量数据如表 1-19 所示。

表 1-19 试验结果

因素 试 验 号	A	B	C	D	粉状粒含量(%)
1	1	1	1	1	45.5
2	1	2	2	2	33.0
3	1	3	3	3	32.5
4	2	1	3	3	36.5
5	2	2	2	1	32.0
6	2	3	1	2	14.5
7	3	1	3	2	40.5
8	3	2	1	3	33.0
9	3	3	2	1	28.0
K_1	111.0	122.5	93.0	105.5	
K_2	83.0	98.0	97.5	83.0	
K_3	101.5	75.0	105.0	102.0	
$\bar{K}_1$	37.0	40.8	31.0	35.2	
$\bar{K}_2$	27.7	32.7	32.5	29.3	
$\bar{K}_3$	33.8	25.0	35.0	34.0	
R	9.3	15.8	4.0	5.9	

表 1-19 中的 K_1 表示每列中对应 1 的试验数据相加，如：

A 列， $K_1=45.5+33.0+32.5=111.0$ ；

D 列， $K_1=45.5+32.0+28.0=105.5$ 。

K_2 ， K_3 的意义与 K_1 类似， $\bar{K}_1$ ， $\bar{K}_2$ ， $\bar{K}_3$ 分别是用 K_1 ， K_2 ， K_3 除以 3，即它们表示因素 3 个位级对应的平均粉状粒含量。这是正交设计的优点，在每个因素都变化的情况下，它仍然能够清楚地分出每个因素对指标的影响大小，知道对应于每个位级的指标平均值。

作因素和指标的关系图，即把每个因素的 $\bar{K}_1$ ， $\bar{K}_2$ ， $\bar{K}_3$ 点在坐标纸上（图 1-2）。

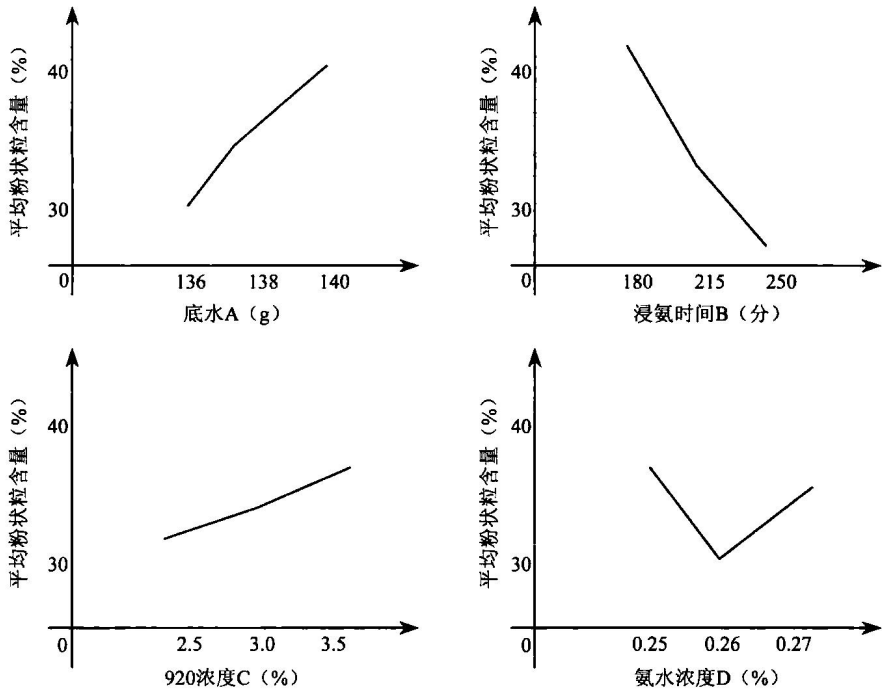


图 1-2 因素和指标的关系

粉状粒含量越高越好，图 1-2 表明：

- (1) 底水越大，粉状粒含量越高，以 140g 最高；
- (2) 浸氨时间越短，粉状粒含量越高，以 180 分最高；
- (3) 920 浓度越大，粉状粒含量越高；
- (4) 氨水浓度为 0.25% 时，粉状粒含量最高。

由以上 4 点，工艺条件应定在 $A_1B_1C_3D_2$ （如果仅考虑粉状粒含量 1 个指标）。因最佳点大都在试验范围的边界，还应扩大试验范围，寻求更好的工艺条件。

直观上易见：一个因素对粉状粒含量影响大，是主要的，那么这个因素不同的位级相应的平均粉状粒含量之间差异比较大；一个因素影响不大，是次要的，相应的粉状粒含量差异较小。反映在图上，点子数散布大的因素是主要的；散布小的是次要的。

用上述原则，从图 1-2 看出：浸氨时间的 3 个点子数散布最大，是主要的因素；底水的点子数散布稍小，影响居第 2 位；其余 2 个因素点子数散布都不大，因此，可以认为它们是次要因素。

第四节 多指标的试验分析

在实际生产中，用来衡量试验效果的指标往往不止一个，而同时要考查几个，这类试验称为多指标试验。在多指标试验中，有时一项指标好，而另一项指标差，同时兼顾各项指标并使几个指标都能达到一定要求的生产条件，这就是多指标试验的分析方法要讨论的问题。

一、综合平衡法

综合平衡法就是分别对各个单一指标进行分析，然后再把对各个指标的计算分析结果进行综合平衡，得出结论。

例 1-4 高岭土除铁精选工艺中，考查了 4 个主要因素，每个因素考虑 3 个位级。考查指标是：精泥产率（%）、精泥 Fe₂O₃ 含量（质量分数）（%）、精泥 Fe₂O₃ 分布率（%），精泥产率越高越好，精泥中 Fe₂O₃ 含量及精泥中 Fe₂O₃ 分布率越低越好。因素位级表如表 1-20 所示。

表 1-20 因素位级表

因素 位级	水玻璃用量 (kg/t)	矿物浓度 (%)	磁场强度 (奥斯特)	处理能力[kg/ (cm · h)]
1	4	20	8 000	0.50
2	6	25	13 000	0.67
3	8	30	16 000	1.00

用 L₉(3⁴) 安排试验，试验条件及结果如表 1-21 所示。

表 1-21 试验条件及结果

因素 位级	A	B	C	D	精泥产率 (%)	精泥 Fe ₂ O ₃ 含量 (%)	精泥 Fe ₂ O ₃ 分布率 (%)
1	1	1	1	1	86.00	0.87	49.83
2	1	2	2	2	84.00	0.80	44.94
3	1	3	3	3	86.00	0.79	46.81
4	2	1	2	3	86.30	0.80	47.59
5	2	2	3	1	84.00	0.77	42.19
6	2	3	1	2	87.00	0.83	50.19
7	3	1	3	2	86.40	0.79	48.86
8	3	2	1	3	88.84	0.80	53.18
9	3	3	2	1	82.40	0.76	41.07

用上节介绍的方法计算 $K_1 \sim K_3$ ， $\bar{K}_1 \sim \bar{K}_3$ ，此时 K_1 是同列 3 个 1 对应数据相加， $\bar{K}_1 = \frac{K_1}{3}$ 。以此类推，计算结果如表 1-22 所示。

表 1-22 极差的计算结果

指标 因素 K, R	精泥 Fe ₂ O ₃ 含量 (质量分数) (%)				精泥 Fe ₂ O ₃ 分布率 (%)			
	A	B	C	D	A	B	C	D
K ₁	2.46	2.46	2.50	2.40	141.58	146.28	158.92	133.09
K ₂	2.40	2.37	2.36	2.42	139.97	140.31	133.60	144.71
K ₃	2.35	2.36	2.35	2.39	143.11	136.79	137.86	147.58

续表

因素 K, R	精泥 Fe_2O_3 含量 (质量分数) (%)				精泥 Fe_2O_3 分布率 (%)			
	A	B	C	D	A	B	C	D
$\bar{K}_1$	0.82	0.82	0.83	0.80	47.19	48.76	44.31	44.94
$\bar{K}_2$	0.80	0.79	0.81	0.81	46.66	46.77	44.53	48.24
$\bar{K}_3$	0.78	0.79	0.80	0.80	47.33	46.26	44.95	49.19
R	0.04	0.03	0.03	0.01	0.67	2.50	0.64	4.25

从试验结果看，每次试验精泥产率都达到 80%以上，故在数据分析中不考虑这项指标。用 $\bar{K}_1, \bar{K}_2, \bar{K}_3$ 的值作图，如图 1-3 所示。

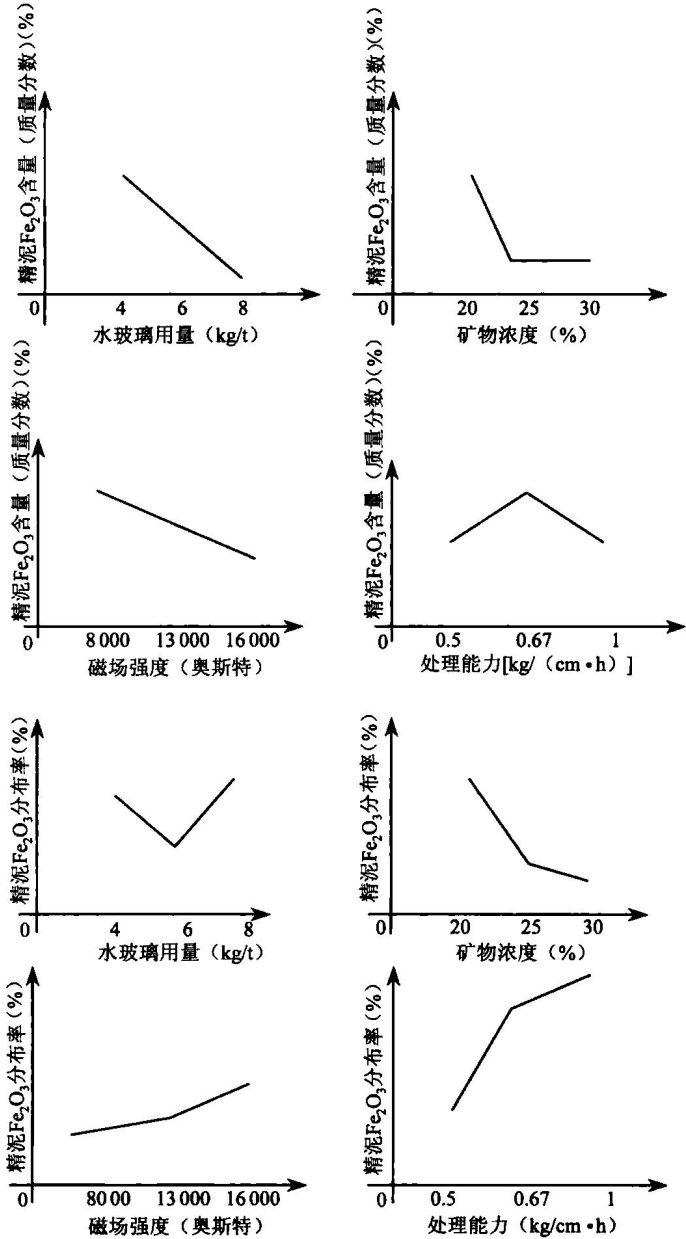


图 1-3 趋势图

对于精泥 Fe_2O_3 分布率 (%) 各因素的主次顺序为:

主—————>次
D B A C

先按处于主要地位的指标选位级, 再按处于较主要地位的指标选取。

对因素 A, 精泥 Fe_2O_3 含量 (质量分数) 处于主要地位, 由精泥 Fe_2O_3 含量 (质量分数) 看, A_3 和 A_2 好 (精泥 Fe_2O_3 含量越低越好)。精泥 Fe_2O_3 分布率对因素 A 来说较次要, 但可参考由它分析得到的结果, 看选 A_3 还是 A_2 , 最后选取 A_2 。

对因素 B, 2 个指标都处于较重要地位, 经分析可定出 B 选取 B_3 。

对因素 C, 精泥 Fe_2O_3 含量较重要, 从精泥 Fe_2O_3 含量看, C_3 与 C_2 好, 从精泥 Fe_2O_3 分布率看, C_2 好。故 C 取 C_2 。

对因素 D, 精泥 Fe_2O_3 分布率处于最重要地位, 从精泥 Fe_2O_3 分布率看, D_1 好, 而精泥 Fe_2O_3 含量 (质量分数) 居于很次要地位, D 完全可由精泥 Fe_2O_3 分布率来定, D 取 D_1 。

综上所述, 最佳配方为: $C_2A_2B_3D_1$ 。

二、综合评分法

综合评分法是按制订的试验计划试验而得各号试验的每个指标后, 由专业知识及实际生产的要求等, 对每号试验评出各项指标的综合得分; 然后以每号试验的得分作为单一的试验指标进行分析。

例 1-5 白地酶核酸生产的工艺试验。

原工艺生产中核酸的产率偏低, 成本太高甚至造成亏损, 希望通过试验寻找好的工艺条件, 使它们的含量提高。

试验指标: 核酸泥纯度 (%) 及纯核酸回收率 (%), 考虑 4 个因素, 每个因素考虑 3 个位级 (表 1-23)。

表 1-23 因素位级表

因 素 位 级	腌制时间 A (h)	白地酶核酸含量 (质量分数) B (%)	加热时 pH C	加水量 D
1	24	7.4	4.8	1:4
2	4	8.7	6.0	1:3
3	0	6.2	9.0	1:2

选用 $L_9(3^4)$ 正交表安排试验, 试验结果如表 1-24 所示。

表 1-24 试验结果

因 素 试 验 号	A	B	C	D	核酸泥纯度 (%)	纯核酸回收率 (%)	综 合 评 分
1	1	1	1	1	17.8	29.6	59.4
2	1	2	2	2	12.2	41.3	51.2
3	1	3	3	3	6.2	59.9	45.5
4	2	1	2	3	8.0	24.3	32.2
5	2	2	3	1	4.5	50.6	36.6
6	2	3	1	2	4.1	58.2	39.4
7	3	1	3	2	8.5	30.9	36.6
8	3	2	1	3	7.3	20.4	28.5
9	3	3	2	1	4.4	73.1	47.7