



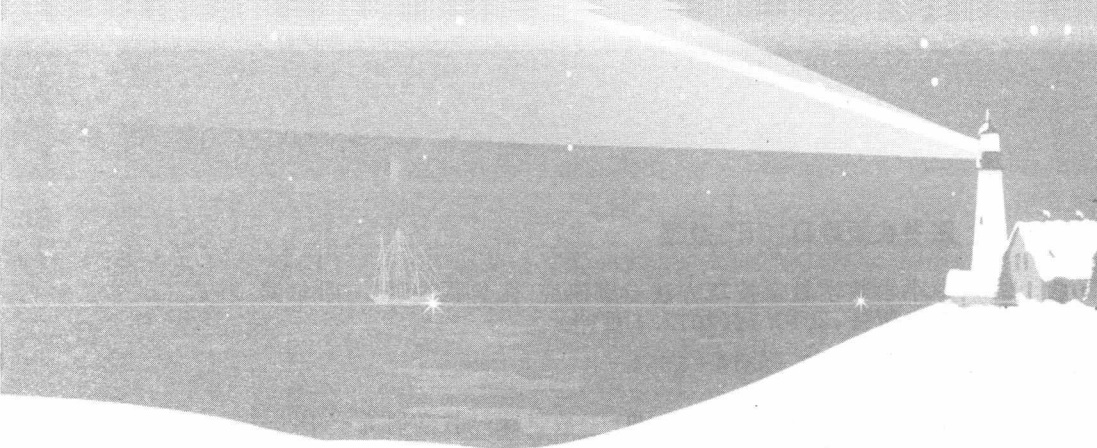
中小学数学 教学技巧方法专题研究 (上)

介绍不等式各种类形和解题技巧、方法

克服所有“速算”都不能进入小学课堂的缺点。介绍一些特殊数的运算规律及计算技巧。形成速算格式与特殊数的运算规律相结合的新的速算体系。

张忠强 编著

黑龙江教育出版社



中小学数学 教学技巧方法专题研究

(上)

介绍不等式各种类型和解题技巧、方法

克服所有“速算”都不能进入小学课堂的缺点。介绍一些特殊数的运算规律及计算技巧。形成速算格式与特殊数的运算规律相结合的新的速算体系。

张忠强 编著

黑龙江教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

中小学数学教学技巧方法专题研究/张忠强编著. --哈尔滨:黑龙江教育出版社, 2010. 12(2012. 4 重印)

ISBN 978—7—5316—5554—1

I. ①中… II. ①张… III. ①数学课—教学研究—中小学
IV. ①G633. 602

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 040039 号

中小学数学教学技巧方法专题研究

ZHONGXIAOXUE SHUXUE JIAOXUE JIQIAO FANGFA ZHUANTI YANJIU

张忠强 编著

责任编辑	徐永进
封面设计	高 天
责任校对	石 英
出版发行	黑龙江教育出版社 (哈尔滨市南岗区花园街 158 号)
印 刷	北京海德伟业印务有限公司
开 本	650×960 1/16
印 张	36
字 数	450 千
版 次	2012 年 5 月第 2 版
印 次	2012 年 5 月第 1 次印刷
书 号	ISBN 978—7—5316—5554—1
定 价	72.00 元(全三册)

黑龙江教育出版社网址: www.hljep.com.cn

如需订购图书,请与我社发行中心联系。联系电话:0451—82529593 82534665

如有印装质量问题,请与我社联系调换。联系电话:0451—82529347

如发现盗版图书,请向我社举报。举报电话:0451—82560814

部办高校中外数学史讲习班留影 1984.7~8 於北师大



前排就坐的有白尚如(左六)、杜石然(左八)、吴文俊(右六)、钱宝琛(右四),
后排就坐的有张平(三排右一)、作者(三排左八)等人

我们先来讲个故事

古代有一个穷汉，遇到神仙吕洞宾。吕洞宾看他很困难，就把路边的石头点化成金子送给了他。一般人都会要的。不料，穷汉没要并说：“你给我金子我早晚是要用完的，你还是教给我怎样才能像你一样，有这种点石成金的方法吧。”

上面的故事，确实给我们一个启示，在一定意义上说，方法比金子更重要。

所用符号说明

N 自然数集

Z 整数集

Z^+ 正整数集

Q 有理数集

R 实数集

$\in$ 属于 如 $5 \in N$, 读做 5 属于自然数集

$\ni$ 使得

$\exists$ 存在

$\exists!$ 存在且唯一

$a|b$ 表示 a 整除 b

$a \nmid b$ 表示 a 不能整除 b

$\forall$ 任意的

$\vee$ 表示 $>$ 或 $<$ $\geq$ 或 $\leq$ 其中之一

$\wedge$ 表示 $<$ 或 $>$ $\leq$ 或 $\geq$ ……

$\Leftrightarrow$ 等价或同解或充要条件

$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ n 个字母的和

$\prod_{i=1}^n a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$ n 个字母的乘积

$a \equiv b \pmod{m}$ 读做 a 与 b 对于模 m 同余, (其中“ $\equiv$ ”不是恒等号, 而是同余号)

$a \not\equiv b \pmod{m}$ 读做 a 与 b 对于模 m 不同余



前 言

中小学数学是一门具有方法论性质的科学。就中小学数学命题而言,大致可分为计算题和证明题两大类,解这些题基本是围绕着“技巧和方法”而展开的。所以我用了二十多年的时间对中小学数学教学的技巧方法做了认真专题研究,并本着中小学课本里没有的、有的资料又不太好找的、中小学教学又都需要的内容为原则编著的。本书具有如下几个特点:

一、在初等数学领域里填补了三项空白

1. 第一篇“速算格式”简化了意大利数学家巴巧利于 1494 创建的,现在正在运行的“多位数乘法”的书写格式,增加了心算程序,提高了运算的速度。克服了所有“速算”都不能进入小学课堂的缺点。并介绍了一些特殊数的运算规律及计算技巧。形成了速算格式与特殊数的运算规律相结合为一体的新的速算体系。

2. 在第二篇方程中“方程的类型(不是应用题的类型)和有趣的古代不定方程”及其解法也填补了市面上数学辅导资料的空白(经过多家书店多次的核对)。

3. 第三篇“不等式”填补了这一专题研究的空白。它概括了中外数学竞赛的题型和解法;较全面地介绍了不等式各种类型和解题技巧、方法。

二、在教与学的领域里解决了四项历史难题

1. 在教学理论中要求教师对知识的传授要做到“段段清”。这一



要求一直没有找到切实可行有效方法。这里找到了并经过中学实验是成功的有效方法——“超高速批改作业法”。(附录1)结束了多年来只喊口号“要段段清”而没有有效措施的历史;同时也减轻了老师的负担提高了效率。

2. 多年来各高师院校教法课中的学生“试讲课”始终没有明确的评定标准。这里(附录2)的“学生试讲课的量化管理的实践”给出了全面评定教师课堂教学水平的一种方法,结束了师范院校教法课中学生“试讲课”苍白无力的历史。

3. 各高等院校每学期期末考试中,都有三分之一以上的学生要进行补考。追究其原因主要是中学的学习方法与大学的学习方法没有接好轨所至。这里第五篇科学的学习方法中给了全面的回答。

4. 现在都说独生子女“难教育”,其实是教育者的教育方法不对。这里(附录3)找到了行之有效的“培养学生(特别是少儿)良好学习品质”的好方法。本文还点破了,为什么中小学9年的时间里列方程解应用题始终是数学教与学的难点的根源。

5. 中小学数学史串插于各章节之中,不仅增加了趣味性,而且获得了数学史知识。所以本书是集知识性、应用性、可读性和趣味性于一身,是中小学、师范院校师生难得的好资料,而且一书在手最多可用十多年。

由于本人水平有限,缺点和错误在所难免,敬请读者不吝赐教,以便改正。

前 言

新课程改革使教师发生了巨大的变化。一方面,教师增加了更多的任务,从课程的实施者、操作者、控制者到课程的开发者、研究者、指导者,从过多的关注学生的学业成绩到如今关心学生的全面发展,教师在专业发展方面遇到的难题和压力是前所未有的;另一方面,新课程改革也为教师提供了广阔的教学创新平台,也为教师创设了诸多的发展途径。比如对课程、目标、教材、教授、学习、评价和资源的认识,对设计、过程、方法、手段和生成的理解等,课堂教学发生了翻天覆地的变化,学生的学习方式得到了改变,“为了一切的学生,为了学生的一切”的理念得到进一步的张扬。

但是新课程的创新理念和方法与实际操作还存在着一定的误区,继续按照课程改革的理念去进行教学的步履蹒跚。

基于此,本书融会了课程改革中的热点也是难点的问题以及正在研究和发展的课堂教学的重大相关课题,着眼于指导教师有效的“教”而最终促进学生有效的“学”,通过大量的教学实例点通学科理应诠释的教学基本理念、教学实践中应展示的教学智慧以及融会贯通在课堂教学中的有效教学技能。使广大的语文教师更快的将新理念与有效教学的新观念、新方法有效的联系起来,从而指导其开展自己的新教学实践,并且在教师的备课过程中,能够从课堂教学实录中受到启发,完善自己的教学。

最后,特别感谢提供大量教学优秀案例的一线教研员和教师们,希望本书能够为一线的语文教师解决更多棘手的问题提供帮助。

编 者



目 录

前言	(1)
第一篇 速算格式	(1)
第一章 加减法(加减法的速算)	(3)
§ 1·1 加减余补法	(6)
§ 1·2 连续数加法	(10)
§ 1·3 基数法	(12)
§ 1·4 凑十法	(13)
第二章 乘法	(15)
§ 2·1 一位特殊数的乘法	(22)
§ 2·2 二位数的叉乘法	(29)
§ 2·3 三位数乘三位数或多位数的叉乘法	(42)
§ 2·4 平方数	(49)
第三章 特殊数的除法	(60)
§ 3·1 零不能做除数的理论根据	(61)
§ 3·2 特殊数的除法速算	(62)
§ 3·3 同余概念及其应用	(68)
第四章 多项式的速算	(82)
§ 4·1 多项式的加法和分离系数法	(85)
§ 4·2 多项式的叉乘法	(86)
§ 4·3 多项式的叉除法	(88)
§ 4·4 多项式的快速分解因式法	(92)



第二篇 方程	(101)
第一章 方程的基础理论	(102)
§ 1·1 方程的基本概念	(103)
§ 1·2 方程的同解性	(104)
§ 1·3 方程的变换	(107)
第二章 整式方程	(111)
§ 2·1 有趣的古代不定方程	(113)
§ 2·2 整式方程根的研究	(126)
§ 2·3 三次方程、四次方程的公式解	(136)
§ 2·4 二项高次方程	(146)
第三章 分式方程	(152)
§ 3·1 分式方程的理论	(152)
§ 3·2 分式方程的解法	(154)
第四章 无理方程	(159)
§ 4·1 无理方程的基础理论	(160)
§ 4·2 无理方程的类型与解法	(162)
§ 4·3 分式无理方程	(175)
第五章 超越方程	(181)
§ 5·1 指数方程	(183)
§ 5·2 对数方程	(188)
§ 5·3 三角方程	(196)
第三篇 不等式	(213)
第一章 不等式的基本理论	(214)
§ 1·1 不等式的概念及基本理论	(214)
§ 1·2 解不等式	(216)
第二章 代数不等式的证明	(220)
§ 2·1 证明不等式的基本方法	(220)



§ 2·2 不等式的证明技巧	(224)
§ 2·3 利用函数概念证明不等式	(242)
§ 2·4 绝对值不等式的证明方法	(244)
第三章 几何不等式的证明	(254)
§ 3·1 用代数方法证明几何不等式	(256)
§ 3·2 利用几何知识证明几何不等式	(265)
§ 3·3 用构造法证明几何不等式	(273)
§ 3·4 关于不等式组 $a < \frac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab} < \frac{a+\sqrt{ab}+b}{3}$ $< \frac{a+b}{2} < \frac{2(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} < \frac{a^2+b^2}{a+b} < b$ 的两种几何 解释	(283)
第四章 三角不等式	(287)
§ 4·1 三角函数不等式	(287)
§ 4·2 三角形中一组(12个)线段不等式	(298)
第五章 对数不等式	(304)
§ 5·1 同底数不同真数的两个对数大小的比较	(304)
§ 5·2 不同底数,相同真数的两个对数大小的比较 ...	(304)
§ 5·3 不同底数,不同真数的两个对数大小的比较 ...	(306)
第六章 数列不等式	(311)
§ 6·1 数列不等式的证明技巧	(311)
§ 6·2 几个重要不等式的证明	(328)
§ 6·3 利用凸函数性质证明不等式	(332)
§ 6·4 利用排序原理证明不等式	(339)
第四篇 数列	(346)
第一章 等差数列	(352)
§ 1·1 基本概念	(352)



§ 1·2	等差数列的性质及其判定	(353)
§ 1·3	高阶等差数列	(361)
第二章	等比数列	(371)
§ 2·1	基本概念	(371)
§ 2·2	等比数列的性质及其判定	(372)
§ 2·3	高阶等比数列	(375)
第三章	周期数列	(380)
§ 3·1	周期数列的定义及其性质	(380)
§ 3·2	周期数列的性质	(385)
第四章	线性递归数列	(390)
§ 4·1	线性递归数列的概念	(390)
§ 4·2	一阶递归数列的类型及其解法	(393)
§ 4·3	二阶线性递归数列的类型与解法	(407)
§ 4·4	分式递归数列的类型与解法	(417)
第五章	数列求和法综述	(423)
§ 5·1	有理式数列求和法	(423)
§ 5·2	组合数列求和法	(445)
§ 5·3	三角函数数列求和法	(457)
§ 5·4	解数列习题中常见错误举例	(467)
第五篇	科学的学习方法与记忆方法	(474)
第一章	科学的学习方法	(476)
§ 1·1	预习	(477)
§ 1·2	听课的要求	(483)
§ 1·3	课后复习	(490)
§ 1·4	独立做作业	(493)
§ 1·5	阶段复习和总结	(499)
§ 1·6	认真记好笔记	(506)



第二章 记忆方法是掌握知识的钥匙	(510)
§ 2·1 比谐记忆法	(511)
§ 2·2 歌诀记忆法	(517)
§ 2·3 词首记忆法	(522)
§ 2·4 规律记忆法	(523)
§ 2·5 反复循环记忆法	(525)
§ 2·6 交替记忆法	(527)
§ 2·7 归纳排组记忆法	(528)
§ 2·8 快速记忆法	(530)
§ 2·9 影响记忆的诸多因素和不良习惯	(532)
§ 2·10 解除大脑疲劳操	(533)
附录 1 超高速批改作业法	(535)
附录 2 高师院校学生试讲课量化管理与实践	(545)
附录 3 培养学生良好学习品质的好方法	(552)
附录 4 函数概念史与数学教育	(554)
参考文献	(559)



第一篇 速算格式

专 题 说 明

现行小学的多位数乘法是：“一位乘多位，错位相加”的方法。它来源于意大利数学家巴巧利(Luca Pacioli, 约 1445—1514)于 1494 年在威尼斯出版的《算术、几何、比与比例集成》一书中，共介绍了八种算法，其中第一种便是此法。至今已使用了六百多年了。我的“速算格式”出现之后，才发现现行乘法有如下三点不足：

1. 乘法在运算过程中，无心算程序。这对培养学生心算能力很不得利；
2. 现行的乘法运算的程序繁琐，书写格式也繁琐；
3. 运算的速度慢。

我的“速算格式”^①是根据《数学教师》1991.9 发表的“多项式的速算格式”一文，结合全国已发表过的“速算书籍”扩展而来。“速算格式”也是建立在“**纵项积放两边，又乘积和插中间**”的乘法法则基础上的，它揭示了现行乘法的内在规律，增加了心算内容，简

^① “多项式的速算格式”一文，在一九九二年十二月二十三日，荣获佳木斯大学原师范专科学校“一九九二年优秀科研成果”二等奖。

化了书写格式。所以,“速算格式”克服了上述三点的不足。开辟了以心算为核心的新乘法。

“速算格式”不但改进了小学数的乘,除法,而且也改进了中学的多项式乘,除法,使二者的速算统一了起来。

“速算格式”总结了一些数的运算规律,只有按照规律计算,才能开拓学生思维,解决小学的“题海战术”的不良做法。

由于同余概念的引入,使整数整除的理论及其口诀的来历更加具体和明确,如:对一个多位数能否被3整除,为什么要用把各位数相加的和来判断能否被3整除等等。由于同余概念的引入,能使中小学的各种数字计算(加、减、乘、除、乘方、开方)的验算。一律可以用心算法——弃九法来完成,这样速算就达到了完整化。同余还有一些有趣的应用如:属象和周数的推导、解古代不定方程等。它还是古代哲学巨著《周易》里的《象数学》中主要推算公式。^①

^① 可参考《易图的数学结构》,董光璧,上海人民出版社1987.10。



第一章 加减法(加减法的速算)

史料:

关于符号“+”、“-”、“=”、“()”、“[]”、“{ }”及“算术”、“代数”名词的由来和负数的产生。

加号“+”和减号“-”两种运算符号,最早出现在德国数学家维特曼(Johann widman,1460? —?)在1489年写的《简算与速算》中。

第一个把符号“=”作为等号使用的是英国数家雷科德(Recordes,R.大约1510—1558)在1557年写的《智慧的激励》一书中引用的。他说:“最相像的两件东西是两条平行线。所以,这两条线应该用来表示相等。”

小括号“()”,是在1544年,由德国数学家基拉德(Girard Albert 1595—1632)首先使用的;

对于中括号 “[]” 和大括号 “{ }” 是法国数学家韦达(Vieta F1540—1603)在1593年开始引用的。

“算术”一词的拉丁文 arithmetica 希腊文原来的意思是:(数 shù)和数数(shǔ,shù)的技术(或学问)演变而来。在我国,“算术”这一名词是从汉代已经通行。根据李约瑟的《中国科学技术史》译本,第三卷(1978)P8中所述,“算”字出现的年代不可能早于公元前3世纪。“算术”一词的正式使用最早出现在《九章算术》一书中。中国古代是用“筹”(一寸长的竹棍)在六寸见方的方盘中摆成方形进行运算,即用筹计算的技术。(也叫筹算法,例如一、二、三、或 |、||、|||,⊥、⊥、⊥、(或摆成竖形状)分别代表表达式 1、2、3,6、7、8。又如: |||⊥表示 37 等等。即“算术”就是计算技术的意思。