数学模式论

徐利治　郑毓信　著

PATTERN THEORY OF MATHMATICS

广西教育出版社

责任编辑 赵汝明
封面设计 苏鸣生

ISBN 7－5435－1756－6/G・1348
定价：5.50元

数学模式论

徐利治　郑毓信　著

广西教育出版社

数学模式论
徐利治　郑毓信　著
☆
广西教育出版社出版
（南宁市民族大道68号）
广西新华书店发行　南宁地区印刷厂印刷
＊
开本850×1168　1/32　6.875印张　插页6　160千字
1993年3月第1版　1993年3月第1次印刷
印数：1—1500册
ISBN 7-5435-1756-6/G·1348　定价：5.50元
（桂）新登字05号

前　言

笔者自1980年始，即与其他一些合作者一起，对数学哲学、数学方法论等一系列问题进行了逐步深入的研究。数学工作者与哲[illegible]密切合作可以说是这一研究工作的基本形式，而其基本目标则是希望能建立一种充分反映现代数学发展和辩证唯物主义基本观念的新的数学观，从而充分发挥哲学（包括方法论）对于实际数学活动（包括数学研究和数学教育）的促进作用。

对于数学基础的研究，包括数学基础研究各个主要学派——逻辑主义、直觉主义和形式主义——的分析，可以说是我们在数学哲学方面最早的工作，其目的之一即在于充分吸取国外已有的研究成果和合理思想，从而为开展独立的研究提供必要的基础。在这方面还应提及关于悖论实质的分析，由本书的有关章节（第十二章）可以看出，我们在这一问题上的观点已经有了进一步的发展和变化。

由介绍性的工作到提出相对独立的系统理论即是笔者在数学哲学方面研究工作逐步深入的主要标志。在1990年发表的一篇文章“数学模式观的哲学基础”（载《哲学研究》，1990年，第二期）中，我们首次提出了“数学模式论”的思想。这一新的数学观在本书中得到了进一步的发展和更为系统的阐述，特别是，书中（第五—七章）从语言和文化的角度对数学的性质进行了分析，而这事实上即是与数学哲学的现代发展直接相呼应的。

除数学哲学方面的工作以外，笔者积极从事了数学方法论的研究。事实上，数学哲学必然具有方法论的性质，并为后一方面的专门研究提供了必要的基础；反之，作为一种相对独立的专门研

究，数学方法论则又可以看成是联系数学哲学和实际的数学活动的一座桥梁。因而，在这两者之间就存在有密切相关、相互促进的重要联系。

由较早出版的《浅谈数学方法论》（辽宁人民出版社，1980年）、《数学方法论选讲》(华中工学院出版社，1983年)、《数学方法论入门》（浙江教育出版社，1985年）到后来的《关系映射反演方法》、《数学抽象的方法与抽象度分析法》（江苏教育出版社，1989、1990年）等，这一系列

法论研究上所走过的道路。我们的工

法上，诸如化归原则与关系映射反演方法，数学抽象的方法论原则与抽象度分析法，数学中的美学方法等。尽管这并不能说构成了数学方法论的完整体系，但却代表了独立的研究成果。笔者高兴地看到，这些工作已经产生了较大的影响。

十几年的奋斗历历在目，更感谢广西教育出版社约请撰写《数学模式论》一书为我们提供了一个系统论述和进一步发展已有工作的良好机会。笔者在此大胆地提出了“数学模式论”这样一个理论，希望能经得起各方面的批评和实践的检验。

最后，值得提及的是，由多方面的学术交流，笔者欣喜地看到了在我们的工作与国外的现代研究之间存在有某种“平行的”发展，特别是对于“模式”概念的强调、数学方法论研究的兴起、以及由数学哲学、数学方法论向数学教育的过渡和渗透。由此，我们就不仅可以由国外同行的工作得到有益的启示，而且也希望能通过自己的工作对数学哲学和数学方法论的现代发展作出中国学者应有的贡献。

徐利治　郑毓信

1992年8月

目　录

第一篇　模式论的数学哲学

第二篇　模式论的数学方法论

第三篇　模式论的数学教学观

第一篇

模式论的数学哲学

数学哲学，在最一般的意义上，即是关于数学的哲学分析，诸如关于数学的性质和意义的研究等。尽管各个具体的数学内容的研究并不属于数学哲学的范围，但是，却又正是实际的数学活动为数学哲学的研究提供了必要的背景。从历史的角度看，由于数学的特殊性，同时也是由于一般哲学研究的不断深入，在数学哲学中逐渐形成了一些特殊的研究问题，如数学的本体论问题、真理性问题与认识论问题等，对此可以认为是数学哲学的基本问题；另外，所谓数学的语言观、数学的文化观念等则可以说是现代数学哲学研究的一些热门话题，而这事实上也就是从各个不同的角度更深入地揭示了数学的性质和意义。在第一部分中我们将以模式的概念为核心对上述各个问题作出独立的分析。

第一章

数学：量化模式的建构与研究

1.1 着眼点的选择

第一部分的目的是建立一个系统的数学哲学理论。在具体地从事这一工作以前，我们首先面临着这样一个问题：应当从哪里着手去进行我们的研究？从某种意义上说，这似乎只是一个表述上先后次序的问题；然而，应当强调的是，着眼点（或者说，突破口）的选择事实上对于工作目标的实现具有十分重要、甚至是决定性的意义——一般地说，这正是现代科学方法论研究的一个重要结论。

具体地说，为了确定数学哲学研究的着眼点，我们必须注意以下的两个问题：

第一，作为数学的哲学分析，当然不能脱离具体的数学内容与数学活动。如众所知，数学知识有层次高低的区分；数学活动则不仅包括数学的研究活动，而且包括数学的学习与教学活动。然而，作为一种综合的分析，我们的研究显然不能局限于任何一种特殊的数学知识或数学活动，而应着眼于贯穿在全部数学活动之中、并体现在各种数学知识之中的共同的东西，也即应当着眼于具有本质意义的东西。

第二，着眼点的研究应与整个工作目标有着较为直接的联系。由于我们的目标是建立一个系统的数学哲学理论，从而就必

须对数学哲学的各个基本问题（数学的本体论问题、数学的认识论问题及数学的真理性问题等）作出全面的分析，因此，着眼点的选择也就应当有利于这一工作的进行。

正是基于上面的考虑，我们认为，数学抽象的问题为数学的哲学分析提供了一个合适的着眼点。因为，第一，各项数学活动，无论是数学研究、还是数学教学或数学学习，都是在抽象的水平上进行的。事实上，即便是最简单的数学概念也都是抽象思维的产物。例如，谁曾见到过一，我们只能见到（某）一个人、一棵树、一间房，而决不会见到作为数学研究对象的真正的“一”（注意，在此不应把概念“一”与其符号相混淆）；类似地，我们也只能见到圆形的月亮、圆形的水池、圆形的场地，而决不会见到作为几何研究对象的真正的“圆”（在此也必须对“圆”的概念与纸上所画的圆明确地加以区分）。一般地说，任何数学对象都是抽象思维的产物，从而，在这样的意义上，数学抽象也就可以说是一项最为基本的数学活动。

第二，即使是最简单的数学抽象也已经充分体现了数学的特殊性，即是与数学哲学的各个基本问题直接相联系的。例如，尽管各个数学对象都是抽象思维的产物，而非真实世界中的独立存在，但是，我们在数学中所从事的又显然是一种客观的研究。这就是说，我们不能随心所欲地去创造某种“数学规律”，而只能按照数学对象的“本来面貌”去进行研究。例如，我们既不能随意地把 7 说成是 4 与 5 的和，也不能毫无根据地去断言哥德巴赫猜想的真假。正因为此，在许多人看来，数学对象就是一种独立的存在。这样，在数学中我们就突出地遇到了如下的“本体论问题”：数学对象究竟能否被看成独立的存在？如果可以，这又是一种什么样的存在？如果不行，则又应当如何去理解数学研究的客观性？

综上所述，为了搞好数学的哲学分析，我们就应首先从事数学抽象的定性分析，这就是本章的主要内容。

1.2 数学抽象的定性分析

对于数学抽象可以从抽象的内容、量度和方法这样几个角度去进行分析。由于对前两个方面已经有了不少的论述，因此，我们在此就将仅限于对此作出必要的说明和澄清；另外，本节的重点则在于数学抽象的特殊方法的分析。

1．数学抽象的特殊内容

数学是从量的方面反映客观实在的。这就是说，在数学的抽象中我们仅仅保留了事物的量的特性，而完全舍弃了它们的质的内容。显然，这种特殊的抽象内容即是数学抽象与其它科学中的抽象的一个重要区别。也正因为此，数学就可被定义为“量的科学”。

应当强调的是，对于所说的“量”，我们必须有正确的理解。严格地说，“量”是一个哲学概念，即是“量和质”这一哲学基本范畴中的一个环节，从而就具有十分确定的意义，因此，在这一问题上的任何怀疑论或不可知论的观点都是错误的。另外，从历史的角度看，‘量’又并非是一个静止的、僵化的概念，而是随着人类实践活动的发展不断发展和演变的。例如，“数”和“形”曾是“量”这一概念的两个基本意义，因此就有“数学是研究数量关系和空间形式的科学”的说法；但是，如果在今天仍然机械地去坚持这一说法就是不妥当的，因为，数学的发展早已突破了这一历史的局限性。

2．数学抽象的特殊量度

数学抽象的特殊性还表现在数学抽象所达到的特殊高度上：

数学抽象的程度远远超出了其它科学中的一般抽象。

具体地说，尽管一些基本的数学概念具有较为明显的直观意义，但数学中又有许多概念并非建立在对于真实事物或现象的直接抽象之上，而是较为间接的抽象的结果，也即是在抽象之上进行抽象，由概念去引出概念。另外，更为重要的是，数学中还有一些概念与真实世界的距离是如此之遥远，以致常常被说成“思维的自由创造”。由于这些“远离自然界的、从人的脑子中源源不断地涌现出来的概念”逐渐取代了“直接观念化”的对象在现代数学中占据了主导地位，（而且，这种创造活动在很大程度上就可以说是一种美的创造——对此可参见第四章和第十一章，）因此，数学有时又被称之为“创造性的艺术”。

3. 数学抽象的特殊方法

数学抽象的特殊性又在于它的特殊方法：在严格的数学研究中，无论所涉及的对象是否具有明显的直观意义，我们都只能依据相应的定义去进行演绎推理，而不能求助于直观，从而，在这样的意义上，数学的抽象事实上就是一种“建构”的活动：数学的研究对象即是通过这样的活动得到构造的。

对于所说的建构活动，我们并可作出如下的进一步分析：

第一，由于数学对象是借助于明确的定义得到构造的，而且，在进一步的研究中，我们只能依靠所说的定义去进行演绎推理，而不能求助于直观，因此，我们就可把所说的建构说成是一种“逻辑建构”。

应当强调的是，对于所说的“逻辑建构”必须与数学基础研究中逻辑主义学派关于“数学可以化归为逻辑”的观点明确地加以区分：前者是指数学对象是借助于明确的定义得到构造的，而且，数学理论的开展又完全建立在逻辑演绎之上；与此不同，逻辑主义者所断言的却是数学的对象可以借助于逻辑的概念得到

明确的定义，另外，数学的定理则又可以由逻辑的法则出发并借助于相应的定义得到严格的证明。（关于逻辑主义可参见夏基松、郑毓信：《西方数学哲学》，人民出版社，1986年）

第二，按定义方式的不同，对数学对象的逻辑建构可以作出如下的区分：有些数学对象是借助于其它的对象明显地得到定义的，从而就是所谓的“派生概念”，例如，圆就可以定义为“到定点（圆心）的距离等于定长（半径）的点的轨迹”；另外，那些更为基本的对象，也即所谓的“初始概念”，则是借助于相应的公理（组）“隐蔽地”得到定义的，例如，希尔伯特在其名著《几何基础》中给出的公理系统就可看成关于（欧氏）几何中基本对象（即点、线、面等）的“隐定义”。

第三，由于数学对象的逻辑建构是借助于纯粹的数学语言完成的，而且，在严格的数学研究中我们又只能依据相应的定义去进行推理，而不能求助于直观，因此，数学对象的明确定义事实上就是一种重新构造的过程。对此可具体剖析如下：

（1）理想化。相对于具有明显现实原型的数学对象而言，数学抽象的过程往往包含了对于真实事物或现象的必要简化和完善化，也即是一个理想化的过程。例如，任何真实事物的形状都很难说是严格的圆（球）形，在现实世界中也不可能找到“没有大小的点”、“没有宽度的线”等等，从而，相应的几何概念就都是理想化的产物。一般地说，在数学对象与其现实原型之间往往存在有重要的区别。（对此例如可参见彭加莱：《科学的价值》，光明日报出版社，1988年，第20页、第46—59页。）

（2）精确化。在很多情况下，严格的数学概念的提出就意味着对于相应朴素观念的必要澄清。或者说，只有借助于所说的数学概念，相应的朴素观念才能获得明确的意义。例如，如果不借助于极限等概念，弧长、面积、体积等概念就不可能获得精确

的定义。

（3）分离化。由于在严格的数学研究中，我们只能依据相应的定义去进行推理，而不能求助于直观，因此，数学对象的逻辑建构事实上就意味着与真实的分离。这就是说，在纯粹的数学研究中，我们是以抽象思维的产物为直接对象、而不是以其可能的现实原型为直接对象从事研究的。正因为此，即使就具有明显直观意义的数学概念和理论而言，诸如欧几里德的几何理论等，也不能被看成对于真实事物或现象的直接研究。

（4）一般化。相对于可能的现实原型而言，以抽象思维的产物为直接对象去从事研究具有更为普遍的意义：它们所反映的已不是某一特定事物或现象的量性特征，而是一类事物或现象在量的方面的共同特性。例如，从历史的角度看，计算运动物体的瞬时速度是导致导数概念的一个重要来源；但是，由于后者是借助于纯粹的数学语言得到定义的，而且，有关的理论又完全建立在纯粹的逻辑演绎之上，因此这就具有更为普遍的意义：它不仅可以被用于运动的研究，也适用于具有相同量性特性的一类问题。例如，电流强度就是电量关于时间的导数，曲线在某点处切线的斜率是纵坐标关于横坐标的导数等。

为了清楚地表明数学对象的相对独立性及其普遍意义，并考虑到数学抽象的特殊内容，我们可以把数学的研究对象特称为"量化模式"。（由此，对所说的"模式"[pattern]就应与通常所说的"模型"[model]明确地加以区分：按照我们的用法，模型从属于特定的事物或现象，从而就不具有模式那样的相对独立性和普遍意义。）

进而，对于数学抽象（在方法上）的特殊性，我们则可简要地归结为：

在数学中，我们是通过相对独立的量化模式的建构，并以此为直接对象从事客观世界量性规律性的研究的。

第四，数学对象的逻辑建构不仅意味着与真实的分离，而且也意味着与各个特殊个人的“心理图象”的分离，从而就直接促成了数学对象由内在的思维创造向“外部的独立存在”的转化。

具体地说，由于数学对象是借助于明确的定义得到建构的，而且，数学中所研究的又只是这种定义的逻辑推论，因此，尽管某些数学概念或理论在最初很可能只是某个个人的“发明创造”，但是，一旦这些对象得到了明确的定义，就立即获得了确定的“客观意义”，即使是“发明者”本人也只能客观地对此进行研究，而不能再任意地加以改变。另外，尽管同一个数学概念（诸如平行线的概念）在不同的人那里可能具有不同的“心理图象”，但是，相应的数学结论却具有超越各个特殊个体的普遍性。显然，这事实上也就是数学能够成为一门科学的一个必要条件。

最后，还应指出的是，正是数学抽象的特殊方法，即数学对象的逻辑建构为数学的高度抽象提供了现实的可能性。

具体地说，由于数学对象的逻辑建构在一定意义上就意味着与真实的脱离，从而就为思维的创造性活动提供了极大的自由性。例如，特别重要的是，由于公理被看成相应数学对象的隐定义，而并非是关于特定对象的“自明真理”，因此，在这样的理解下，我们就可“自由地”应用“假设——演绎方法”去从事各种可能的量化模式的研究。

1.3 数学：量化模式的建构与研究

1．数学：量化模式的建构与研究

依据上述关于数学抽象的定性分析，我们就可引出以下的关