◎21世纪大学数学创新教材

丛书主编　陈　化

数学建模方法

SHUXUE JIANMO FANGFA

（第二版）

彭　放　杨瑞琰　肖海军　何永明　编

科学出版社

21世纪大学数学创新教材

丛书主编　陈　化

数学建模方法

（第二版）

彭　放　杨瑞琰　肖海军　何永明　编

科学出版社

北　京

《21世纪大学数学创新教材》丛书编委会

主　　编　陈　化

常务副主编　樊启斌

副　主　编　吴传生　何　穗　刘安平

编　　委　（按姓氏笔画为序）

王卫华　王展青　刘安平　严国政
李　星　杨瑞琰　肖海军　吴传生
何　穗　陈　化　罗文强　赵东方
黄樟灿　梅全雄　彭　放　彭斯俊
曾祥金　谢民育　樊启斌

《21世纪大学数学创新教材》丛书序

《21世纪大学数学创新教材》为大学本科数学系列教材，大致划分为公共数学类、专业数学类两大块，创新是其主要特色和要求. 经组编委员会审定，列选科学出版社普通高等教育“十一五”规划教材.

一、组编机构

《21世纪大学数学创新教材》丛书由多所985和211大学联合组编：

丛书主编 陈 化

常务副主编 樊启斌

副 主 编 吴传生 何 穗 刘安平

丛书编委 （按姓氏笔画为序）

王卫华 王展青 刘安平 严国政 李 星
杨瑞琰 肖海军 吴传生 何 穗 陈 化
罗文强 赵东方 黄樟灿 梅全雄 彭 放
彭斯俊 曾祥金 谢民育 樊启斌

二、教材特色

创新是本套教材的主要特色和要求，创造双重品牌：

先进. 把握教改、课改动态和学科发展前沿，学科、课程的先进理念、知识和方法原则上都要写进教材或体现在教材结构及内容中.

知识与方法创新. 重点教材、高层次教材，应体现知识、方法、结构、内容等方面的创新，有所建树，有所创造，有所贡献.

教学实践创新. 教材适用，教师好教，学生好学，是教材的基本标准. 应紧跟和引领教学实践，在教学方法、教材结构、知识组织、详略把握、内容安排上有独到之处.

继承与创新. 创新须与继承相结合，是继承基础上的创新；创新需转变为参编者、授课者的思想和行为，避免文化冲突.

三、指导思想

遵循国家教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会关于课程教学的基本要求，力求教材体系完整，结构严谨，层次分明，深入浅出，循序渐进，阐述精炼，富有启发性，让学生打下坚实的理论基础. 除上述一般性要求外，还应具备下列特点：

（1）恰当融入现代数学的新思想、新观点、新结果，使学生有较新的学术视野.

(2) 体现现代数学创新思维,着力培养学生运用现代数学软件的能力,使教材真正成为基于现代数学软件的、将数学软件融合到具体教学内容中的现代精品教材.

(3) 在内容取舍、材料组织、叙述方式等方面具有较高水准和自身特色.

(4) 数学专业教材要求同步给出重要概念的英文词汇,章末列出中文小结,布置若干道(少量)英文习题,并要求学生用英文解答. 章末列出习题和思考题,并列出可进一步深入阅读的文献. 书末给出中英文对照名词索引.

(5) 公共数学教材具有概括性和简易性,注重强化学生的实验训练和实际动手能力,加强内容的实用性,注重案例分析,提高学生应用数学知识和数学方法解决实际问题的能力.

四、主编职责

丛书组编委员会和出版社确定全套丛书的编写原则、指导思想和编写规范,在这一框架下,每本教材的主编对本书具有明确的责权利:

1. 拟定指导思想

按照丛书的指导思想和特色要求,拟出编写本书的指导思想和编写说明.

2. 明确创新点

教改、课改动态,学科发展前沿,先进理念、知识和方法,如何引入教材;知识和内容创新闪光点及其编写方法;教学实践创新的具体操作;创新与继承的关系把握及其主客体融合.

3. 把握教材质量

质量是图书的生命,保持和发扬科学出版社"三高"、"三严"的传统特色,创出品牌;适用性是教材的生命力所在,应明确读者对象,篇幅要结合大部分学校对课程学时数的要求.

4. 掌握教材编写环节

(1) 把握教材编写人员水平,原则上要求博士、副教授以上,有多年课程教学经历,熟悉课程和学科领域的发展状况,有教材编写经验,有扎实的文字功底.

(2) 充分注意著作权问题,不侵犯他人著作权.

(3) 讨论、拟定教材提纲,并负责编写组的编写分工、协调与组织.

(4) 拟就内容简介、前言、目录、样章,统稿、定稿,确定交稿时间.

(5) 负责出版事宜,敦促编写组成员使用本教材,并优先选用本系列教材.

《21世纪大学数学创新教材》组编委员会

2009年6月

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

第二版前言

在计算机诞生以后尤其是近几十年来，随着科技的不断进步和计算机科学的迅猛发展，数学建模不仅在物理、力学、普通工程技术等传统领域的作用更加重要了，而且进入到生物、化学、医学、气象、人口、生态、经济、管理、社会学等广泛领域. 数学科学与计算机技术相结合，产生了一种新技术——数学技术. 越来越多的学者认同“高技术本质上是数学技术”的观点，计算和建模逐渐成为数学科学向数学技术转化的两座桥梁，正如美国科学、工程和公共事务政策委员会在一份报告中所说“今天，在技术科学中最有用的数学研究领域是数值分析和数学建模”.

国力的竞争是技术的竞争、人才的竞争，由于认识到培养应用型人才的重要性，在 1985 年举办了美国第一届大学生数学建模竞赛(Mathematical Competition in Modeling，1987 年改为 Mathematical Contest in Modeling)，简称 MCM. 1992—1993 年中国工业与应用数学学会(CSIAM)举办了两次中国大学生数学建模竞赛，1994 年起，全国大学生数学建模竞赛由原国家教育委员会高教司和中国工业与应用数学学会共同于每年 9 月举办，1999 年开始设立大专组的竞赛. 从 2006 年开始，教育部高教司每年举办一次全国研究生数学建模竞赛.

本书的作者十几年来一直从事“数学建模”课程的教学和指导数学建模培训及竞赛工作，取得了许多成果. 中国地质大学(武汉)建模指导组于 1997 编写校内教材《数学建模讲义》，2001 年编写校内教材《数学建模入门》，在此基础上，经过修改、完善和充实，编写了《数学建模方法》. 由于本书的不少实例是作者十几年来在“数学建模”教学和有关地质科研中的经验、积累和成果，故本书显现出了与地质专业问题相联系的特色，特别适合以地学专业为主的大专院校选用为数学建模的基本教材，同时，本书也可以作为各类工科大学生和各种数学建模竞赛的培训教材和参考资料.

第二版与第一版相比，增加了“非线性规划模型建模方法”，使得本书的建模方法更加完备. 全书分 12 章，各章内容和问题基本上是独立的，教师、学生或读者可根据各自的需要选用或阅读. 本书的编著分工如下：彭放编写第 1、2、11 和 12 章并负责全书的统稿，杨瑞琰编写第 3 和 4 章，罗文强编写第 5 和 6 章，肖海军编写第 7 和 8 章，何水明编写第 9 和 10 章. 在本书的写作过程中，王伟、古富强、鲁江姑、王树朋、黄许颖、彭玲玲分别在收集资料、文稿录入、打印稿校对中也做了许多工作. 鉴于本书作者学识有限，错误或不妥之处在所难免，敬请专家和读者不吝指正.

本书的第一版曾得到了中国地质大学教务处关心和中国地质大学教材出版资

金的资助. 全国大学生数学建模竞赛湖北赛区专家组组长、原武汉大学数学系主任费浦生教授、中国地质大学数学与物理学院院长刘安平教授和全国大学生数学建模竞赛湖北赛区专家组成员、湖北省教学名师李宏伟教授分别审阅了本书文稿，并提出了不少宝贵的意见. 借第二版出版之机，再次一并对上述单位和个人表示衷心的感谢！

编　者

2011 年 12 月于武汉

目　　录

第 1 章　数学建模概论

1.1　数学与数学模型

数学是研究现实世界数量关系和空间形式的科学.

数和形是数学研究的最基本的对象，自然界无不可以用数和形以及它们的发展和变化形态及规律加以描述的，因此数学是无时不在、无处不在的. 不回顾数学历史的辉煌，仅看当今，现代化的生产手段方便、快捷、高效，无一不包含数学的贡献. 现代化的产品比比皆是、层出不穷，哪一件离得开数学的支撑？“科学技术是生产力”，而数学是生产力发展的基石和源泉. 当今信息时代的一个重要特点是数学的应用向一切领域渗透，高科技与数学的关系日益密切，产生了许多与数学相结合的新学科，如数学化学、数学生物学、数学地质学、数学社会学等. “信息时代高科技的竞争本质上是数学的竞争”，“当今如此受到称颂的‘高科技’本质上是一种数学技术”.

数学的产生和发展一直和数学模型（mathematical model）紧密相连. 那么什么是数学模型呢？常见的模型有儿童玩具、人物塑像、作战沙盘、风洞中的飞机、地质图、地形图等，即模型是为了一定目的，对客观事物的一部分进行简缩、抽象、提炼出来的原型的替代物. 数学模型是为了一个特定目的，根据一个现实对象的内在规律，做出必要的简化假设，运用适当的数学工具，得到的一个数学结构. 三千多年前创立的欧几里得几何就是一个很好的数学模型. 近代牛顿创立的万有引力定律、开普勒三大定律、爱因斯坦的狭义相对论等都是在当今科学技术的很多领域发挥着巨大作用的数学模型. 从科学、工程、经济、管理等角度看，数学模型就是用数学的语言和方法，通过抽象、简化建立的能近似刻画并“解决”实际问题的一个强有力的数学工具.

数学模型具有预测、判别、解释三大作用，其中预测功能是数学模型价值的最重要的体现. 为了说明这三大作用，先来看看以下几个例子.

例 1.1　谷神星的发现.

1764 年，瑞士哲学家波奈特出版了《自然观察》一书，德国人提丢斯在读了该书后，从中总结出一个级数，用于表示太阳与当时已发现的 6 颗行星的距离. 后来波得修改为如下提丢斯-波得定则：

$$R = \frac{1}{10} \times (4 + 3 \times 2^n)$$

当 n 分别取值 $-10,0,1,2,4,5$ 时,从上述公式可以计算出太阳与水星、金星、地球、火星、木星和土星的近似距离分别为 0.400 292 968,0.7,1.0,1.6,5.2,10.0(天文单位). 人们很自然地思考为什么 $n=3$ 时没有行星对应?

1801 年元旦之夜,意大利人皮亚齐用望远镜发现了一颗光线暗弱的新天体.当时许多正在寻找新行星的天文学家们获此消息后异常兴奋,因为从该天体的运行特点分析,它可能是一颗新行星.遗憾的是皮亚齐由于生病,不得不中断了已进行 6 个星期的观察,当他痊愈后却搜遍苍穹也不见这颗星的踪影.为了重新找到这颗星星,德国年轻数学家高斯应用皮亚齐的观察资料、提丢斯-波得定则和基于万有引力定律的轨道计算法,算出了这颗星星的轨道及太阳与它的平均距离,它的轨道在火星与木星之间.1802 年 1 月 1 日夜间,人们根据数学家高斯的计算结果和预言终于又找到了这颗曾经跟丢了的后来被命名为谷神星的星星.

继谷神星发现之后,数学家们应用数学模型又计算预测出了海王星、冥王星的存在和位置,接着天文工作者才在天空中找到它们.

从这个例子可见,数学模型的预测功能就是用数学模型的知识和规律预测未来发展,为人们的行为提供指导.

例 1.2　跑步问题.

如果某人在任何一个 5 min 的时间区间内均跑不完 500 m,试问他能否恰好用 10 min 跑完 1000 m?

有人认为用 5 min 跑慢一点、而用 5 min 跑快一点,因此他可以恰好用 10 min 跑完 1000 m;也有人直观上感到在题目的要求下不可能用 10 min 跑 1000 m.如何判断这两种答案哪个正确呢?可以建立数学模型来解决这一问题.

设 $[0,t]$ 内跑过的距离为 $s(t)$,显然 $s(t)$ 是时间 t 的广义单调增加的连续函数,且 $s(0)=0$,如果假设恰好用 10 min 跑完 1000 m,那么 $s(10)=1000$.构造连续函数

$$f(t)=s(t+5)-s(t)-500$$

易知

$$f(0)=s(5)-500 \qquad f(5)=500-s(5)$$

因此

$$f(0)\cdot f(5)=-(500-s(5))^2\leqslant 0.$$

如果 $f(0)\cdot f(5)=0$,那么 $f(0)=0$ 或 $f(5)=0$,恒有 $s(5)=500$,这与条件“在任何一个 5 min 的时间区间内均跑不完 500 m”矛盾.如果 $f(0)\cdot f(5)<0$,根据连续函数的零点定理,必存在 $t_0\in(0,5)$,使 $f(t_0)=0$,即 $s(t_0+5)-s(t_0)=500$,这表明从时刻 t_0 开始到时刻 t_0+5 为止的 5 min 内跑了 500 m,故仍然与题目中的条件相悖.所以,在题目的要求下不可能用 10 min 跑 1000 m.

从上述例子可知,数学模型的判断功能就是用数学模型来判断原来知识、认识

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

的可靠性.

例 1.3　随机事件的频率稳定性.

在概率论发展的早期,人们发现虽然个别随机事件在某次试验中可以出现也可以不出现,但是在大量重复试验中却呈现出明显的规律性,即某个随机事件出现的频率在某个范围内摆动称之为"频率稳定性". 这是什么原因呢?曾经很长一段时期未得到理论上的解释. 历史上,伯努利(Bernoulli) 第一个研究了这个问题.

他提出了一种"在同样条件下进行重复试验或观察"的数学模型 —— 伯努利概型. 在伯努利试验中,若以 μ_n 记 n 次试验中事件 A 出现的次数,则 $\frac{\mu_n}{n}$ 便是 A 出现的频率,所谓频率稳定性无非是指当 n 增大时,频率 $\frac{\mu_n}{n}$ 接近于某个固定的常数. 这个固定的常数就是事件 A 在一次试验中发生的概率 p. 当时已经知道,μ_n 是随机变量,它服从二项分布

$$P\{\mu_n = k\} = C_n^k p^k q^{n-k} \quad (q = 1 - p, i = 0, 1, \cdots, n)$$

其数学期望 $E(\mu_n) = np$,方差 $D(\mu_n) = npq$. 这在一定程度上帮助伯努利进一步认识了频率 $\frac{\mu_n}{n}$ 的性质,但是他更需要认识的是 n 非常大时 μ_n 或 $\frac{\mu_n}{n}$ 的性质. 显然,当 n 很大时,μ_n 一般也会很大,故研究 μ_n 不太方便,还是直接研究 $\frac{\mu_n}{n}$ 为宜. 因为 $E\left(\frac{\mu_n}{n}\right) = p, D\left(\frac{\mu_n}{n}\right) = \frac{pq}{n}$,所以当 $n \to \infty$ 时,频率的数学期望不变,而方差则趋于 0. 他知道方差为 0 的随机变量一定是常数,于是自然预期频率应该趋于常数 p. 但是频率 $\frac{\mu_n}{n}$ 是随机变量,关于它的极限又将如何提法呢?经过艰苦的努力,伯努利在 1713 年发表的一篇论文中(这是概率论的第一篇论文!) 提出并证明了伯努利大数定律:对任意的 $\varepsilon > 0$,都有

$$\lim_{n \to \infty} P\left\{ \left| \frac{\mu_n}{n} - p \right| < \varepsilon \right\} = 1$$

这是一大类概率论极限定理 —— 大数定律中的第一个. 伯努利概型与伯努利大数定律从理论上完全解释了"频率稳定性"问题.

该例说明了数学模型的解释功能就是用数学模型说明事物发生的原因.

1.2　数学建模

由于人们应用数学解决实际问题主要是通过数学模型来实现的,所以如何建立合理有效的数学模型非常重要,这就是数学建模问题.

下面先举一个简单的数学建模例子——"鸡兔同笼问题". 一户农家的鸡兔同笼,鸡兔的头共有 8 只,鸡兔的腿共有 26 条,问鸡、兔各有多少只?

鸡兔同笼问题建立数学模型的基本步骤为:

(1) 做出假设. 按正常情况考虑,每只鸡长1只头2条腿,每只兔长1只头4条腿.

(2) 用符号表示有关量. 用 x 表示鸡的个数, y 表示兔的个数.

(3) 用初等代数,列出数学式子(二元一次方程)

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ 2x + 4y = 26 \end{cases}$$

(4) 求解得到数学解答 $x = 3, y = 5$.

(5) 回答原问题. 该农家的笼中有 3 只鸡、5 只兔.

一般来说,数学建模是指为了构建数学模型而进行的准备、假设、建立、求解、分析、检验和应用的全过程. 显然,几乎一切科学研究都与数学建模紧密相连的,首先研究和建立模型,然后才在实际系统上实现. 理工科大学生都学过的经典牛顿力学就是最辉煌的一个建模实例.

应用数学方法解决实际问题,不仅需要数学素质,而且需要有关专业知识,因此某领域的专家只有具备了相应的数学素质,或者数学研究者只有基本掌握了该领域的相应专业知识,或者两方面的专家共同努力,才能成功地完成该领域的有关数学建模工作.

数学建模的基本方法有:

(1) 机理分析法. 该方法是从客观实际出发,根据事实推理分析,应用已知数据进行计算和确定模型的参数.

(2) 数值分析法. 选用插值方法、差分方法、样条函数和回归分析等方法对已知数据进行数值拟合.

(3) 构造分析法. 先假设一个合理的数学结构,再用已知数据确定模型的参数,或对模型进行模拟计算.

(4) 现成数学法. 用现成的数学模型,常用的有微分方程、线性规划、概率统计、层次分析、图论、人工神经网络、模糊数学、灰色系统理论等.

(5) 直观分析法. 通过对图形和数据的直观分析,对参数进行估计和计算,并对结果进行模拟.

上述数学建模的基本方法可以大致分为两种:第一种是理论分析法,即根据客观事物本身的性质,分析因果关系,作合理假设,然后用数学结构表示数量特征;第二种是实验归纳法,即先作测试和计算,按照某种数学方法,从所得数据中归纳出系统的数学模型. 用两种方法建立数学模型步骤就有所不同,其中,用理论分析法建立数学模型的主要步骤是:

(1) 准备. 了解实际背景,明确建模目的,搜集有关信息,掌握对象特征.

(2) 假设. 针对问题特点和建模目的做出合理的、简化的假设在合理与简化之间做出折中.

(3) 建模. 用数学的语言、符号描述问题,发挥想像力,使用类比法,尽量采用简单的数学工具.

(4) 求解. 应用各种数学方法、数学软件和计算机技术.

(5) 分析. 例如结果的误差分析、模型对数据的稳定性分析等.

(6) 检验. 与实际现象、数据比较,检验模型的,合理性、适用性.

(7) 应用. 应用数学模型对事物进行预测、判断和解释.

鉴别所建立数学模型好坏的方法就是让它接受实践的检验. 因此,建模常常是一个"检验⟶修改⟶再检验⟶再修改……"的多次反复渐趋完善的过程. 具体可用图 1.1 所示的流程图来描述.

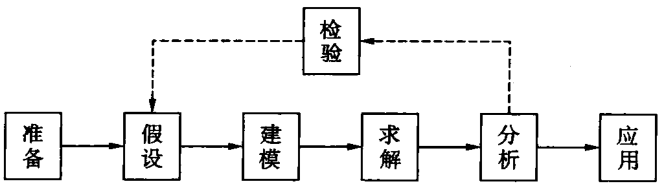

图 1.1

数学建模是一种积极的思维活动,其中有逻辑思维,也有非逻辑思维. 但是,在数学建模中大量被采用的还是抽象、归纳、演绎、类比这几种逻辑思维方法.

例 1.4　哥尼斯堡七桥问题.

18 世纪初,普鲁士哥尼斯堡镇有一条河,河中有两个小岛,人们建了 7 座桥将岛与岸连通,如图 1.2 所示. 哥尼斯堡的居民很感兴趣如下问题:一个人能否从岛上或岸上某点出发恰好经过每座桥一次回到原出发点?

当时七桥问题是著名的难题,1736 年欧拉用数学建模巧妙地把它解决了. 欧拉将两岛和两岸抽象为 4 个点,将 7 座桥抽象为 7 条线,于是得到七桥问题的数学模型,如图 1.3 所示.

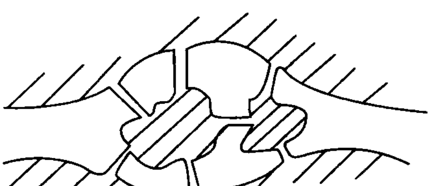

图 1.2

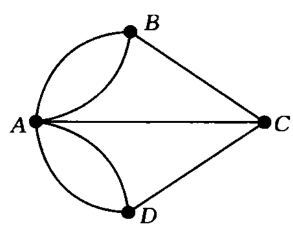

图 1.3

原问题转化为一笔画出图 1.3 的几何问题(必需且只需经过每条边一次). 不难发现,一笔画的图形,有起点、终点和中间交点. 因为起点的连线可以只出不进,终点的连线可以只进不出,所以起点或终点的连线可以为奇数条. 当起点和终点重合时,起点或终点的连线必为偶数条. 中间交点的连线总是一进一出,故必须为偶数条. 但是图 1.3 中 A 点的连线是 5 条,B,C,D 三点的连线都是三条. 因此,不能一笔画出图 1.3,即七桥问题无解.

抽象是从事物的个性中找出共性、是剥去表象抓住本质的逻辑思维方法. 在上面的建模例子中,岛和岸的大小形状、桥的长宽及形状都不是本质性的,欧拉将岛和岸抽象为点,将桥抽象为线,抓住了问题的本质或共性,从而彻底解决了七桥问题.

例 1.5　开普勒第三定律的发现.

1609 年,开普勒(1571 ～ 1630 年)从第谷·布拉赫(1546 ～ 1601 年)的 20 年行星运动观测资料中归纳出开普勒第一、二定律之后,他从当时已发现的六大行星的有关资料中整理成一张表格,见表 1.1.

表 1.1

行星	周期 T	长半轴 a	T^2	a^3	行星	周期 T	长半轴 a	T^2	a^3
水星	0.241	0.387	0.058	0.058	火星	1.881	1.524	3.54	3.54
金星	0.615	0.723	0.378	0.378	木星	11.862	5.203	140.7	140.85
地球	1.000	1.000	1.000	1.000	土星	29.457	9.539	867.7	867.98

开普勒从这张表中合理猜测行星运行周期的平方 T^2 与椭圆轨道的长半轴的立方 a^3 成正比. 这就是后来证明了的开普勒第三定律.

归纳是在观察、经验或实验的基础上,从具体的认识上升为抽象的认识、从特殊认识总结为一般的认识的一种思维方式. 开普勒正是使用不完全归纳法得到了开普勒第三定律.

例 1.6　牛顿是怎样发现万有引力定律的?

牛顿于 1687 年出版了名著《自然哲学的数学原理》,天体力学研究与微积分的基本概念和原理都包含在该书中,可见,牛顿的力学研究与他创立微积分的工作是分不开的. 牛顿为了寻找隐藏在开普勒三定律背后的力学原因,用微积分进行了探讨.

第一步　建立以太阳为原点 O 的极坐标系,极径 $\boldsymbol{r}$ 的终点表示行星的位置,如图1.4 所示.

第二步　将普勒三定律和牛顿第二定律表达为如下的数学形式:

(1) 开普勒第一定律. 各行星分别在不同的椭圆轨道上绕太阳运行,太阳位于这些椭圆的一个焦点上. 轨道方程是

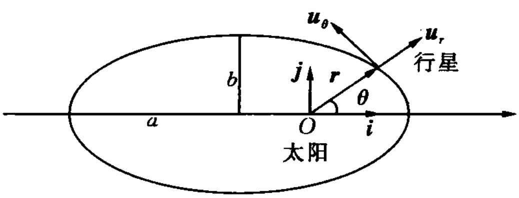

图 1.4

$$r = \frac{p}{1+e\cos\theta} \tag{1.1}$$

式中，a 为长半轴；b 为短半轴；e 为离心率；r 为极径 $\boldsymbol{r}$ 的模；$b^2 = a^2(1-e^2)$；

$$p = \frac{b^2}{a} \tag{1.2}$$

（2）开普勒第二定律. 对一颗行星而言，在单位时间内，太阳-行星极径 $\boldsymbol{r}$ 扫过的面积是常数 A. 即

$$\frac{1}{2}r^2\theta' = A \tag{1.3}$$

式中，θ' 表示极角 θ 对时间 t 的导数.

（3）开普勒第三律. 行星运行周期 T 的平方与其椭圆轨道长半轴 a 的三次方成正比，即

$$T^2 = ka^3 \tag{1.4}$$

式中，k 是绝对常数.

（4）牛顿第二定律. 太阳对某行星的作用力 $\boldsymbol{f}$ 与该行星的加速度 $\boldsymbol{r}''$ 的方向一致，与 $\boldsymbol{r}''$ 的大小成正比，比例系数为该行星的质量 m，即

$$\boldsymbol{f} = m\boldsymbol{r}'' \tag{1.5}$$

第三步　演绎推导：

设极径 $\boldsymbol{r}$ 方向的单位向量为

$$\boldsymbol{u}_r = \cos\theta\boldsymbol{i} + \sin\theta\boldsymbol{j} \tag{1.6}$$

极角 θ 方向的单位向量为

$$\boldsymbol{u}_\theta = -\sin\theta\boldsymbol{i} + \cos\theta\boldsymbol{j} \tag{1.7}$$

则

$$\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{u}_r \tag{1.8}$$

对式(1.6)、式(1.7)关于 t 求导，得

$$\boldsymbol{u}_r' = -\sin\theta\cdot\theta'\boldsymbol{i} + \cos\theta\cdot\theta'\boldsymbol{j} = \theta'\boldsymbol{u}_\theta \tag{1.9}$$

$$\boldsymbol{u}_\theta' = -\cos\theta\cdot\theta'\boldsymbol{i} - \sin\theta\cdot\theta'\boldsymbol{j} = -\theta'\boldsymbol{u}_r \tag{1.10}$$

利用式(1.9)、式(1.10)，对式(1.8)关于 t 求导可得行星运动速度 $\boldsymbol{r}'$ 和加速度 $\boldsymbol{r}''$ 如下：

$$\boldsymbol{r}' = r'\boldsymbol{u}_r + r\theta'\boldsymbol{u}_\theta \tag{1.11}$$

$$\boldsymbol{r}'' = (r'' - r\theta'^2)\boldsymbol{u}_r + (r\theta'' + 2r'\theta')\boldsymbol{u}_\theta \tag{1.12}$$

由式(1.3)可知

$$\theta' = 2A/r^2 \tag{1.13}$$

对式(1.13)关于 t 求导,得

$$\theta'' = -4Ar'/r^3 \tag{1.14}$$

从式(1.13)、式(1.14)又得 $r\theta'' + 2r'\theta' = 0$,故有

$$\boldsymbol{r}'' = (r'' - r\theta'^2)\boldsymbol{u}_r \tag{1.15}$$

根据式(1.1)、式(1.13),有

$$r' = \frac{pe\sin\theta}{(1+e\cos\theta)^2}\theta' = \frac{pe\sin\theta}{(1+e\cos\theta)^2}\frac{2A}{r^2} = \frac{2Ae\sin\theta}{p} \tag{1.16}$$

$$r'' = \frac{2A}{p}e\cos\theta \cdot \theta' = \frac{4A^2}{pr^2}e\cos\theta = \frac{4A^2}{r^3}\left(1 - \frac{r}{p}\right) \tag{1.17}$$

将式(1.13)、式(1.17)代入式(1.15),得

$$\boldsymbol{r}'' = \frac{4A^2}{pr^2}\boldsymbol{u}_r \tag{1.18}$$

因为行星椭圆轨道面积为 πab,太阳-行星极径 $\boldsymbol{r}$ 在单位时间内扫过的面积是常数 A,在一个周期 T 内扫过的面积是 TA,故对任一行星而言,恒有

$$TA = \pi ab \tag{1.19}$$

由式(1.2)、式(1.4)和式(1.19)联立,可得到

$$\frac{A^2}{p} = \frac{\pi^2}{k} \tag{1.20}$$

最后,根据式(1.5)、式(1.18),可得

$$\boldsymbol{f} = -\frac{4\pi^2 m}{kr^2}\boldsymbol{u}_r \tag{1.21}$$

式中,π 和 k 都是绝对常数. 这说明引力的比例系数对“万物”都是一样的常数 $\frac{4\pi^2}{k}$,从而得到了著名的万有引力定律:太阳对行星的作用力的方向是太阳和行星的连线方向,指向太阳,大小与太阳到行星的距离平方成反比,比例系数是绝对常数.

演绎推理是由一般性命题推出特殊命题的推理方法,演绎推理有助于科学的理论化和体系化. 从上例可见,运用演绎推理建立数学模型,对自然科学的发展能够起到十分巨大的作用.

例 7 圈闭油资源量的估计问题.

圈闭油资源量计算公式为

$$Q_o = (100 \times A \times C_o \times H_o \times \Phi \times S_o \times \rho_o)/B_{oi}$$

式中,Q_o 为有油资源量,$\times 10^4$ t; A 为圈闭面积,km^2;C_o 为含油面积充满度,%;H_o

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com