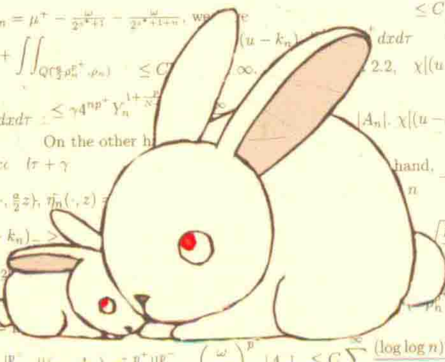
数海拾贝

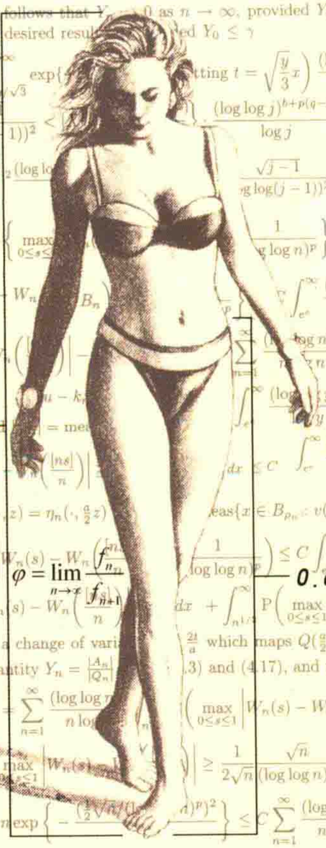
COLLECT THE ESSENCE OF MATHEMATICS

蒋远辉 编著



$$f_{n+2}=f_{n+1}+f_n \quad (n=1,2,\cdots)$$

$$f_1=f_2=1$$



$$\varphi=\lim_{n\to\infty}\frac{f_n}{f_{n+1}} \quad 0.618$$

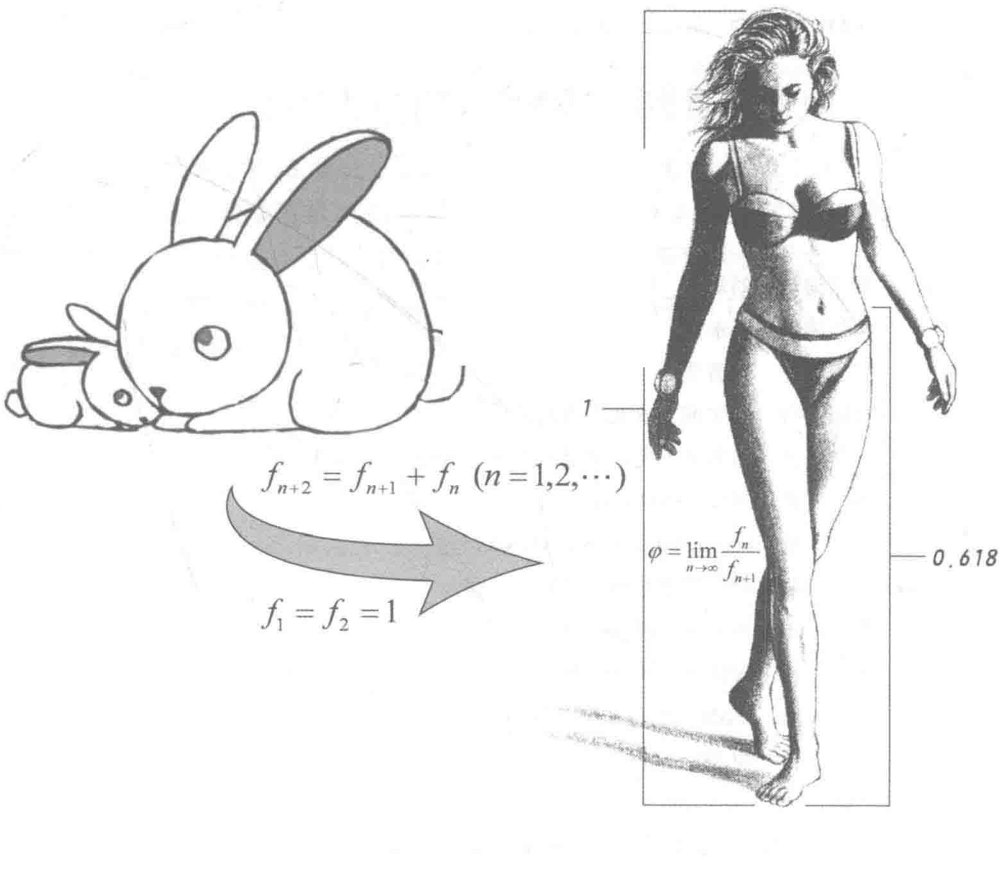
哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

贵州省黔西县政协系列丛书

数海拾贝

COLLECT THE ESSENCE OF MATHEMATICS

● 蒋远辉 编著



哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

斐波那契数列、卢卡斯数列是初等数学中历史久远、性质众多、应用广泛的两个奇异数列. 本书使用大量篇幅系统地整理、介绍了二数列的性质和应用，揭示了三角函数、双曲函数、切比雪夫多项式以及众多数学结论与两个数列的相通性. 内容丰富，妙趣横生.

本书适用于大学、中学师生阅读.

图书在版编目(CIP)数据

数海拾贝/蒋远辉编著. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2016.1

ISBN 978-7-5603-5824-6

Ⅰ.①数… Ⅱ.①蒋… Ⅲ.①数学-研究 Ⅳ.①O1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第003889号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 李 欣
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编150006
传 真 0451-86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开 本 787mm×1092mm 1/16 印张21.5 字数407千字
版 次 2016年1月第1版 2016年1月第1次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-5824-6
定 价 48.00

◎ 作者简介

蒋远辉,男,1957 年 1 月生,贵州省黔西县人. 1982 年 1 月毕业于贵州大学数学系,获理学学士学位.

1982 年至 2003 年先后任黔西师范、黔西一中、黔西二中数学教师,黔西二中教务主任,黔西一中、毕节实验二中(黔西师范)校长. 2003 年至 2014 年任黔西县政协副主席.

勤奋教学、工作之余,作者始终笔耕不辍,先后在《开封大学学报》《数学通讯》《数学通报》《中国初等数学研究》《湖南理工大学学院学报》等书刊和杂志上发表数篇专题初数论文.

1999 年获“毕节地区拔尖人才”称号,贵州省第 11 届人大代表,毕节市第一届政协委员、常委.

◎自序

1977年恢复高考是中国教育的一次涅槃重生，是中国教育发展史上的一个里程碑，它改变了中国教育的命运，改变了中国几代人的命运，这些人是不幸的，同时又是不幸群体中的幸运者. 我有幸参加1977年高考，成为大学校园中的一分子，也曾书生意气，爱上层楼. 一路走来，有理想，思奋斗，释困惑，勤工作. 不经意间已是离职返乡，三十八年过去，欲说还休了.

一挥之间有教书育人、为人师表的喜悦，有教育管理、教学教研的感悟，有参政议政、献言献策的谏举，更多的是对初等数学始终不渝的挚爱和持之以恒的追求，伴随着难以言表的初数享受.

江城子

拾贝有感

数海奇缘遇宝藏，
偕璞归，为伊狂.
勤雕苦琢，
何处诉衷肠？
昼思夜想心力瘁.
一厢情，痴心郎.
穷心尽智恨无方，
重奋起，再赴汤.
韶华苦短，
惟有追梦长.
衣带窄宽均不悔，
酬勤夜，放华光.

相见欢

寻梦

漏断更深人静，
遇空灵.
茗浓烟香犹伴纸笔声.
惑未解，酒微醒，天已明.
健脑益智一副好心情.

两首小词倾诉了笔者数十年来对初数研究的一厢痴情和执著追求，倾诉了向往大海而无力驭风搏浪，涉近海浅滩偶拾珠贝的喜悦之情，虽步履艰难而不怨不悔，十年磨剑，终圆其梦.

本书共分十章，分别搜录了笔者在平面几何、幻方、绝对伪素数、等差数列、三角函数、斐波那契数列、切比雪夫多项式等方面发表和未发表的众多结论.

承政协领导关心，同志同事相助，家人亲友支持，《数海拾贝》得以付梓，其情难以言述，以书谢之.

蒋远辉
2016 年元月于黔西

◎

目录

平面几何

第1章

§1.1 一组平面几何基本定理的演变

三角形及圆的性质是平面几何的主要内容之一，众多深刻而精彩的结论以其完美的结构构建了一个丰富而严谨的系统，但是，定理之间的内在关联在现行教材和有关文献中却讨论甚少. 本章从一个基本定理出发，导出平行线分线段成比例定理、勾股定理、正(余)弦定理、射影定理、圆幂定理、托勒密定理的新证明，重新推导了三角形内、外角平分线(弦)公式、海伦公式，最后给出了斯泰勒－莱梅斯定理的一个新证和塞瓦定理的一般性推广.

定理1 $\triangle ABC$ 内接于圆，M,N 分别是 AB,AC 上异于 A 的点，$AD /\!/ MN$ 交圆于 D，则

$$MA \cdot BC = MN \cdot CD$$

证 如图1，联结 BD,CD 则

$$\angle BDC = \angle BAC$$

因为 $MN /\!/ AD$，所以

$$\angle CBD = \angle CAD = \angle ANM$$

$$\triangle ANM \backsim \triangle DBC$$

$$MA \cdot BC = MN \cdot CD$$

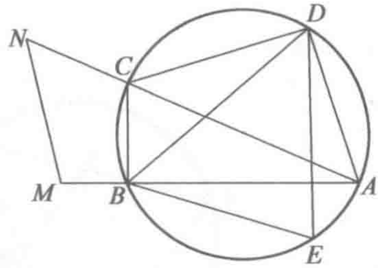


图1

同理可证图2、图3的情形.

作 $DE /\!/ BC$ 交圆于 E，则 $BE = CD$，即

$$MA \cdot BC = MN \cdot BE$$

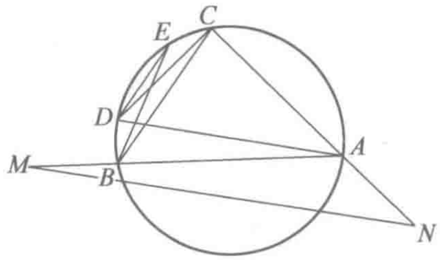


图2

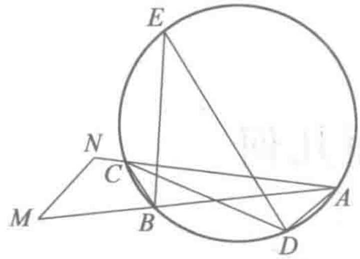


图3

定理说明：当线段 MA 绕点 M 逆(顺)时针在 AC 上旋转角 α 至 MN，线段 BC 绕点 B 顺(逆)时针在圆上旋转角 α 至 BE，则 $MN \cdot BE$ 是一个不变量 $MA \cdot BC$.

推论 1　当 $MN \perp AC$ 时，$AD \perp AC$，$BE = CD = 2R$ 则

$$MA \cdot BC = 2Rh$$

(R 为圆半径，h 为点 M 到 AC 的距离).

当 M 与 B 重合时，$BA \cdot BC = 2Rh$(图 5).

推论 2　平行线分线段成比例定理的推广.

证　如图 4，设 $MN /\!/ BC$，则 $\angle AMN = \angle ABC$. 根据定理有

$$MA \cdot BC = MN \cdot BA$$

即

$$\frac{MA}{BA} = \frac{MN}{BC}$$

推论 3　正弦定理.

证　如图 5，知

$$BA \cdot BC = 2R \cdot BD$$

$$BA \cdot BC \cdot \sin C = 2R \cdot BD \cdot \sin C$$

$$BA \cdot BD = 2R \cdot BD \cdot \sin C$$

故

$$\frac{c}{2R} = \sin C$$

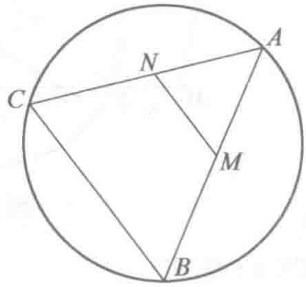


图4

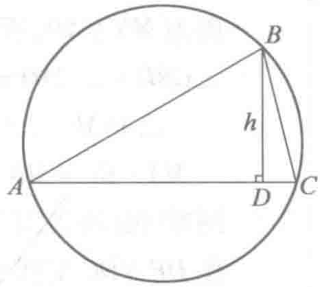


图5

推论 4 圆内接梯形定理.

设 $ABCD$ 是圆内接梯形(或矩形),$AB /\!/ CD$,如图 6 根据推论 1,若 $M \in \overparen{AD}$ 或 $M \in \overparen{BC}$,则

$$MA \cdot MB + MC \cdot MD = 2Rh$$

若 $N \in \overparen{AB}$或 $N \in \overparen{CD}$,则

$$NC \cdot ND - NA \cdot NB = 2Rh$$

或

$$NA \cdot NB - NC \cdot ND = 2Rh$$

(其中 h 为梯形的高).

推论 5 勾股定理的推广.

证 如图 7,作 $BD \perp OA$,$CE \perp OA$,O 是圆心,根据推论 4 知

$$AB^2 - AC^2 = AB \cdot AD - AE \cdot AC = BC \cdot CD$$

$$AB^2 = AC^2 + BC \cdot CD$$

当 AB 是直径时,$BC = CD$,则

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

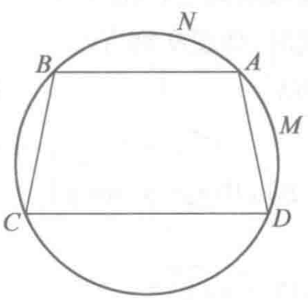


图6

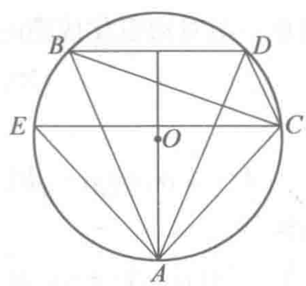


图7

推论 6 余弦定理.

证 如图 8,不妨设 $b \geqslant a$,$c \geqslant a$,令

$$CD = CE = CB$$

$$\angle AEC = 180^\circ - \angle BEC = 180^\circ - \angle B = 180^\circ - \angle ADC$$

又因

$$\angle CDE = \angle CED$$

所以

$$\angle ADE = \angle AED,\ AD = AE$$

根据推论 5 知

$$\begin{aligned} AC^2 &= BC^2 + AB \cdot AD \\ &= BC^2 + AE \cdot AB \\ &= BC^2 + (AB - BE) \cdot AB \end{aligned}$$

$$=BC^2+AB^2-EB\cdot AB$$

$$=BC^2+AB^2-2BC\cdot AB\cdot\cos B$$

其余情况可仿此证明.

推论 7 设 $A_iB_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是圆的 n 条弦(或切线),$\{C_i\}$ 是 $\{B_i\}(i=1,2,\cdots,n)$ 的一个更序列,记 $H(A,B)$ 为圆上一点 M 到 AB 的距离,则

$$H(A_1,B_1)\cdot H(A_2,B_2)\cdot\cdots\cdot H(A_n,B_n)=H(A_1,C_1)\cdot H(A_2,C_2)\cdot\cdots\cdot H(A_n,B_n)$$

证 根据推论 1,有

$$MA_i\cdot MB_i=2R\cdot H(A_i,B_i)\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

故

$$\begin{aligned}&H(A_1,B_1)\cdot H(A_2,B_2)\cdot\cdots\cdot H(A_n,B_n)\\=&\left(\frac{1}{2R}\right)^n\cdot(MA_1\cdot MB_1)\cdot(MA_2\cdot MB_2)\cdot\cdots\cdot(MA_n\cdot MB_n)\\=&H(A_1,C_1)\cdot H(A_2,C_2)\cdot\cdots\cdot H(A_n,C_n)\end{aligned}$$

当 $n=2$ 时,我们有结论:圆上任意一点到圆内接四边形一组对边的距离之积与它到另一组对边距离之积和到两边对角线距离之积相等.

当四边形一组对边退化成圆的两条切线时,如图 9 则有

$$MC\cdot MD=MN^2$$

不妨设

$$A(\cos\alpha,\sin\alpha),B(\cos\beta,\sin\beta),M(\cos\gamma,\sin\gamma)$$

则易得三角恒等式

$$\begin{aligned}&[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\beta-\gamma)+\sin(\gamma-\alpha)]^2=\\&2[1-\cos(\alpha-\beta)][1-\cos(\beta-\gamma)][1-\cos(\gamma-\alpha)]\end{aligned}$$

结论极其对称而优美.

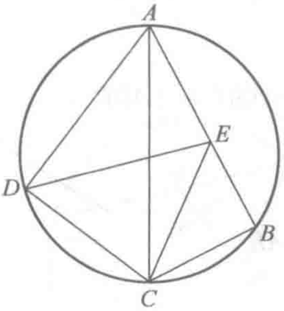


图8

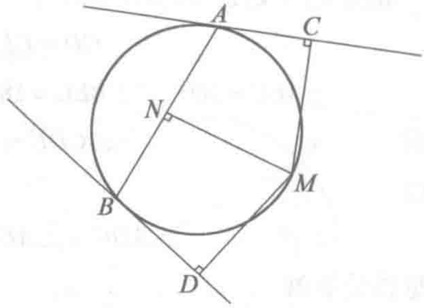


图9

推论 8 射影定理的推广.

设 $ABCD$ 是圆内接梯形(或矩形),直径 MK 垂直于底交 AD 于 E,交 BC 于

F,$MG\perp AB$ 于 G,$MH\perp CD$ 于 H,则 $MG^2=ME\cdot MF$.

证 如图 10,根据推论 7 有

$$MG^2=MG\cdot MH=H(A,B)\cdot H(C,D)=H(A,D)\cdot H(B,C)=ME\cdot MF$$

当 A,E 重合,B,G 重合时,得直角三角形射影定理.

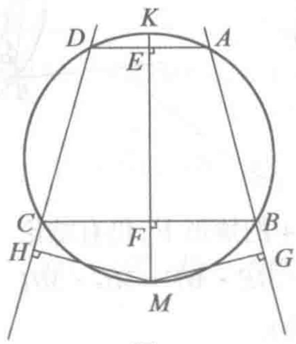


图10

推论 9 托勒密定理的推广.

如图 11,设 $ABCD$ 是圆内接四边形,作 $CE/\!/AB$,$CF/\!/AD$,则

$$AE=BC,AF=CD,BE=AC$$

$$\overset{\frown}{EF}=\overset{\frown}{EA}+\overset{\frown}{AF}=\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{BD}$$

所以

$$ED/\!/FB$$

根据推论 4 知

$$AE\cdot AD+AF\cdot AB=BE\cdot BD$$

即

$$BC\cdot AD+CD\cdot AB=AC\cdot BD \tag{1}$$

$$CE\cdot CD+CF\cdot CB=AC\cdot BD \tag{2}$$

式(1)即圆内接四边形两对角线之积等于两组对边之积之和(托勒密定理);

式(2)即圆内接四边形两对角线之积等于两邻边与对边平行弦之积之和.

推论 10 圆幂定理的推广.

根据定理,如图 12 知

$$ME\cdot CI=MA\cdot BC=2Rh=MC\cdot AD=MG\cdot AK \quad (h\text{ 为 }M\text{ 到 }AC\text{ 的距离})$$

所以

$$ME\cdot CI=MG\cdot AK$$

同理

$$MF\cdot AK=MH\cdot CI$$

两式相乘,得

$$ME\cdot MF=MG\cdot MH$$

当 $\alpha=0$ 时,得相交弦定理. 故以上结论是相交弦定理的推广.

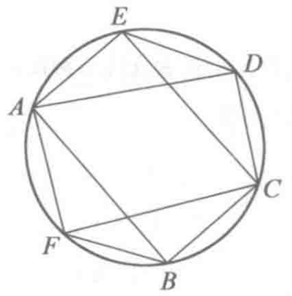


图11

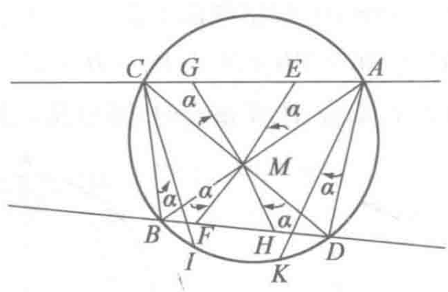


图12

同理可证,在图 13、图 14 的情形下,仍有结论

$$ME \cdot MF = MG \cdot MH$$

(注:图 14 中 MA 是圆的切线).

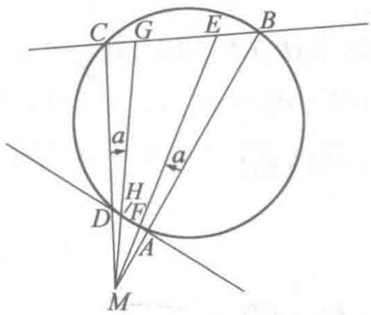


图13

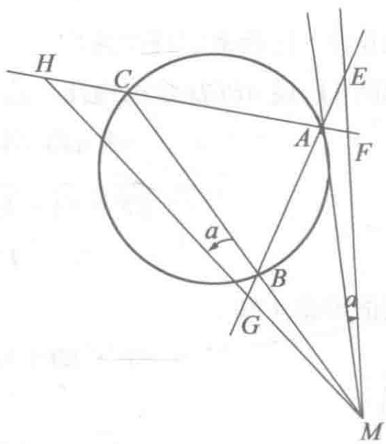


图14

推论 11 内角平分线公式.

如图 15,设 $\triangle ABC$ 内接于圆,AE 平分 $\angle BAC$ 交圆于 D. 根据定理

$$bc = AC \cdot AB = AE^2 + AE \cdot ED = AE^2 + BE \cdot EC$$

根据内角平分线定理

$$BE = \frac{ac}{b+c}, EC = \frac{ab}{b+c}$$

$$AE^2 = bc - \frac{a^2 bc}{(b+c)^2} = \frac{bc}{(b+c)^2}[(b+c)^2 - a^2] = \frac{4bc}{(b+c)^2} p(p-a)$$

所以 $$AE = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)} \quad \left(p = \frac{1}{2}(a+b+c)\right)$$

称 AD 为 $\triangle ABC$ 的内角平分弦.

因为 $AE \cdot AD = bc$,那么 $AD = \frac{bc}{AE} = \frac{\sqrt{bc}(b+c)}{2\sqrt{p(p-a)}}$ 即

$$AD = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{bc}(b+c)}{\sqrt{p(p-a)}}$$

推论 12　外角平分线公式.

设$\triangle ABC$ 内接于圆,不妨设 $c>b$,AD 是 $\angle A$ 的外角平分线,如图 16 根据定理

$$AC \cdot AB = AD \cdot AE$$

根据割线定理有

$$DA \cdot DE = DC \cdot DB$$

由外角平分线定理知

$$BD = \frac{ac}{c-b}, CD = \frac{ab}{c-b}$$

$$bc = AC \cdot AB = AD \cdot AE = AD \cdot (DE - AD) = AD \cdot DE - AD^2 = DC \cdot DB - AD^2$$

$$AD^2 = DC \cdot DB - bc = \frac{ab}{c-b} \cdot \frac{ac}{c-b} - bc = \frac{a^2bc}{(c-b)^2} - bc = \frac{4bc(p-b)(p-c)}{(c-b)^2}$$

所以

$$AD = \frac{2}{c-b}\sqrt{bc(p-b)(p-c)}$$

一般地,若 $b \neq c$,则 $\angle A$ 的外角平分线

$$AD = \frac{2}{|c-b|}\sqrt{bc(p-b)(p-c)}$$

若 $b=c$,则 $\angle A$ 的外角平分线不存在.

称 AE 为$\triangle ABC$ 的外角平分弦,同样由 $bc = AD \cdot AE$ 知

$$AE = \frac{\sqrt{bc}\,|c-b|}{2\sqrt{(p-b)(p-c)}}$$

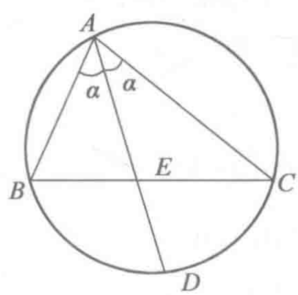


图15

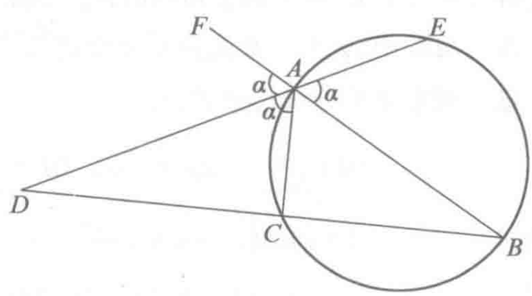


图16

推论 13　海伦公式.

如图 17,若$\triangle ABC$是等腰三角形,$b=c$,则海伦公式显然成立,不妨设$c>b$.

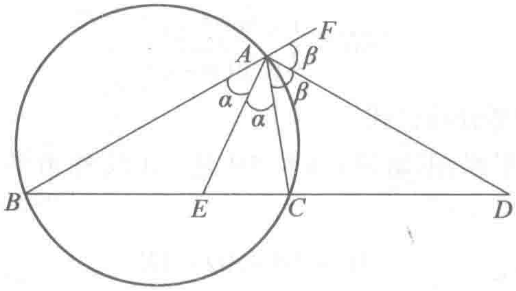


图17

AE,AD分别是$\angle A$的内、外角平分线,则

$$ED=EC+CD=\frac{ab}{c+b}+\frac{ab}{c-b}=\frac{2abc}{c^2-b^2}$$

$$\frac{BC}{ED}=\frac{c^2-b^2}{2bc}$$

因为$AE\perp AD$,所以

$$S_{\triangle ADE}=\frac{1}{2}AE\cdot AD=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{c+b}\sqrt{bcp(p-a)}\cdot\frac{2}{c+b}\sqrt{bc(p-b)(p-c)}$$

$$=\frac{2bc}{c^2-b^2}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$S_{\triangle ABC}=\frac{BC}{ED}\cdot S_{\triangle ADE}=\frac{2bc}{c^2-b^2}\cdot\frac{c^2-b^2}{2bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\quad (\text{其中 } p=\frac{1}{2}(a+b+c))$$

“有两条内角平分线相等的三角形是等腰三角形”是著名的斯泰勒－莱默斯定理 ,百余年来,众多构思精巧的证法层出不穷. 以下给出一种证法.

在$\triangle ABC$中,$\angle A$,$\angle B$的角平分线相等[1],则$AC=BC$.

证　根据角平分线长公式,有

$$AE=\frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)},BF=\frac{2}{a+c}\sqrt{acp(p-b)}$$

化简得
$$(b-a)(c^3+a^2b+ab^2+ac^2+bc^2+3abc)=0$$

因为
$$c^3+a^2b+ab^2+ac^2+bc^2+3abc\neq 0$$

所以
$$b=a$$

即$AC=BC$,$\triangle ABC$是等腰三角形.