解题方法与技巧丛书

高中数学解题方法与技巧

GAO ZHONG SHU XUE JIE TI FANG FA YU JI QIAO

乔家瑞　陈神兴
花煜宽　仇文仲
编著

首都师范大学出版

高中数学解题方法与技巧

乔家瑞　陈神兴
花煜宽　仇文仲　编著

首都师范大学出版社

（京）新208号

图书在版编目(CIP)数据

高中数学解题方法与技巧／乔家瑞等编. -北京：首都师范大学出版社，1994 7

（解题方法与技巧丛书）

ISBN 7-81039-294-8

Ⅰ.高… Ⅱ.乔… Ⅲ.数学-问题解答-高中 Ⅳ.G634.6

中国版本图书馆CIP数据核字（94）第01184号

首都师范大学出版社

（北京西三环北路105号　　邮政编码100037）

昌平马池口印刷厂印刷　　全国新华书店经销

1994年7月第1版　　1994年7月第1次印刷

开本　787×1092　1/32　　印张　15.25

字数　335 千字　　印数　0,001—15,000 册

定　价：9.00 元

出版前言

我们组织编写《高中解题方法与技巧》丛书的目的是为青年教师及高中学生服务；希望本丛书能帮助他们尽快掌握一套行之有效的解题方法与技巧，冲出题海，提高学习效率，提高能力素质。本丛书各册均从命题研究出发，核心是系统的、可操作的解题基本方法和解题技巧。

命题是解题的前题，是组织训练、实施考试的首要条件和必要条件；高考命题则对教育改革起着指挥棒的作用。做为高中学生，有必要也有能力了解命题的意义、作用、原则、方法；这将使高中学生站在一个新的高度主动地学习，将有利于学生走出题海的困扰，有利于学生提高整体的能力素质。对于青年教师，命题是教学基本功之一，是深化教育改革、提高教学质量的重要手段，是教师教学水平的体现。

解题是教与学过程中的重要环节，是学生从掌握基础知识向提高能力素质迁移的一种重要手段，是教师了解学生学习情况及教学效果的一个重要手段，对于国家则是发现人才、选拔人才的较为客观的手段。

解题是学习的难点。解题时涉及知不知的问题、会不会的问题，更重要的是能不能的问题。解题是知识多寡的较量，更重要的是能力强弱的较量和素质高低的较量。解题不在多寡，在“多思”，在举一反三，在能力素质的水平。解题首先要掌握“基本方法”，要明题意、会解题、能解对；

进一步要掌握“巧”、“活”、“快”、“准”的解题技巧。

解题部分是教学经验丰富的老教师的宝贵经验的总结。他们为解题，解决问题，理出一个基本脉络，可以缩短青年学生及青年教师摸索解题方法与技巧的过程。解题的基本方法是有的，但窍门各不相同．“巧”是知识融汇贯通、能力充分发挥的智慧之光。因此，我们希望读者能“多思”，总结出更好的经验，让这些经验在更多人的脑海里开花结果，为提高国人的智能作出贡献。

编　　者

目录

第一章　数学题

在中学学习期间，每个学生都解答过成千上万个数学题。结果有些学生只掌握了解题的一般本领，而许多学生一遇到形式不熟或少见的题目，就束手无策，不知如何去解答。造成这种分化状况的原因是什么呢？原因当然很多。其中的一个原因是，一部分学生注意解题过程，努力弄懂解题的一般规律和方法；而另一部分学生，不考虑这些，只极力设法如何快点解出给定的习题。由此可见，高中学生和自学青年，为了提高解题能力和数学水平，非常有必要结合解题实践，学习解题理论，掌握解题方法与技巧。

解数学题是数学教师的基本功。但是，目前在高等师范院校的课程中，在教师的岗位培训中，却缺乏对这种基本功的系统训练，教师只能从零散的解题实践中，逐渐地积累和总结一点经验，一旦在教学中需要对学生进行指导时，就感到自身理论上的不足。许多数学教师都深有体会，结合教学实践研究解题教学理论，是提高数学教师的理论水平和教学效果的迫切需要。

学习和研究解题理论，应该从哪儿开始呢？我们认为，应该从学习和研究关于数学题的基本理论开始。让我们先在这第一章里，弄清数学题的结构和类型，功能和地位等，关于数学题的基本理论知识，掌握分析数学命题，分析数学题目以及编制数学题目的基本方法。

第一节　数学命题的结构

本书开篇第一个问题，为什么就安排“数学命题的结构”呢？因为我们从下述两个事实看到了数学命题的重要性和研究数学命题结构的必要性。第一，数学中的定义、公理、定理、法则、公式等等，都是用命题的形式给出的，(详见本节第1个要点)。学习数学时时处处都在与数学命题打交道。第二，解数学题实际上就是，用数学理论及逻辑手段证明一个数学命题的正确性，或者寻找一个不完整的数学命题的未知部分(详见第二节第2个要点)；数学题目的解答过程，其实质就是一系列命题的转化过程(详见第二章第一节第1个要点)。

1．什么叫数学命题

对某对象具有某种性质进行肯定或否定的思维方式，叫做判断；表述判断的语句叫做命题；其内容与数学理论有关的命题叫做数学命题。正确的(即成立的)命题叫真命题；错误的(即不成立的)命题叫假命题。

判定下列语句，是不是数学命题？如果是，是真命题，还是假命题？

(1)点$Q(-1,2)$是点$P(1,2)$关于x轴的对称点；

(2)函数$y=3^x$不是函数$y=\lg x$的反函数；

(3)在指数中含有未知数的方程叫指数方程；

(4)如果一条直线上有两点在一个平面内，那么这条直线上所有的点都在这个平面内；

(5)垂直于同一平面的两条直线平行；

(6) $\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N\,(a>0, a\neq 1,\ M>0, N>0)$；

(7) $a^2+b^2\geqslant 2ab(a,b\in R)$；

(8)垂直于同一平面的两条直线必平行吗？

(9)求证：$a^2+b^2\geqslant 2ab(a,b\in R)$.

运用前述定义进行判别，得知语句(1)至(7)，都是数学命题，其中(1)是假命题，(2)至(7)都是真命题.(8)和(9)分别是疑问句和祈使句，都不是对对象性质进行肯定或否定的判断，因而都不是命题。

从命题(3)至(7)可以看到，数学中的定义、公理、法则和公式，都是用数学命题的形式给出的。为了深刻理解数学基础知识和解题基本理论，有必要学习和研究数学命题的结构。

含有未知数的判断，例如 $x^2+5x-6=0$，当未知数 x 在它的取值范围内取不同值时，有时是正确的判断，有时则是错误的判断。表述这种判断的语句，有些书上说不是命题，有些书上说是命题。我们采用与中学课本一致的观点，把这种判断也称为命题。例如，方程 $x^2+y^2=9$，不等式 $\log_2 x>1$ 都是数学命题。但应注意：代数式，如 x^2+y^2，是只有主语的不完整的句子，不表示判断，不是命题。

2. 命题的模式和要素

分析前述 7 个命题的结构，可知命题的基本模式是：

$$A\text{是}B.$$

命题“A是B”包含两个要素：A 表示我们思考的“对象”，

B表示对象的“特征”。

例如，命题(1)的对象是：点$Q(-1,2)$，特征是：是点$P(1,2)$关于x轴的对称点。命题(1)的等价命题是(1')：两点$Q(-1,2)$与$P(1,2)$关于x轴对称，命题(1')的对象是：两点$Q(-1,2)$与$P(1,2)$，特征是：关于x轴对称。

命题(4)的对象是：有两个点在一个平面内的一条直线，特征是：这直线上所有的点都在这个平面内。

命题(5)的对象是：垂直于同一平面的两条直线，特征是：平行。

命题(7)的对象是：a^2+b^2，特征是：大于或等于$2ab$，即不小于$2ab$。

在这里，我们看到，每个命题都有两个要素：对象与特征。命题的对象可能是一个，也可能是多个(两个或更多个)。如果对象为一个，对象的特征就表现为这个对象的某种性质；如果对象为多个，对象的特征就表现为这些对象的某种关系。

3．命题的复合与分解

在这里，将介绍一点数理逻辑的基本知识，这是高中课本里没有的。但是，第一，这些知识对于深刻理解数学基础理论，对于提高解题能力，都是非常有益的。第二，这些知识都是绝大多数高中学生能够理解和掌握的。

在讨论集合运算时，我们常遇到下列命题。

(1)$A\cap B=\{x\mid x\in A\quad 且x\in B\}$；

(2)$A\cup B=\{x\mid x\in A\quad 或x\in B\}$；

(3)$\bar{A}=\{x\mid x\notin A\quad 且x\in I\}=\{x\mid 非x\in A\}$；

(4) $A\subseteq B\Leftrightarrow$(若$x\in A$，则$x\in B$)$\Leftrightarrow(x\in A\Rightarrow x\in B)$；

(5) $A=B\Leftrightarrow$($x\in A$当且仅当$x\in B$)$\Leftrightarrow(x\in A\Leftrightarrow x\in B)\Leftrightarrow(x\in A\Rightarrow x\in B)$且$(x\in B\Rightarrow x\in A)$。

在这里我们看到了：

命题(1)："$x\in A$且$x\in B$"，是用"且"联结两命题"$x\in A$"与"$x\in B$"而得到的新命题，是表示"两个命题$x\in A$与$x\in B$都成立"的新命题。

命题(2)："$x\in A$或$x\in B$"，是用"或"联结两个命题"$x\in A$"与"$x\in B$"而得到的新命题，是表示"两个命题$x\in A$与$x\in B$至少有一个成立"的新命题。

命题(3)："非$x\in A$"，即$x\notin A$，是用"非"联结命题"$x\in A$"而得到的新命题，是表示"命题$x\in A$不成立"的新命题。

命题(4)：若$x\in A$，则$x\in B$是用"若…，则…"联结两命题"$x\in A$"与"$x\in B$"而得到的新命题，是表示"若命题$x\in A$成立，则命题$x\in B$必成立"的新命题。

命题(5)："$x\in A$当且仅当$x\in B$"是用"当且仅当"联结两命题"$x\in A$"与"$x\in B$"所得的新命题，是表示"两命题$x\in A$与$x\in B$可以互推"的新命题。

命题(6)："$(x\in A\Rightarrow x\in B)$且$(x\in B\Rightarrow x\in A)$"，是用"且"联结两个蕴涵式命题"$x\in A\Rightarrow x\in B$"与"$x\in B\Rightarrow x\in A$"所得的新命题，是表示两命题"$x\in A\Rightarrow x\in B$"与"$x\in B\Rightarrow x\in A$"都成立的新命题。

这里的联词"且"、"或"、"非"、"若…，则…"，"当且仅当"等，叫做逻辑联词。

从这里我们可以看到，要想理解复合命题，可以对命题

进行“分解”。为了掌握这种“分解”命题的方法，我们先来学习和研究怎样把几个简单命题“复合”成一个复合命题。

在代数中，常用 a,b,c 等字母表示数；在数理逻辑中，常用 p,q,r 等字母表示命题。

(1)合取

由两个命题“$x+y=10$”与“$x-y=6$”用逻辑联词“且”联结起来，可得新命题“$x+y=10$ 且 $x-y=6$”，就是方程组

$$\begin{cases}x+y=10,\\x-y=6.\end{cases}$$

一般地，用联词“且”联结两个命题 p 与 q 而得到的新命题“p 且 q”，叫做 p 与 q 的合取，记作 $p\wedge q$（读作 p 且 q），p 与 q 都叫 $p\wedge q$ 的合取项。

两命题 p 与 q 的合取 $p\wedge q$，是表示“两个命题 p 与 q 都成立”的新命题；它的对象是两个命题 p 与 q，特征是“都成立”。例如 $(x^2-10<0)\wedge(x^2-1\geqslant 0)$ 就是不等式组

$$\begin{cases}x^2-10<0,\\x^2-1\geqslant 0.\end{cases}$$

为了准确记忆和理解这里的内容，请读者把逻辑运算符号“$\wedge$”以及后面要讲的“$\vee$”及“—”，与集合运算符号“$\cap$”，“$\cup$”，“—”进行对比联想。

(2)析取

把两命题“$x+y=10$”与“$x-y=0$”，用联词“或”联结得到新命题“$x+y=10$ 或 $x-y=0$”，就是方程

$$(x+y-10)(x-y-6)=0.$$

一般地，用联词“或”把两命题p与q联结而得到新命题“p或q”，叫做p与q的析取，记作$p\vee q$(读作p或q)，其中p与q都叫做$p\vee q$的析取项。

两命题p与q的析取$p\vee q$，是表示“两命题p与q至少有一个成立”的新命题，它的对象是“p与q”，特征是“至少有一个成立”。例如，“$(2\sin x+1=0)\vee(5\sin x-3=0)$”，就是“$2\sin x+1=0$或$5\sin x-3=0$”，即$(2\sin x+1)(5\sin x-3)=0$。又如，$2\leqslant 3$就是“$2<3$或$2=3$”，可记作“$(2<3)\vee(2=3)$”。因为$2<3$成立（虽然$2=3$不成立），所以“$2\leqslant 3$”是真命题。

(3)否定

在命题“$x+3=5$”前面加联词“非”得到新命题“非$x+3=5$”，即$x+3\neq 5$。

一般地，在命题p前面添加联词“非”得到新命题“非p”，叫做p的否定，记做$\bar{p}$（读作非p），$\bar{p}$中的p叫$\bar{p}$的否定项。

命题p的否定$\bar{p}$，是表示“命题p不成立”的新命题，它的对象是“命题p”，特征是“不成立”，命题$x\in A$的否定$\overline{x\in A}$，就是“非$x\in A$”，即$x\notin A$。又如，命题$x\neq 3$的否定$\overline{x\neq 3}$，就是“非$x\neq 3$”，即$x=3$。

由此可知，求简单命题的否定，只要在命题前加“非”字，或者把“是”改为“不是”，或者把“不是”改为“是”。

如何求合取命题与析取命题的否定？这需要正确运用德·摩根律：

$$\overline{q\wedge r}\equiv\bar{q}\vee\bar{r} \tag{1}$$

与

$$\overline{q\vee r}\equiv\bar{q}\wedge\bar{r} \tag{2}$$

其中符号"$\equiv$"，读作"恒等价于"，是指它两边的两个命题恒等价。为了准确理解和记忆上述两公式，请读者把它们与集合论中的公式：

$$\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$$

及

$$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$$

对比联想。

例 1 求命题"$a=0$ 且 $b=0$"的否定。

解： $\because\quad \overline{(a=0)\wedge(b=0)}\equiv\overline{a=0}\vee\overline{b=0}$

$$\equiv(a\neq 0)\vee(b\neq 0)$$

$\therefore$ 命题"$a=0$且$b=0$"的否定是"$a\neq 0$或$b\neq 0$"。

例 2 求命题 $x=y=z=5$ 的否定

解：

$$\overline{x=y=z=5}\equiv\overline{(x=5)\wedge(y=5)\wedge(z=5)}$$

$$\equiv\overline{(x=5)}\vee\overline{(y=5)}\vee\overline{(z=5)}$$

$$=(x\neq 5)\vee(y\neq 5)\vee(z\neq 5)$$

所以，$x=y=z=5$的否定就是：x,y,z至少有一个不等于5。

例 3 求命题$(x-3)(x-4)=0$的否定。

解： 所求的否定命题是

$$(x-3)(x-4)\neq 0\equiv\overline{(x-3)(x-4)=0}$$

$$\equiv\overline{(x-3=0)\vee(x-4=0)}$$

$$\equiv\overline{x-3=0}\wedge\overline{x-4=0}$$

$$\equiv(x-3\neq 0)\wedge(x-4\neq 0)$$

$$\equiv(x\neq 3)\wedge(x\neq 4),$$

就是：$x\neq 3$且 $x\neq 4$。

(4)蕴涵式

把两个命题"n是自然数"与"$\frac{1}{n}$是分数"用联词

"若…，则…"联结起来，可得新命题"若 n 是自然数，则 $\frac{1}{n}$ 是分数."

一般地，用联词"若…，则…"把两个命题 p 与 q 联结而得到的新命题"若 p，则 q"，叫做从 p 到 q 的蕴涵式，记作 $p\Rightarrow q$（读作 p 蕴涵 q，也读作 p 推出 q），p 与 q 分别叫做 $p\Rightarrow q$ 的原因项与结果项。也常分别称为 $p\Rightarrow q$ 的条件与结论.

从 p 到 q 的蕴涵"$p\Rightarrow q$"，是表示"若 p 成立，则 q 必成立"的新命题；它的对象是"p 与 q"，特征是"若 p 成立，则 q 必成立."如果 p 的模式是"A 是 B"，q 的模式是"C 是 D"，那么我们也可以说"$p\Rightarrow q$"的对象是 C，"$p\Rightarrow q$"的特征是：在"A 是 B"成立的条件下，"C 是 D"成立

（5）逆蕴涵

用联词"推出于"把两个命题 p 与 q 联结而得到的新命题"p 推出于 q"，叫做从 p 到 q 的逆蕴涵，记作 $p\Leftarrow q$（读作 p 推出于 q，也读作 p 逆蕴涵 q），p 与 q 分别叫做 $p\Leftarrow q$ 的结果项与原因项，也分别称为 $p\Leftarrow q$ 的结论和条件.

从 p 到 q 的逆蕴涵"$p\Leftarrow q$"，是表示"要 p 成立，只需 q 成立"，即表示"若 q 成立，则 p 必成立"的新命题；它的对象是"p 与 q"，特征是"要 p 成立，只需 q 成立"。所以，两命题"$p\Leftarrow q$"与"$q\Rightarrow p$"或同为真命题，或同为假命题. 例如"$x^2-y^2=0\Leftarrow x-y=0$"与"$x-y=0\Rightarrow x^2-y^2=0$"同为真命题，"$x-y=0\Leftarrow x^2-y^2=0$"与"$x^2-y^2=0\Rightarrow x-y=0$"同为假命题.

(6)等价式

用联词“等价于”把两个命题 p 与 q 联结而得到的新命题“p 等价于 q”，叫做 p 与 q 的等价式，记作 $p\Leftrightarrow q$(读作 p 等价于 q)，p 与 q 分别叫做 $p\Leftrightarrow q$ 的等价项。

p 与 q 的等价式“$p\Leftrightarrow q$”，是表示“$p\Rightarrow q$ 与 $p\Leftarrow q$ 都成立”的新命题；它的对象是“p与q”，特征是“$p\Rightarrow q$ 与 $p\Leftarrow q$ 都成立”．例如，因为“$\lg x<0\Rightarrow 0<x<1$”与“$\lg x<0\Leftarrow 0<x<1$”都是真命题，所以“$\lg x<0\Leftrightarrow 0<x<1$”是真命题；因为“$y=\log_a x$ 是增函数$\Rightarrow a>2$”是假命题，所以“$y=\log_a x$ 是增函数$\Leftrightarrow a>2$”是假命题。

因为两命题“$p\Leftarrow q$”与“$q\Rightarrow p$”，或同时为真命题，或同时为假命题，所以“$p\Leftarrow q$”等价于“$q\Rightarrow p$”。

联词“等价于”，又常写为“当且仅当”，也常写为“必须且只须”。

含有逻辑联词（且，或，非，若…则…，推出于，等价于，其符号分别为 $\wedge$，$\vee$，$-$，$\Rightarrow$，$\Leftarrow$，$\Leftrightarrow$)的命题叫做复合命题．不含逻辑联词的命题叫做简单命题。

命题 $p\wedge q$，$p\vee q$，$\bar{p}$，$p\Rightarrow q$，$p\Leftarrow q$，$p\Leftrightarrow q$，都是复合命题。对于复合命题可以分解出它的“项”，这些“项”也是命题。例如，$p\wedge q$ 可分解为合取项 p与q，又如$p\Rightarrow q$可分解为原因项 p 与结果项 q。

数学中的很多简单命题(从形式上看)，常常等价于复合命题，可以分解出它的项。例如，“点 $Q(a,b)$ 是点$P(1,2)$关于直线$y=x$的对称点”，形式上是简单命题，实际上等价于复合命题“$a=2$且$b=1$”，可分解得出它的两个合取项分别为“$a=2$”与“$b=1$”。又如，命题$|x|+|x-1|\leqslant 2$，等价